Dr. M. Dettling
Maël Pavón

Prüfung Grundlagen der Mathematik II
4. Februar 2015

AUFGABE 1: [5 Punkte]

Seien $M, L \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ zwei Matrizen gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei dazu noch $I \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die Identitätsmatrix.

(a) [1 Punkt] Berechnen Sie die vierte Potenz M^4 von der Matrix M.

(b) [2 Punkte] Berechnen Sie, mithilfe von (a), die Matrix $(I + M)^4$.

(c) [1 Punkt] Berechnen Sie das Produkt $(I + L)(I - L)$.

(d) [1 Punkt] Berechnen Sie $(I + L)^{-1}$.

AUFGABE 2: [2 Punkte]

Sei $Q \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ eine Matrix gegeben durch

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von Q.

(b) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von Q.

AUFGABE 3: [4 Punkte]

Seien $R, S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zwei Matrizen gegeben durch

$$R := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte von der Matrix R.

(b) [2 Punkte] Die Eigenwerte von der Matrix S sind $\{-1, 1, 3\}$. Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenvektoren.

AUFGABE 4: Gubrist-Tunnel [5 Punkte]

Der Gubrist-Tunnel ist chronisch überlastet. In den Spitzenzeiten frequentieren pro Fahrtrichtung und Stunde bis zu 4800 Autos diese Verkehrsachse. Die Strasse ist zweispurig, also können wir von durchschnittlich 2400 Autos pro Spur und Stunde ausgehen. Beantworten Sie nun mit dieser Angabe die folgenden Fragen:

(a) [1 Punkt] Wie gross ist zu den Spitzenzeiten die mittlere (d.h. durchschnittliche) Wartezeit zwischen zwei Fahrzeugen in Sekunden?

(b) [1 Punkt] Es sei $X :=$ "Wartezeit zwischen zwei Fahrzeugen in Sekunden" die Zufallsvariable von Interesse. Setzen Sie für X eine $\exp(\lambda)$-Verteilung an und bestimmen Sie mit den obigen Angaben den Parameter.

(c) [3 Punkte] Bestimmen Sie mit der in (b) angepassten Exponentialverteilung die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden, in Sekunden angegebenen Wartezeiten. Geben Sie die Formel und das Resultat an.

(i) $P[X \leq 0.5]$,

(ii) $P[1 < X \leq 3]$,

(iii) $P[X > 5]$.

Hinweis: Die kumulative Verteilungsfunktion ist hier $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ mit:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
$F(x)$	0.00	0.28	0.49	0.63	0.74	0.81	0.86	0.90	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98

AUFGABE 5: Kreuzbandriss [4 Punkte]

Die Dynamische Intraligamentäre Stabilisierung (DIS) ist ein neues Verfahren zur Operation von Kreuzbandrissen. Dabei wird nicht, wie beim üblichen Verfahren, eine Spendersehne aus dem eigenen Bein eingesetzt, sondern das gerissene Kreuzband so stabilisiert, dass es zur Spontanheilung kommt. Man erhofft sich, dass die Heilung dank DIS schneller voranschreitet und die Kniegelenksfunktion langfristig besser ist.

In einer Studie wurden 9 Patienten mit DIS-Technik operiert und zur Zufriedenheit befragt. Dabei waren 8 Patienten zufrieden und 1 unzufrieden. Von der konventionellen OP-Technik ist bekannt, dass nur 51% der Patienten zufrieden sind.

Für eine Zufallsvariable $X \sim \text{Bin}(n, p)$ mit $n = 9$ und $p = 0.51$ sind die Wahrscheinlichkeiten $P[X = k]$ gegeben durch:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P[X = k]$	0.002	0.015	0.064	0.154	0.241	0.251	0.174	0.078	0.020	0.002

Untersuchen Sie mit einem geeigneten statistischen Test, ob der Anteil an zufriedenen Patienten bei der DIS-Technik signifikant von 51% abweicht.

(a) [1 Punkt] Geben Sie die Nullhypothese an.

(b) [1 Punkt] Bestimmen Sie aus der Tabelle den Annahme- und Verwerfungsbereich.

(c) [1 Punkt] Berechnen Sie den p-Wert.

(d) [1 Punkt] Kommentieren Sie, was die Folgerung aus dem Test ist.