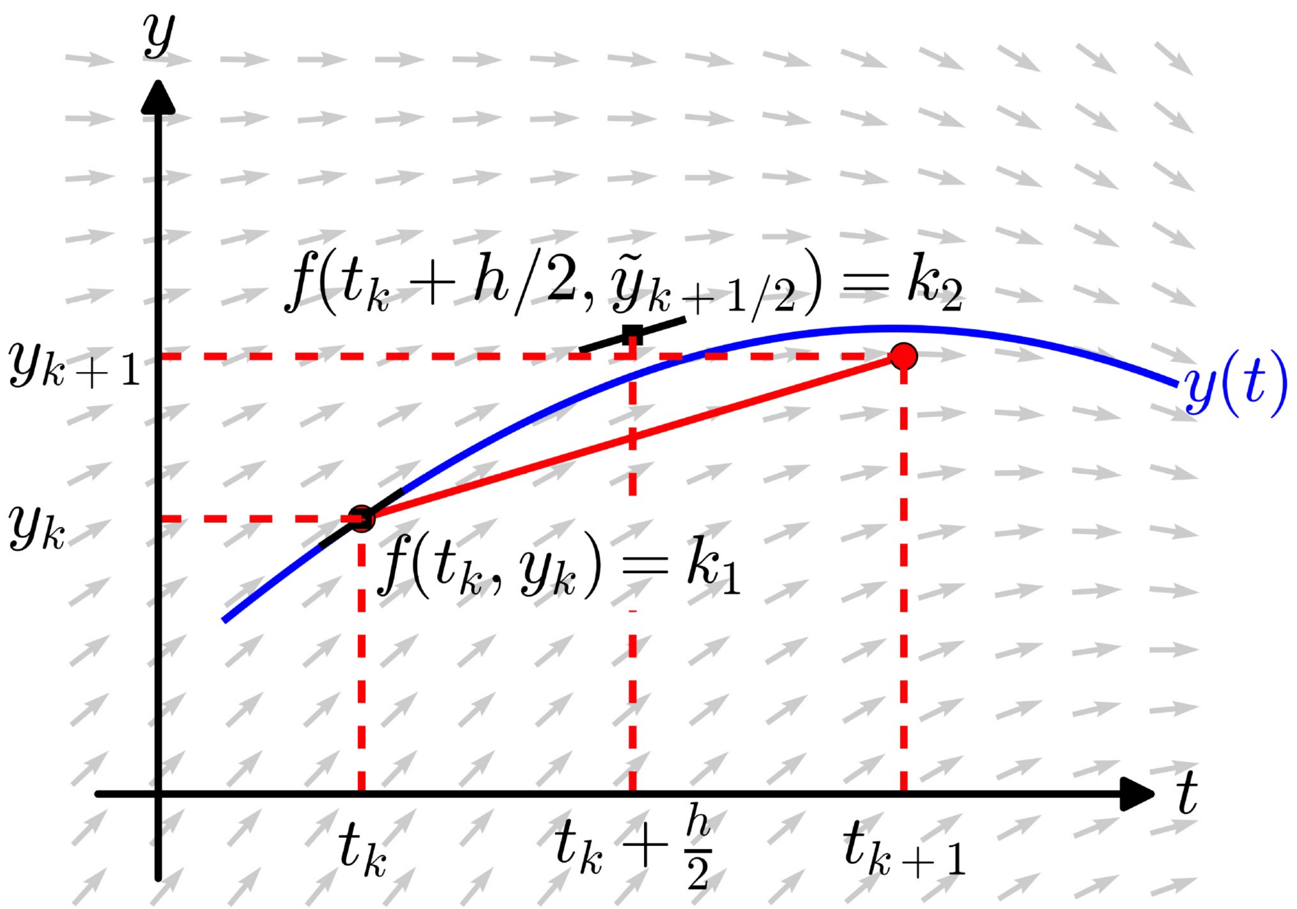
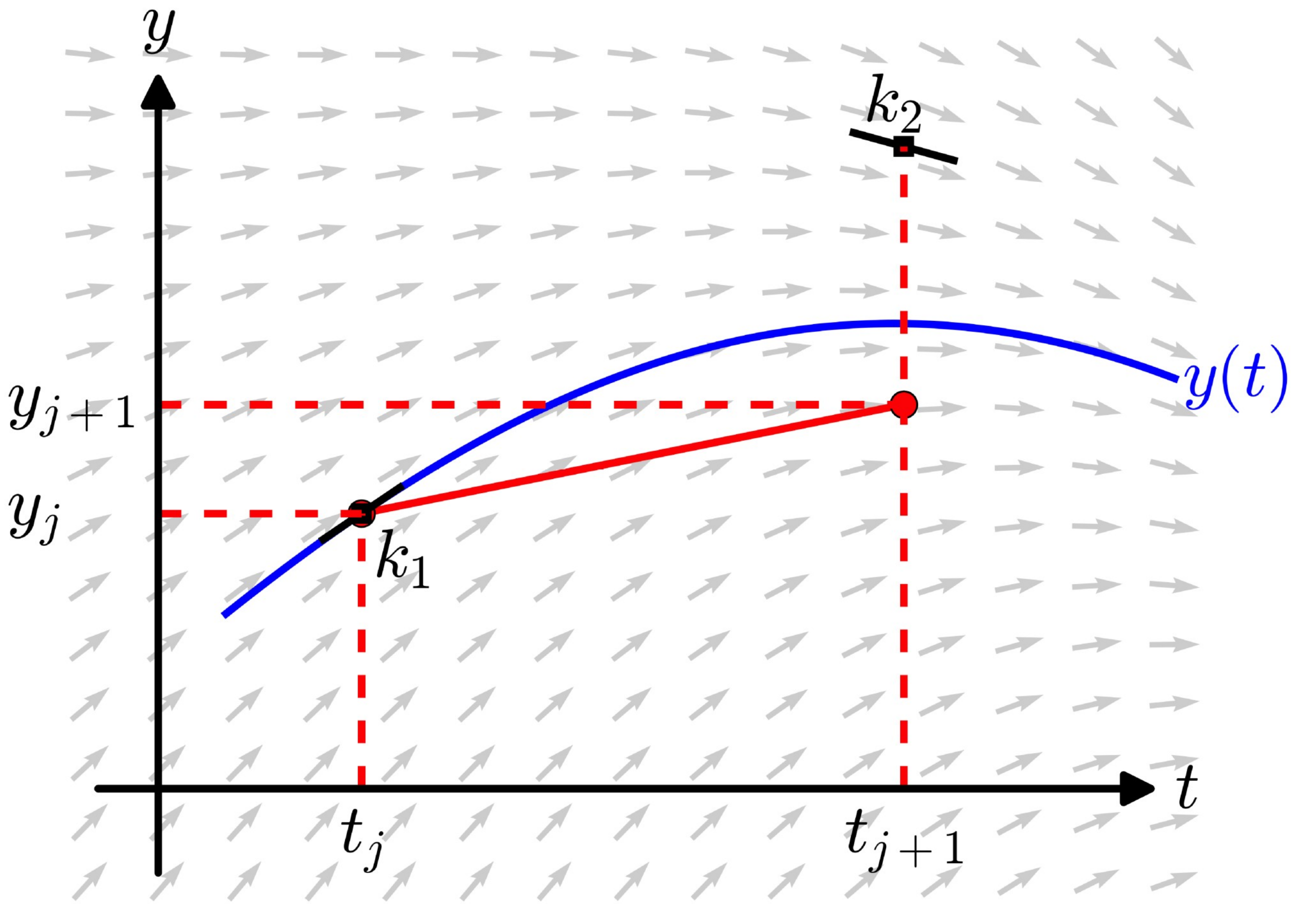
# Verbesserter Euler

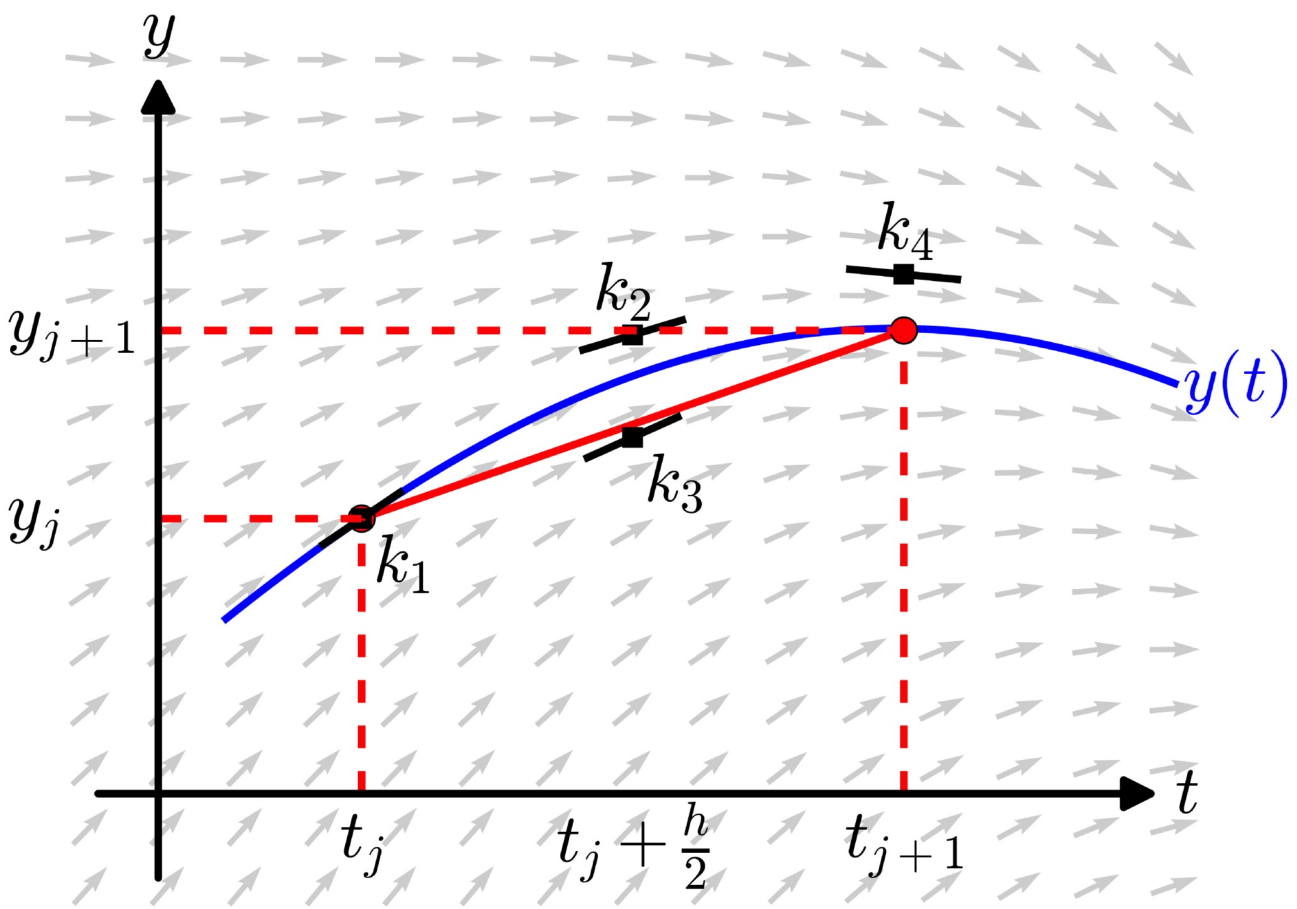


Bsp. (16)

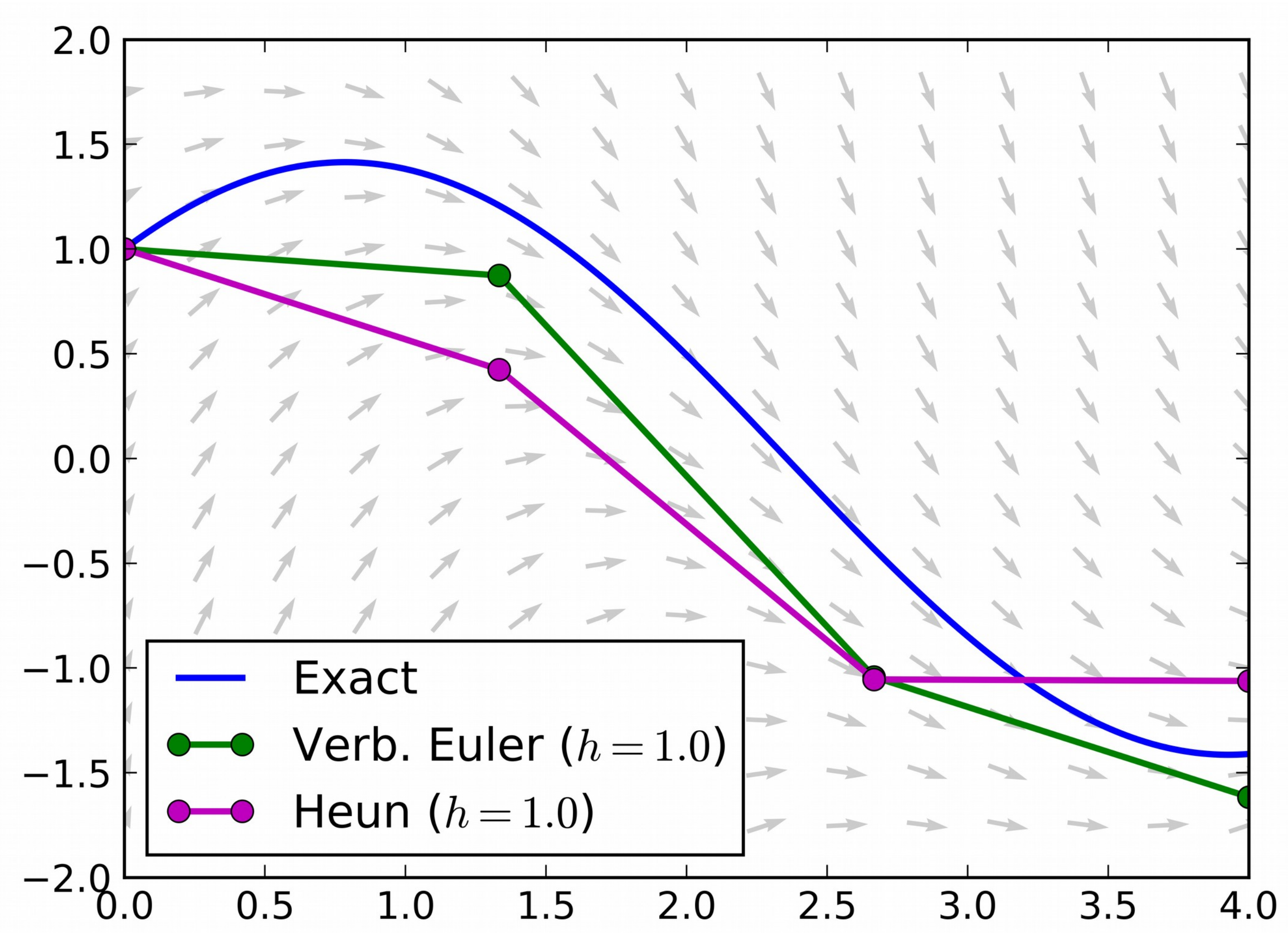
# Heun‘s Methode



# DIE Runge-Kutta Methode

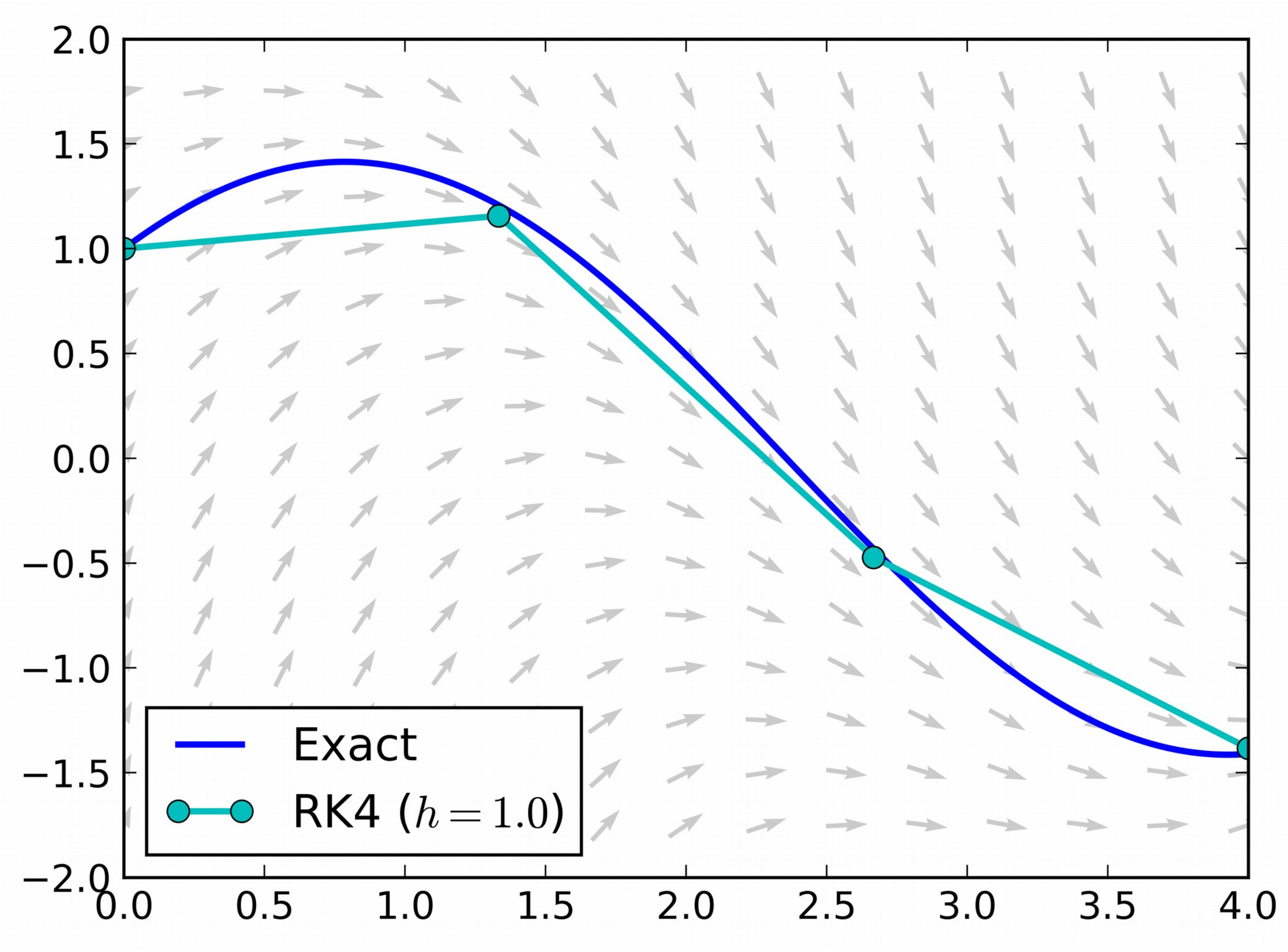


# Verb. Euler & Heun




$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2\cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

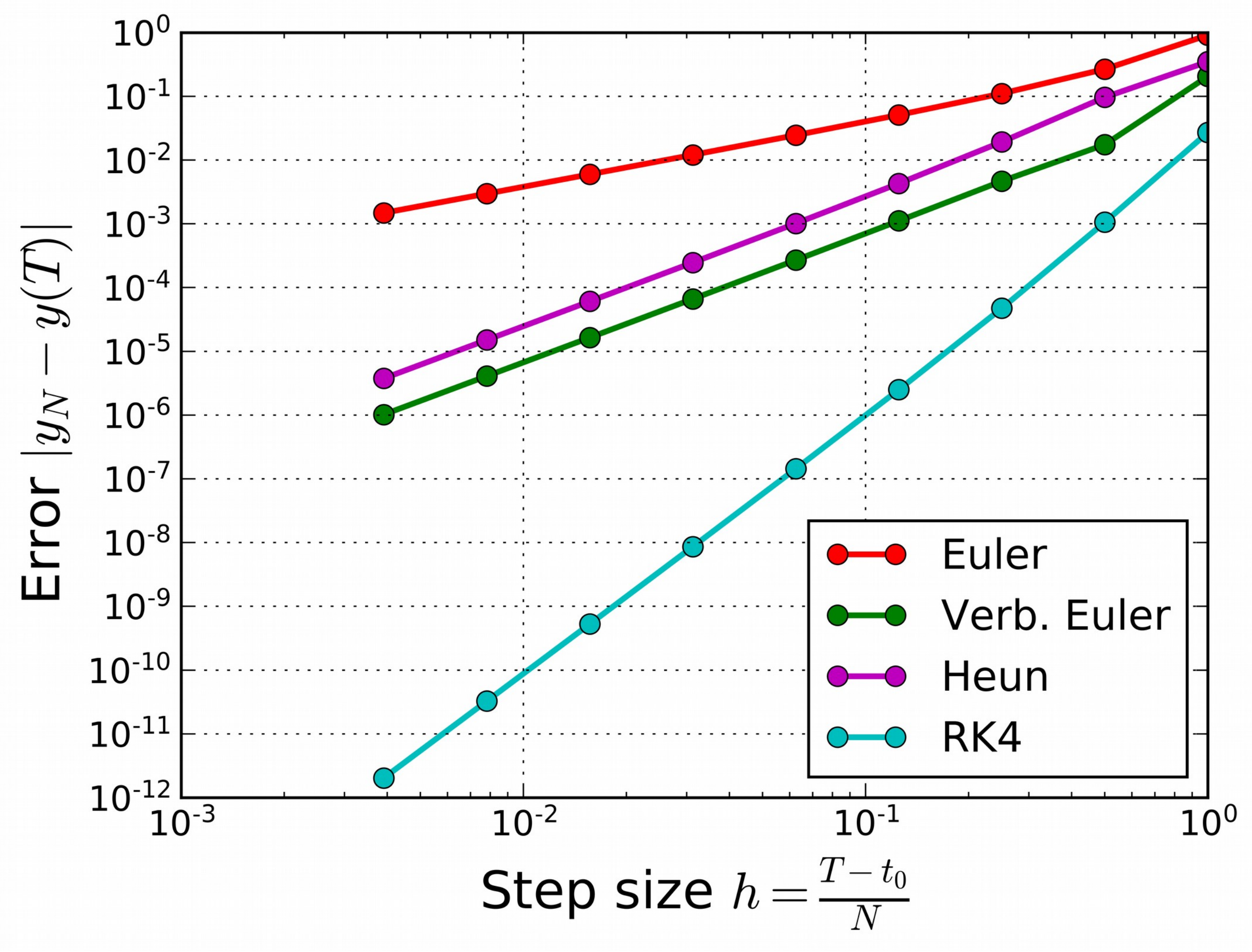
# DIE Runge-Kutta Methode




$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2\cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

Bsp. (16)

# Fehler



(13) Allgemeines 3-stufiges explizites RK

$$
\begin{array}{c|ccc}
c_1 & & & \\
c_2 & a_{21} & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}
$$

Durch entwickeln der Verfahrensfunktion und Vergleich mit der exakten Entwicklung erhält man folgende Bedingungen:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$ 1. Ordnung

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2$$

$$a_{21} b_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 = 1/2$$ 2. Ordnung

$$b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3$$

$$a_{21} b_2 c_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 c_3 = 1/3$$

$$a_{21}^2 b_2 + (a_{31} + a_{32})^2 b_3 = 1/3$$ 3. Ordnung

$$a_{21} b_2 c_1 + a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 = 1/6$$

$$a_{21} a_{32} b_3 = 1/6$$

**Satz II.3:** Falls die rechte Seite der DGL $\vec{f}(t,\vec{y})$ und die Verfahrens-Funktion $\vec{\phi}(t,\vec{y},t)$ Lipschitz-stetig in $\vec{y}$ sind, dann gilt für das ESV folgende (globale) Fehlerabschätzung

$$\epsilon = \max_{j=0,\dots,N} \|\vec{y}(t_j) - \vec{y}_j\|$$

$$\leq \Big( \|\vec{y}(t_0) - \vec{y}_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|\vec{e}_j\| \Big) \cdot e^{\tilde{L}(t_N - t_0)}$$

AW Fehler

Fehler in jedem Schritt summieren sich schlimmstenfalls

wobei $\tilde{L}$ die Lipschitz-Konstante der Verfahrens-Funktion $\vec{\phi}$ ist.