

Prüfung Grundlagen der Mathematik II

01. Februar 2017

AUFGABE 1 [8 Punkte].

Jede Teilaufgabe gibt zwei Punkte. Für die volle Punktzahl ist jeweils ein vollständiger Lösungsweg gefragt.

(a) Invertieren Sie, falls möglich, die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es gilt $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Begründen Sie, wieso es keinen weiteren, von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedenen Vektor w mit $Aw = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt.

(c) Finden Sie, falls möglich, ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

zu den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

(d) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(ABA^T)$.

AUFGABE 2 – Eigenwerte [4 Punkte].

Jede Teilaufgabe gibt zwei Punkte. Für die volle Punktzahl ist jeweils ein vollständiger Lösungsweg gefragt.

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Finden Sie einen Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -8 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert 1.

AUFGABE 3 – Multiple Choice. [6 Punkte]

Für jede korrekt angekreuzte Aussage erhalten Sie einen halben Pluspunkt, für jede falsch angekreuzte Aussage einen viertel Minuspunkt. Sie können bei dieser Aufgabe schlimmstenfalls durch Ankreuzen falscher Aussagen alle Punkte aus richtig angekreuzten Antworten verlieren, aber insgesamt keine negative Punktzahl erzielen. Es ist jeweils nur eine einzige Antwortmöglichkeit richtig, Teilaufgaben mit mehreren angekreuzten Aussagen werden nicht gewertet.

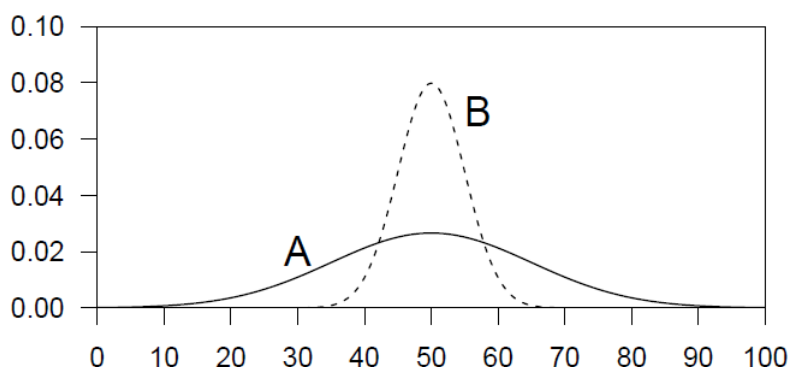
- a) Wenn wir eine Zufallszahl aus einer Standardnormalverteilung ziehen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl exakt gleich 0 ist?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ etwas anderes

- b) Wenn wir eine Zufallszahl aus einer Standardnormalverteilung ziehen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl grösser als 0 ist?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ etwas anderes

Die nachfolgenden Fragen beziehen sich alle auf die untenstehende Abbildung mit den beiden Dichtefunktionen der normalverteilten Zufallsvariablen A und B .



c) Die Standardabweichung der Zufallsvariable B (gestrichelte Linie) ist

☐ < 10 ☐ ≈ 10 ☐ > 10 .

d) Ist die Standardabweichung der Zufallsvariable A grösser als jene von B ?

☐ Ja. ☐ Nein.

e) Die Fläche unterhalb der Dichtefunktion von A ist im Vergleich zu B ?

☐ kleiner ☐ ungefähr gleich ☐ exakt gleich ☐ grösser

f) Welche der zugehörigen Zufallsvariablen A und B kann Werte < 0 annehmen?

☐ keine ☐ nur A ☐ nur B ☐ beide

g) Der Erwartungswert von A ist im Vergleich mit zu jenem von B

☐ kleiner ☐ exakt gleich ☐ grösser ☐ keine Aussage möglich .

h) Der Erwartungswert der Zufallsvariable $A + B$ ist:

☐ ≈ 0 ☐ ≈ 50 ☐ ≈ 100 ☐ keine Aussage möglich

i) Die Varianz der Zufallsvariable $A + B$ ist

☐ ≈ 20 ☐ ≈ 40 ☐ ≈ 250 ☐ ≈ 1000
☐ keine Aussage möglich

Wir betrachten nun die Zufallsvariable $\bar{A}_{10} = \left(\sum_{i=1}^{10} A_i \right) / 10$, d.h. den Mittelwert aus 10 unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen A_i , welche dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariable A aufweisen.

j) Der Erwartungswert von $\bar{A}_{10}$ ist

☐ ≈ 0 ☐ ≈ 50 ☐ ≈ 100 ☐ keine Aussage möglich

k) Die Standardabweichung von $\bar{A}_{10}$ ist

☐ ≈ 0 ☐ $\approx \sqrt{3}$ ☐ ≈ 3 ☐ $\approx \sqrt{22.5}$ ☐ ≈ 22.5

l) $\bar{A}_{10}$ ist

☐ exakt normalverteilt ☐ approximativ normalverteilt
☐ anders verteilt

AUFGABE 4 – Rauchverbot auf den Perrons. [6 Punkte]

Bei einer Umfrage zur Einführung von generellen Rauchverboten auf den Perrons der Schweizer Bahnhöfe wurden 240 Personen befragt, wovon 144 zustimmten. Dies entspricht einem Anteil von $\hat{p} = 0.6$.

a) [3 Punkte – 1 Punkt pro Teilaufgabe] Es soll ein passender Test auf dem 95%-Niveau durchgeführt werden für die Fragestellung, ob es eine Mehrheit für oder gegen die Einführung des Rauchverbots gibt. Es sei X = “Anzahl Zustimmende unter 240 Befragten”.

- i) Geben Sie eine Verteilung von X und die Nullhypothese an.
- ii) Bei korrekter Spezifikation gelten die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X \leq 104) = 0.0226 = P(X \geq 136)$$

$$P(X \leq 105) = 0.0305 = P(X \geq 135)$$

$$P(X \leq 106) = 0.0406 = P(X \geq 134)$$

$$P(X \leq 107) = 0.0532 = P(X \geq 133)$$

Geben Sie Annahme- und Verwerfungsbereich für den Test an.

- iii) Der p-Wert im obigen Test ergab sich als 0.002. Machen Sie eine kurze und prägnante Aussage zum Resultat der Umfrage, welche Schätzung und Testresultat mit einbezieht.

b) [3 Punkte – 1 Punkt pro Teilaufgabe] Erzeugen Sie ein 95%-Vertrauensintervall für den Anteil der Personen, welche einem Rauchverbot auf den Perrons zustimmen. Verwenden Sie dazu die Näherungsformel und zur vereinfachten Berechnung $1.96 \approx 2$ sowie $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$.

- i) Darf man die Näherungsformel im vorliegenden Fall verwenden?
 - ii) Berechnen Sie das 95%-Vertrauensintervall.
 - iii) Wann/wie kann man mit diesem Resultat sagen, ob es eine signifikante Zustimmung zum Rauchverbot auf den Perrons gibt? Stimmen der p-Wert von 0.002, ihr errechnetes 95%-Vertrauensintervall und die hiesige Aussage überein?
-