Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dr. M. Dettling

29. Januar 2018

Grundlagen der Mathematik II
D-CHAB

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Beliebige schriftliche Hilfsmittel, Wörterbücher. Keine Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Lassen Sie auf jedem Blatt einen Rand für die Korrektur. **Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.**
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Maximalpunktzahl: 30 Punkte.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

AUFGABE 1 (8 Punkte)

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ und $b_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$, für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) (2 Punkte) Bringen Sie die augmentierte Matrix (A, b_α) auf Zeilenstufenform.

(b) (2 Punkte) Wie viele Lösungen gibt es in Abhängigkeit von α? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Lösungsraums von $Ax = 0$. Welche Dimension hat er?

(d) (2 Punkte) Sei nun $\alpha = 2$. Berechnen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b_2$ und drücken Sie diese durch Orts- und Richtungsvektoren aus.

(e) (1 Punkt) Für welche $b \in \mathbb{R}^4$ ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ ein Vektorraum?

—— BITTE WENDEN ——

AUFGABE 2 (7 Punkte)

Gegeben seien $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 9 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

wobei

(a) (1 Punkte) Sei $Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Definiere nun J als die 6×6-Matrix $J = \begin{pmatrix} 0_3 & Id_3 \\ Id_3 & 0_3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie JA.

(b) (2 Punkte) Berechnen sie $\det(J)$. Zeigen Sie, dass $\det(A) = -\det(A_1)\det(A_2)$ und berechnen Sie $\det(A)$.

(c) (2 Punkte) Was sind die Eigenwerte von JA? Gibt es eine Basis in $\mathbb{R}^6$ bestehend aus Eigenvektoren von JA? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) (2 Punkt) Sei F eine Matrix, so dass $F^2 + F$ den Eigenwert -1 hat. Zeigen Sie, dass F^3 den Eigenwert 1 hat.

—— BITTE WENDEN ——

AUFGABE 3 (8 Punkte)

Als "Bieridee" wird unter Kollegen ein Fitnesstest durchgeführt. Es geht dabei um die Anzahl Klimmzüge welche man(n) komplettieren kann. Es ergeben sich dabei die folgenden Resultate:

$$0, 12, 7, 4, 0, 8, 14, 2, 6, 7$$

Beantworten sie die folgenden Fragen:

(a) (1 Punkt) Geben sie den Wertebereich für die Zufallsvariable $X =$ "Anzahl komplettierte Klimmzüge" an. Handelt es sich um eine diskrete oder eine stetige Zufallsvariable? .

(b) (2 Punkte) Welches parametrische Verteilungsmodell eignet sich für X? Bestimmen sie mit den oben angegebenen Daten auch den/die Parameter dieser Verteilung.

(c) (2 Punkte) Wie gross ist die relative Häufigkeit für die beobachteten Daten, dass ein Proband mehr als 1 Klimmzug schafft? Verwenden sie danach das parametrische Verteilungsmodell, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein Proband mehr als zwei Klimmzüge schafft. Hinweis: $e^{-1} = 0.37, \quad e^{-2} = 0.14, \quad e^{-3} = 0.05, \quad e^{-4} = 0.02, \quad e^{-5} = 0.007, \quad e^{-6} = 0.002.$

Als zweite Disziplin des "Bierathlons" folgt der Weitwurf von einem 10kg schweren Steinbrocken. Die gemessenen Werte stehen hier nicht zur Verfügung. Es sei $Y =$"erzielte Distanz".

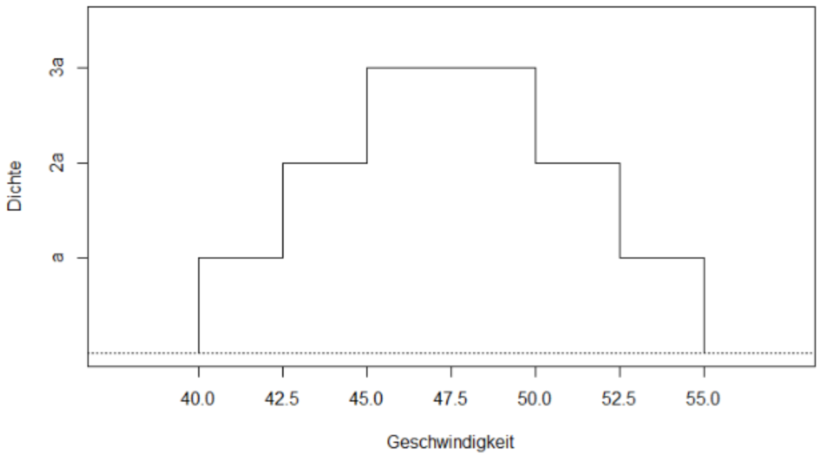
(d) (2 Punkte) Geben sie den Wertebereich der Zufallsvariable Y an. Entscheiden sie dann, ob sie zur Beschreibung von eine Normal-, eine Lognormal- oder eine Exponentialverteilung verwenden und begründen sie ihre Wahl

(e) (1 Punkt) Beschreiben sie schliesslich, wie sie aus den Messwerten den/die Parameter der gewählten Verteilung bestimmen können.

—— BITTE WENDEN ——

AUFGABE 4 (7 Punkte)

Bei einer Verkehrskontrolle wird die Geschwindigkeit von Fahrzeugen ermittelt. Es zeigt sich dabei die folgende Verteilung, d.h. Dichtefunktion.



Es sei X = "Geschwindigkeit eines Fahrzeugs" die Zufallsvariable von Interesse. Beantworten sie nun die folgenden Fragen:

(a) (1 Punkte) Bestimmen sie den Wert a im obigen Plot (inkl. Herleitung/Begründung).

(b) (1 Punkt) Wie gross ist der Erwartungswert? (inkl. Herleitung/Begründung).

(c) (2 Punkte) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 50)$. (inkl. Herleitung/Begründung).

(d) (3 Punkte) Skizzieren sie die kumulative Verteilungsfunktion von . Die Skizze muss nicht massstäblich exakt sein, jedoch alle wesentlichen Elemente der kumulativen Verteilungsfunktion wiedergeben. Ebenso müssen zwingend korrekte Achsenbeschriftungen vorhanden sein.