Dr. M. Dettling **ETH Zürich, 23. Januar 2019**

D-CHAB

Prüfung zur Vorlesung Grundlagen der Mathematik II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Legi-Nr.:	
Studiengang:	

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: Beliebige schriftliche Hilfsmittel, Wörterbücher. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt** und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Lassen Sie auf jedem Blatt einen Rand für die Korrektur. **Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.**
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe. Verwenden Sie keinen Tipp-Ex.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte Total	Kontrolle Total	Max
1			8
2			8
3			9
4			5
Total			30

Vollständigkeit	
Note	

Bitte wenden!

Aufgaben

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Vektor $c_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sowie die 3×3 Matrix $A_\alpha = c_\alpha \cdot c_\alpha^\top$.

(a) Geben Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ den Rang von A_α an. [1 Punkt]
Hinweis: Es ist keine Rechnung notwendig.

Wir betrachten nun die lineare Abbildung $F_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$F_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Kerns der Abbildung F_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. [2 Punkte]

(c) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass gilt $A_\alpha^2 = \frac{7}{4} A_\alpha$. [3 Punkte]
Hinweis: Sie brauchen A_α^2 nicht explizit ausrechnen. Benutzen Sie stattdessen, dass gilt $A_\alpha^2 = (c_\alpha \cdot c_\alpha^\top)^2$.

(d) Weisen Sie nach, dass c_α ein Eigenvektor von A_α ist und begründen Sie, dass die Matrix A_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. [2 Punkte]

Aufgabe 2 [8 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist. [3 Punkte]

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: [5 Punkte]

(i) Die Menge $L = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y = z + 2\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(iii) Ist A eine reelle 3×3-Matrix mit $A^\top = -A$, dann ist $\det(A) = 0$.

(iv) Ist A eine reelle $n \times n$-Matrix und $A^5 \cdot (A^\top)^2$ ist invertierbar, dann ist auch A invertierbar.

(v) Es gibt eine reelle, orthogonale 3×3-Matrix M mit den Eigenwerten $-1, 1$ und 3.
Hinweis: Betrachten Sie für einen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ von M die Länge von $M \cdot x$, also $\|M \cdot x\| = \sqrt{(M \cdot x)^\top (M \cdot x)}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 [9 Punkte]

Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit einer Dichte f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ e^{-c(x-1)}, & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

(a) Berechnen Sie den Wert von c. [2 Punkte]

(b) Berechnen Sie:

- die Verteilungsfunktion $F_X = P[X \leq \cdot]$ der Zufallsvariable X,
- die Wahrscheinlichkeiten $P[X = 4]$ und $P[X \geq 3]$,
- den Erwartungswert $E[X]$. [5 Punkte]

(c) Wir betrachten nun einen Zylinder mit Höhe 3, dessen Radius zufällig und wie X verteilt ist. Das Volumen dieses Zylinders ist die Zufallsvariable V. Finden Sie die Verteilungsfunktion $F_V = P[V \leq \cdot]$ von V. [2 Punkte]

Aufgabe 4 [5 Punkte]

Bei einer gesundheitswissenschaftlichen Untersuchung wird bei zwei Testgruppen A und B, beide der Grösse $n = 100$, jeweils die Cholesterinkonzentration im Blut gemessen. Es wird davon ausgegangen, dass die Cholesterinkonzentrationen im Blut der unterschiedlichen Personen (approximativ) normalverteilt und unabhängig voneinander sind. Es ergeben sich dabei die folgenden Werte in $\text{mmol} \cdot \text{l}^{-1}$:

$$\widehat{\mu}_A = 6.5, \qquad \widehat{\sigma}_A = s_A = 2,$$
$$\widehat{\mu}_B = 4.5, \qquad \widehat{\sigma}_B = s_B = 1.$$

(a) Finden Sie je ein approximatives 95%-Vertrauensintervall für die Cholesterinkonzentration im Blut bei den beiden Gruppen A und B [1 Punkt]

Hinweis: Eventuell relevante Quantile der t-Verteilung: $qt_{0.95;99} = 1.66$, $qt_{0.975;99} = 1.98$.

(b) Entscheiden Sie mit einem Ad-Hoc-Test, ob sich die mittleren Cholesterinkonzentrationen bei den Gruppen A und B signifikant voneinander unterscheiden. [1 Punkt]

Bei der Untersuchung wird eine Person bei zu hohem Cholesteringehalt als 'gefährdet' in Bezug auf bestimmte Krankheiten eingestuft.

(c) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für eine zufällig ausgewählte Person in Gruppe A, als 'gefährdet' zu gelten, sei $p_A = 0.5$ und innerhalb von Gruppe B sei diese Wahrscheinlichkeit $p_B = 0.4$. Schätzen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatz die Wahrscheinlichkeit ab, dass mehr als die Hälfte aller 200 Testpersonen bei der Untersuchung als 'gefährdet' eingestuft werden. [3 Punkte]

Hinweis: Sind $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängig, so ist $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, also $\frac{X_1+X_2-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Auf der umliegenden Seite finden Sie die Werte für die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ einer Standardnormalverteilung.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6408	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
3.1	.999032	.999065	.999096	.999126	.999155	.999184	.999211	.999238	.999264	.999289
3.2	.999313	.999336	.999359	.999381	.999402	.999423	.999443	.999462	.999481	.999499
3.3	.999517	.999534	.999550	.999566	.999581	.999596	.999610	.999624	.999638	.999651
3.4	.999663	.999675	.999687	.999698	.999709	.999720	.999730	.999740	.999749	.999758
3.5	.999767	.999776	.999784	.999792	.999800	.999807	.999815	.999822	.999828	.999835
3.6	.999841	.999847	.999853	.999858	.999864	.999869	.999874	.999879	.999883	.999888
3.7	.999892	.999896	.999900	.999904	.999908	.999912	.999915	.999918	.999922	.999925
3.8	.999928	.999931	.999933	.999936	.999938	.999941	.999943	.999946	.999948	.999950
3.9	.999952	.999954	.999956	.999958	.999959	.999961	.999963	.999964	.999966	.999967