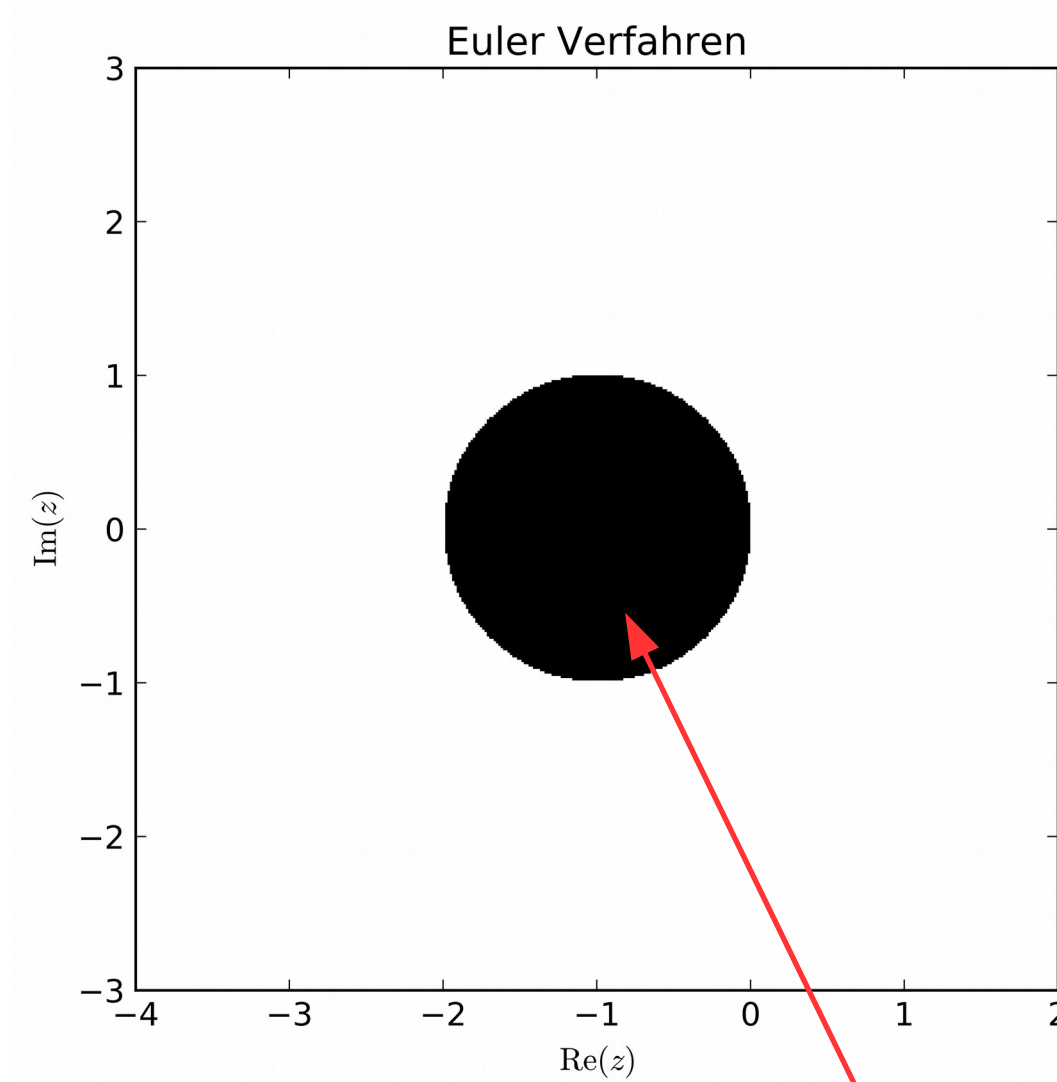
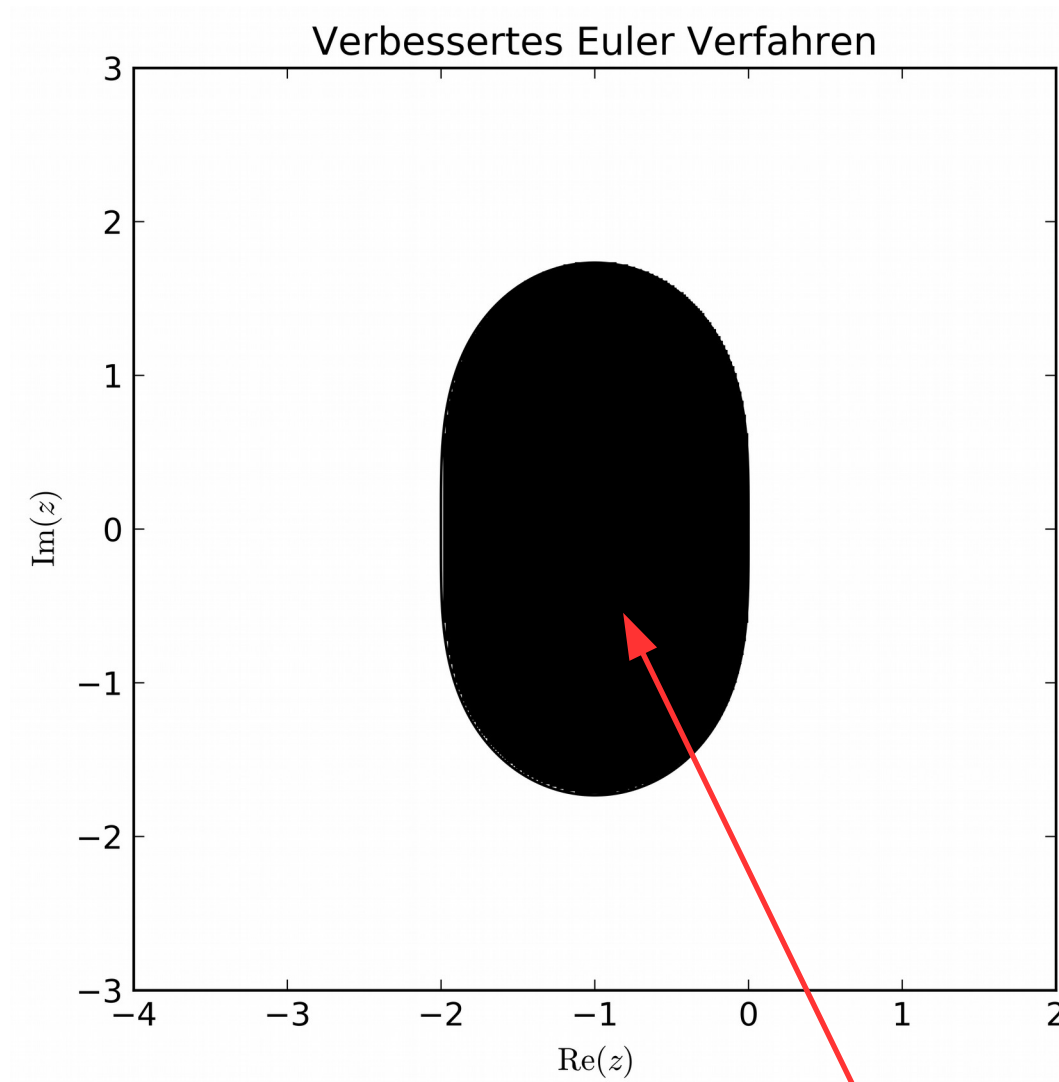


Stabilitätsgebiete



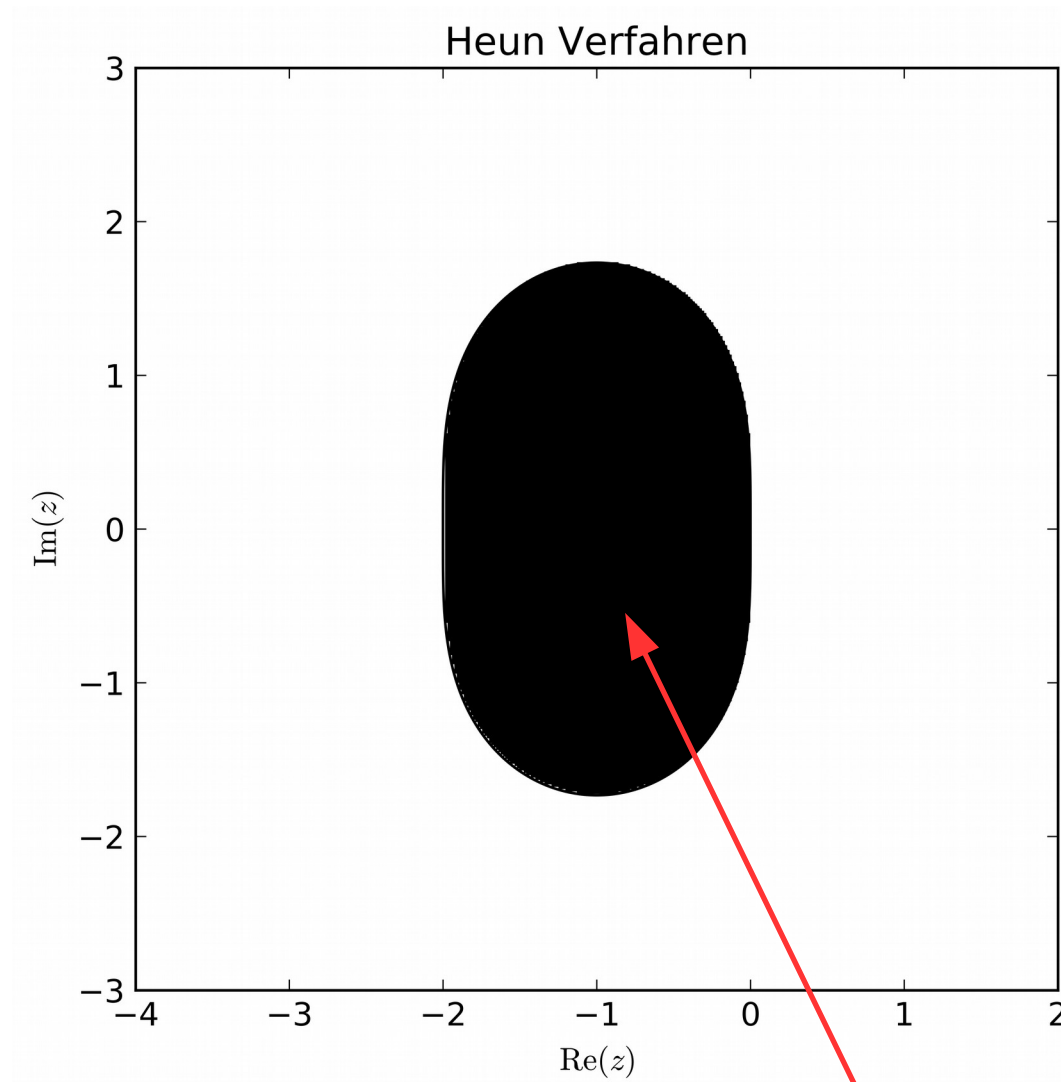
Stabilitätsgebiet

Stabilitätsgebiete



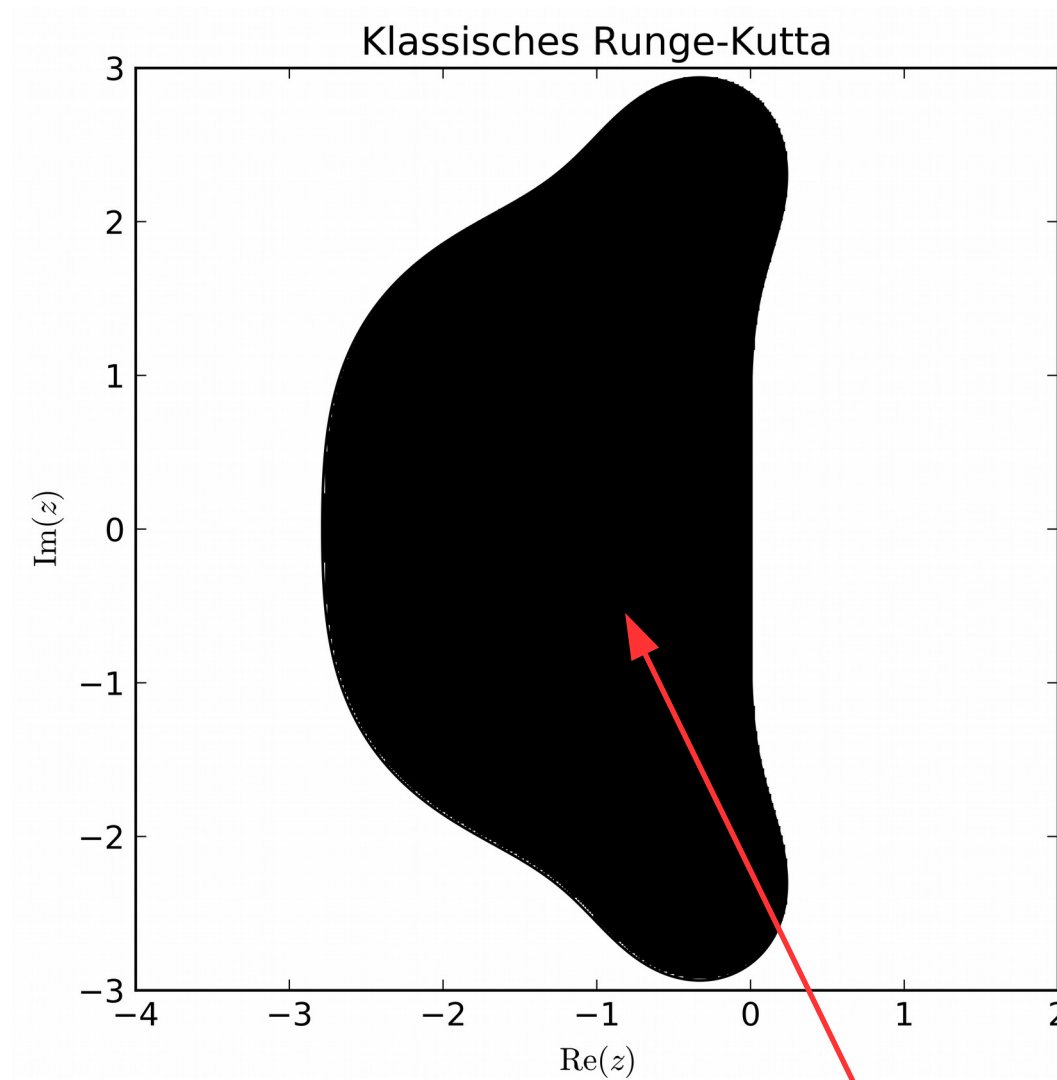
Stabilitätsgebiet

Stabilitätsgebiete



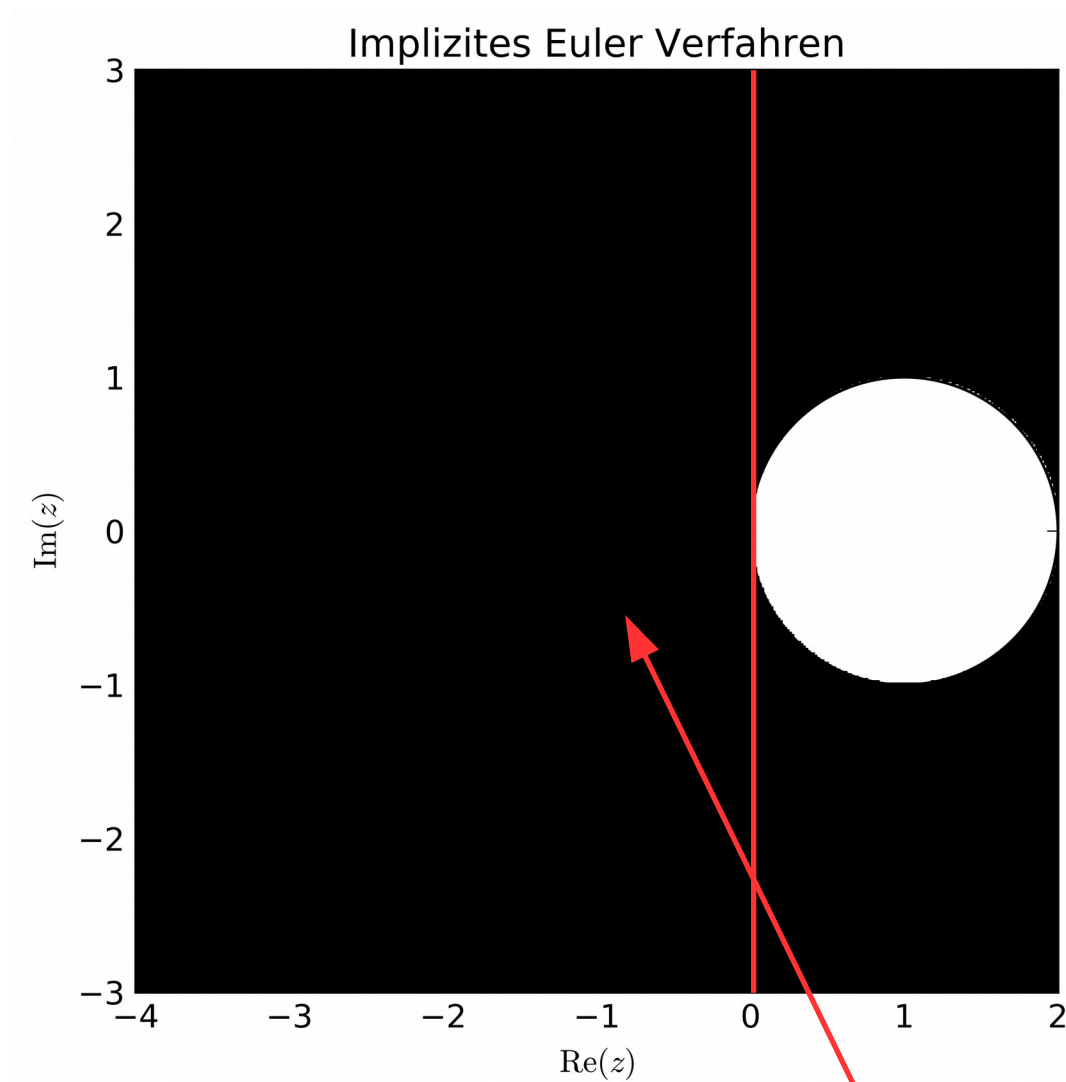
Stabilitätsgebiet

Stabilitätsgebiete



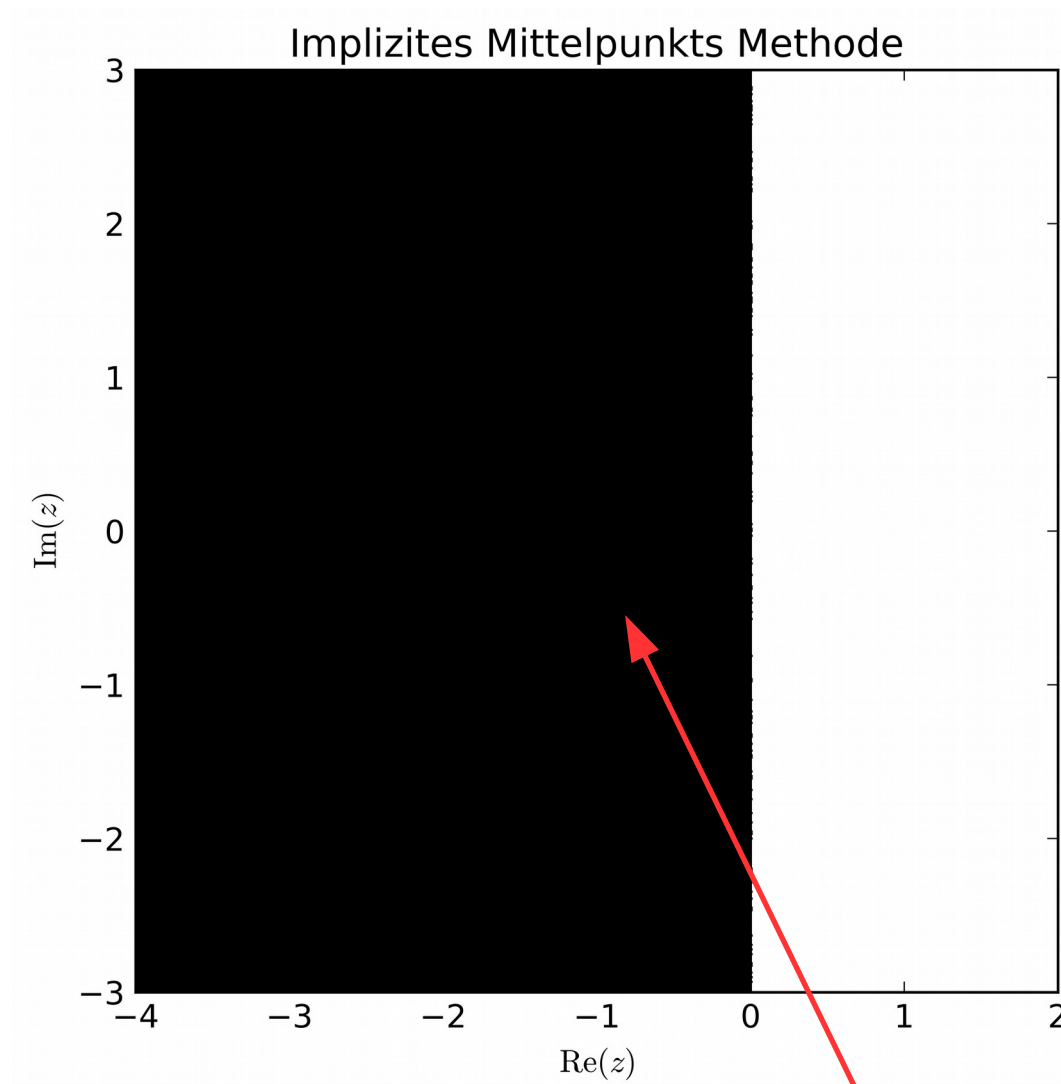
Stabilitätsgebiet

Stabilitätsgebiete



Stabilitätsgebiet

Stabilitätsgebiete



Stabilitätsgebiet

V.2 Implizite Runge-Kutta Verfahren

Ein allgemeines RK ESV mit s Stufen ist gegeben durch folgendes Butcher Tableau:

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	$a_{1,s-1}$	a_{1s}	$\vec{c} \mid A$
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	$a_{2,s-1}$	a_{2s}	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	a_{ss}	
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s	\vec{b}

Wenn A eine untere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen ist, dann ist das RK Verfahren explizit.

Sonst ist es implizit ~~mo~~ i.A. muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden!

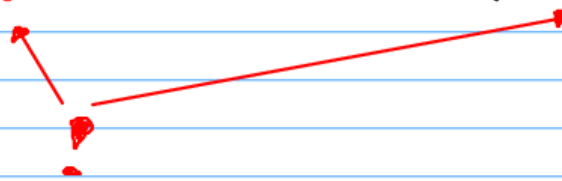
Ausgeschrieben

$$k_1 = f(t_j + c_1 \cdot h, y_j + h \cdot (a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 + \dots + a_{1s} \cdot k_s))$$

$$k_2 = f(t_j + c_2 \cdot h, y_j + h \cdot (a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 + \dots + a_{2s} \cdot k_s))$$

⋮

$$k_s = f(t_j + c_s \cdot h, y_j + h \cdot (a_{s1} \cdot k_1 + a_{s2} \cdot k_2 + \dots + a_{ss} \cdot k_s))$$



Für skalare DGL sind dies s i.A. nichtlineare Gleichungen für s Unbekannte (k_1, k_2, \dots, k_s) .

Für ein System von n DGLen sind dies $?$ i.A. nicht lineare Gleichungen für $?$ Unbekannte $(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_s)$.

Dies ist natürlich sehr aufwendig und deshalb nutzt man implizite Verfahren nur wenn es sich lohnt!

↳ Steife Probleme

Bsp.: (4) Impliziter Euler $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

(5) Implizite Mittelpunkts-Methode (KO $p=2$)

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(6) Implizite Trapez-Methode (KO $p=2$)

Ausgeschrieben $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$

$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$k_2 = f(t_j + h, y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2))$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

oft wird sie geschrieben als

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} \left(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1}) \right)$$

(7) RK-Gauss Verfahren (KO $p=4$)

	$1/2 - \sqrt{3}/6$	$1/4$	$1/4 - \sqrt{3}/6$
Knoten \rightarrow	$1/2 + \sqrt{3}/6$	$1/4 + \sqrt{3}/6$	$1/4$
Gauss-Legendre Gewichte \rightarrow		$1/2$	$1/2$

(8) SDIRK (KO $p=3$)

Singly Diagonal
Implicit RK

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & \\ \hline 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$\gamma = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{6}$$

Hier muss man auch nichtlineare Gleichungen lösen... Aber was ist ein Vorteil von SDIRK Methoden?

Steifes lineares AWP

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{869}{10} & \frac{1521}{5} \\ 0 & -\frac{227}{2} & \frac{591}{2} \\ 0 & \frac{591}{2} & -\frac{1803}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Steifes lineares AWP

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= A\mathbf{y}(t) \\ &= PD P^{-1}\mathbf{y}(t)\end{aligned}$$

Diagonal!

D.h. „von Links“

$\times P^{-1} \rightarrow$

$$P^{-1}\dot{\mathbf{y}}(t) = D \underbrace{P^{-1}\mathbf{y}(t)}_{\mathbf{z}(t)}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = D\mathbf{z}(t) \quad \text{ENTKOPPELT!!!}$$

Steifes lineares AWP

Durch rechnen (z.B. mit einem CAS!):

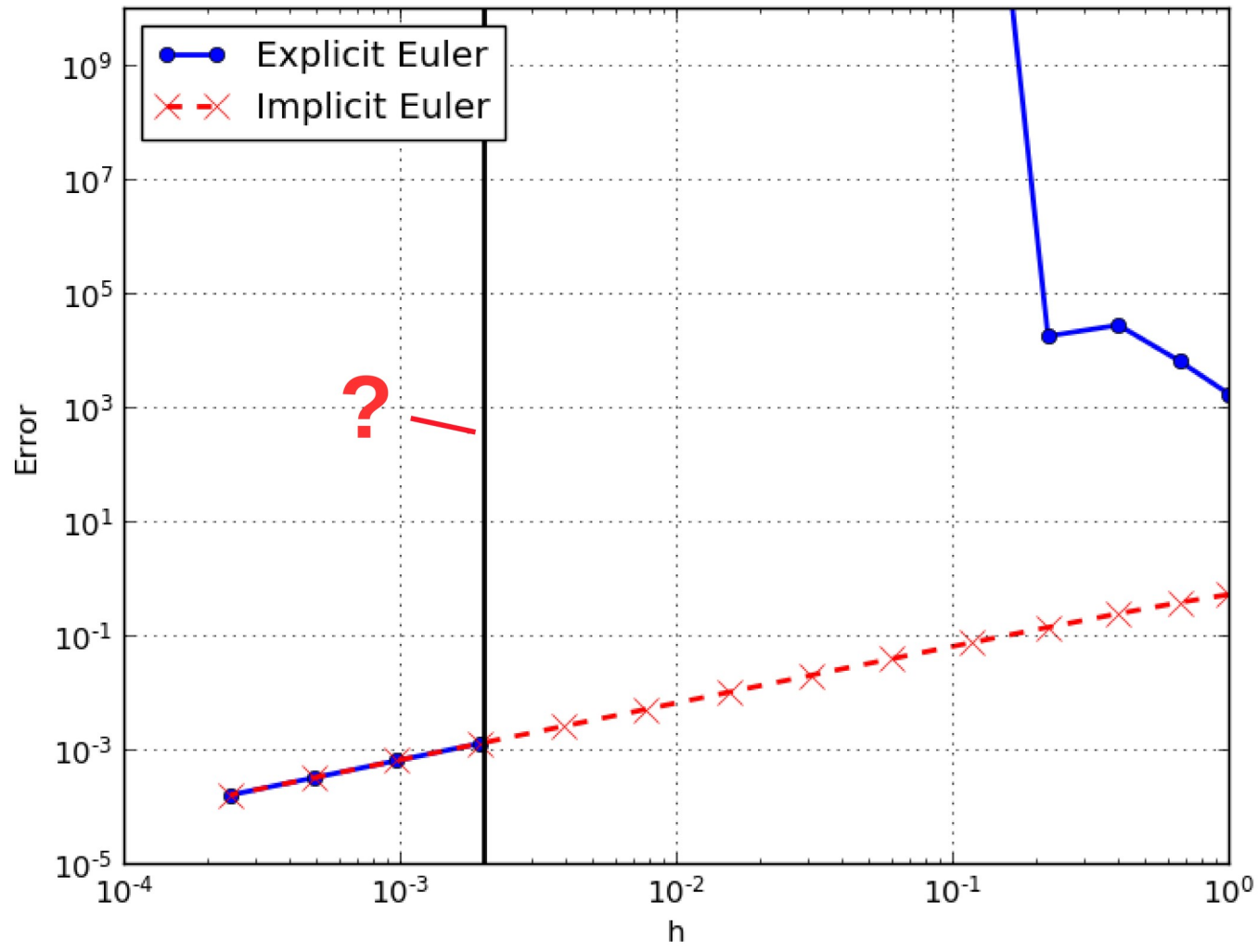
$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Durch einsetzen der AW:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 7e^{-\frac{1}{2}t} - 6e^{-15t} \\ 6e^{-15t} \\ 2e^{-15t} \end{pmatrix}$$

Steifes lineares AWP



Steifes nichtlineares AWP

$$\dot{y}_A = -0.1y_A + 100y_B y_C$$

$$\dot{y}_B = +0.1y_A - 100y_B y_C - 500y_B^2$$

$$\dot{y}_C = +500y_B^2 - 0.5y_C$$

$$y_A(0) = 0.5 \quad y_B(0) = 0.5 \quad y_C(0) = 0.5$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Steifes nichtlineares AWP

$$\dot{y}_A = -0.1y_A + 100y_B y_C$$

$$\dot{y}_B = +0.1y_A - 100y_B y_C - 500y_B^2$$

$$\dot{y}_C = +500y_B^2 - 0.5y_C$$

NICHTLINEAR!!!

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -0.1y_A + 100y_B y_C \\ +0.1y_A - 100y_B y_C - 500y_B^2 \\ +500y_B^2 - 0.5y_C \end{pmatrix}$$

$$y_A(0) = 0.5 \quad y_B(0) = 0.5 \quad y_C(0) = 0.5 \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Steifes nichtlineares AWP

Steif?

Linearisieren wir die rechte Seite der DGL:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -0.1y_A + 100y_B y_C \\ +0.1y_A - 100y_B y_C - 500y_B^2 \\ +500y_B^2 - 0.5y_C \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \approx \mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(t_1, \mathbf{y}_1)}_0 + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t_1, \mathbf{y}_1)}_{/}$$

$$J(t, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -0.1 & 100y_C & 100y_B \\ +0.1 & -1000y_B - 100y_C & -100y_B \\ 0 & 1000y_B & -0.5 \end{pmatrix}$$

Steifes nichtlineares AWP

Lokal Steif?

Linearisieren wir um den AW: $t_0 = 0$ $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

$$J(t_0, \mathbf{y}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} -0.1 & 50 & 50 \\ +0.1 & -550 & -50 \\ 0 & 500 & -0.5 \end{pmatrix}$$

MATLAB: eig \longrightarrow

$$\lambda_1 \approx -5.00 \times 10^2$$

$$\lambda_2 \approx -9.87 \times 10^{-4}$$

$$\lambda_3 \approx -5.07 \times 10^1$$

$$S = \frac{\max_j |\operatorname{Re}(\lambda_j)|}{\min_j |\operatorname{Re}(\lambda_j)|} \approx 5.06 \times 10^5 \quad \mathbf{JA!!!}$$

Zur numerischen Behandlung steifer Probleme
folgern wir aus Bsp. (9) und (10), dass
explizite Verfahren ungeeignet sind.

D.h. ineffizient da die Schrittweite
aus Stabilität- und NICHT
Genauigkeits-Gründen gewählt
werden muss

explizit		implizit
günstig pro Schritt		teuer pro Schritt
Schrittweite limitiert durch schnellste abfallende Komponente		Schrittweite nur durch gewünschte Genauigkeit limitiert