D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Numerische Methoden

FS 2019

Lösung 10

1. *Zu Einfaches adaptives Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren*

a) Siehe `RKF45Simple.m`.

b) Siehe `KonvTestRK.m`. Wir sehen, dass die experimentale Ordnungen für die RK4 und RK5 Verfahren 3.94 und 4.97 sind. Deshalb produzieren beide Verfahren erwartete Konvergenzresultate.

c) Siehe `vanDerPol.m`. In Abb. 1 werden die erhaltene Näherungslösung $y(t)$ (links) und die Schrittweitte h (rechts) gezeigt (erstellt mit `vanDerPol.m`). Die

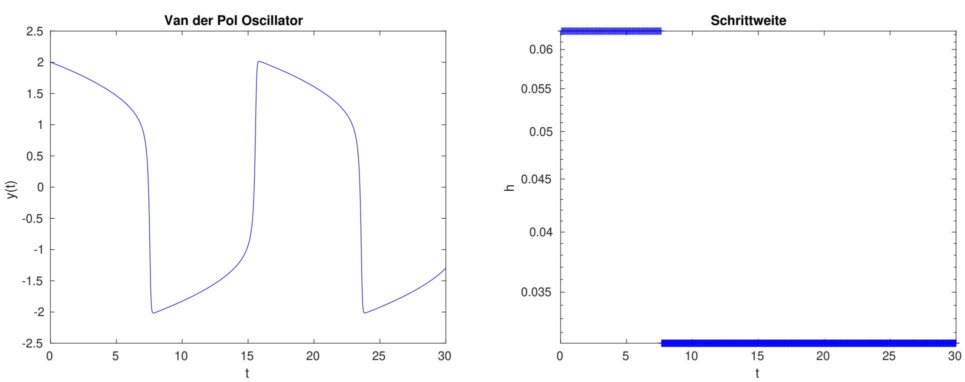

Abbildung 1 – Lösung $y(t)$ links und Schrittweitte h rechts.

Bemerkungen hier sind die gleiche als bei der Aufgabe **1.b)**.

2. *Adaptive Schrittweitensteuerung*

a) Siehe `RKF45.m` und `adaptHeun.m`.

b) In Abb. 2 werden die erhaltene Schrittweitte h für die Heun (links) und RKF45 (rechts) Verfahren gezeigt (erstellt mit `vanDerPol.m`). Wir beobachten, dass wenn die Lösung anfängt stärker zu variieren (bei Zeit $\sim$ 7) reduziert der Algorithmus die Schrittweite sukzessiv. Der Unterschied zwischen diesem Algorithmus und der einfacheren Versionen aus letzter Serie besteht darin, dass wenn

Bitte wenden!

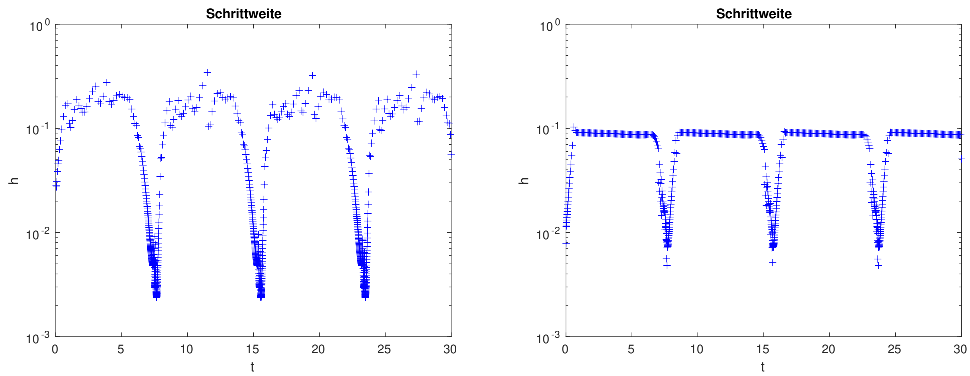

Abbildung 2 – Schrittweitte h für die Heun (links) und RKF45 (rechts) Verfahren.

die Lösung wieder weniger stark variiert wird die Schrittweite wieder vergrössert. Die erhaltene Approximationen sind in diesen Falle nicht schlechter, d.h. sie erfüllen unser lokales Toleranz-Kriterium, aber wir benutzen viel weniger Funktionsauswertungen. Deshalb können wir ähnliche Ergebnisse mit weninger Aufwand erhalten, d.h. wir sind effizienter!

3. *Explizites und Implizites Euler-Verfahren*

a) Für das Problem

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t), \qquad y(t_0) = y_0,$$

ist einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens gegeben durch

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-\lambda y_0) = (1 - h\lambda)y_0.$$

Für das implizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-\lambda y_1) = y_0 - h\lambda y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1 + h\lambda}.$$

Wir bemerken, dass für das implizite Euler-Verfahren eine (lineare) Gleichung gelöst werden muss.

b) Für das Problem

$$\dot{y}(t) = -t(y(t))^2, \qquad y(t_0) = y_0 > 0,$$

ist einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens gegeben durch

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-t_0 y_0^2) = y_0(1 - ht_0 y_0).$$

Siehe nächstes Blatt!

Für das implizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-t_1 y_1^2) = y_0 - ht_1 y_1^2 \\ &\Leftrightarrow ht_1 y_1^2 + y_1 - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4ht_1 y_0}}{2ht_1}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für das implizite Eulerverfahren ist die Lösung nicht eindeutig.

c) Siehe `expEulerlinear.m`, `implEulerlinear.m` und `KonvTestEuler.m`. Wir bemerken, dass für grosse Schrittweiten das explizite Euler-Verfahren "instabil" scheint (die Lösung oszilliert und wächst). Hingegen liefert das implizite Verfahren für jede Schrittweite eine stets abnehmende Lösung (was qualitativ mit der exakten Lösung dieses AWP übereinstimmt).

4. *Mehrschrittverfahren: Das 2-Schrittverfahren von Adams-Bashforth*

a) Für $m = 2$,

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \sum_{k=1}^{2} f_{j+1-k}\, L^2_{j+1-k}(t) \\ &= f_j\, L^2_j(t) + f_{j-1}\, L^2_{j-1}(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{mit } k = 1 \;:\quad L^2_j(t) &= \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{2} \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, \\ \text{mit } k = 2 \;:\quad L^2_{j-1}(t) &= \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{2} \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j}. \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} P_1(t) &= f_j\, \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} + f_{j-1}\, \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j} \\ &= \frac{1}{h}\left(f_j \cdot (t - t_{j-1}) - f_{j-1} \cdot (t - t_j)\right). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Dann

$$\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} P_1(\tau)\, d\tau &= \frac{1}{h}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[f_j \cdot (t - t_{j-1}) - f_{j-1}\cdot(t-t_j)\right]\, d\tau \\
&= \frac{1}{h}\left[f_j \cdot (\frac{\tau^2}{2} - t_{j-1}\,\tau) - f_{j-1}\cdot(\frac{\tau^2}{2} - t_j\,\tau)\right]_{t_j}^{t_{j+1}} \\
&= \frac{1}{h}\left[f_j \cdot \left(\frac{t_{j+1}^2}{2} - \frac{t_j^2}{2} - t_{j-1}\,h\right) - f_{j-1}\cdot\left(\frac{t_{j+1}^2}{2} - \frac{t_j^2}{2} - t_j\,h\right)\right] \\
&= f_j \cdot \frac{1}{h}\left(\frac{(t_{j+1}+t_j)(t_{j+1}-t_j)}{2} - t_{j-1}\,h\right) \\
&\quad - f_{j-1}\cdot\frac{1}{h}\left(\frac{(t_{j+1}+t_j)(t_{j+1}-t_j)}{2} - t_j\,h\right) \\
&= f_j \cdot \frac{1}{h}\left(\frac{t_{j+1}+t_j}{2}\,h - t_{j-1}\,h\right) - f_{j-1}\cdot\frac{1}{h}\left(\frac{t_{j+1}+t_j}{2}\,h - t_j\,h\right) \\
&= f_j \cdot \left(\frac{t_{j-1}+2h+t_{j-1}+h}{2} - t_{j-1}\right) - f_{j-1}\cdot\left(\frac{t_j+h+t_j}{2} - t_j\right) \\
&= f_j \cdot \frac{3h}{2} - f_{j-1}\cdot\frac{h}{2} \\
&= \frac{h}{2}(3f_j - f_{j-1})
\end{aligned}$$

und wir bekommen

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(3f(t_j, y_j) - f(t_{j-1}, y_{j-1})\right).$$

b) Siehe `TwoStepAdamsBashforth.m`

c) Siehe `KonvTestAB2.m`

d) Um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion Φ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_j+h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^p)$$

mittels Taylor-Entwicklungen abschätzen. Hierzu entwickelt man die Lösung und die Verfahrens-Funktion in Potenzen der Schrittweite h

$$\begin{aligned}
\tau_{j+1} = \quad & \left(\dot y(t_j) - \ \Phi(t_j, y(t_j), 0)\right) \\
& + \frac{h}{2}\left(\ddot y(t_j) - 2\dot\Phi(t_j, y(t_j), 0)\right) \\
& + \frac{h^2}{6}\left(\dddot y(t_j) - 3\ddot\Phi(t_j, y(t_j), 0)\right) \\
& + \cdots \\
& + O(h^p).
\end{aligned} \tag{1}$$

Siehe nächstes Blatt!

Um die Konsistenzordnung p zu bestimmen, muss man nun ”einfach” die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

Einerseits benötigen wir die Ableitungen der Lösung, ausgedrückt mit (Ableitungen) der rechten Seite der Diff.-Gl. $f(t, y(t))$:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(t, y(t)) && (2)\\
\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} f(t, y(t))\\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) && (3)\\
\dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(t, y(t))\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))\, f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))\, f(t, y(t))^2\\
&+ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\right)^2 f(t, y(t)). && (4)
\end{aligned}$$

Es empfiehlt sich, diese einfachen (aber durchaus mühsamen) Rechnungen (einmal) selbst durchzurechnen.

Mit der Taylorreihe können wir schreiben

$$y_{j-1} = y_j - h\dot{y}(t_j) + O(h^2).$$

Die Verfahrens-Funktion dieses MehrSchrittverfahren ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi(t, y(t), h) &= \frac{1}{2}\Big(3k_1(t, y(t), h) - k_2(t, y(t), h)\Big),\\
k_1 &= f(t_j, y_j)\\
k_2 &= f(t_j - h, y_j - hk_1).
\end{aligned}$$

Da wir t und damit auch $y(t)$ fest halten, vereinfachen wir die Notation zu

$$\Phi(h) = \frac{1}{2}\Big(3k_1(h) - k_2(h)\Big).$$

Die Entwicklung der ersten Stufe ergibt einfach eine Konstante

$$k_1(h) = f(t, y(t)),$$

da wir ja t festhalten. Für die Entwicklung der zweiten Stufe benötigt man die

Bitte wenden!

zwei-dimensionale Taylor-Entwicklung (siehe Vorlesung):

$$\begin{aligned}
k_2(h) &= f(t-h, y(t) - hk_1(h)) \\
&= f(t, y(t)) \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))h - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))hk_1(h) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t))h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))h^2 k_1(h) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))(hk_1(h))^2 \\
&\quad + O(h^3) \\
&= f(t, y(t)) \\
&\quad - h\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))\right) \\
&\quad + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2\right) \\
&\quad + O(h^3)
\end{aligned}$$

wobei wir nach dem dritten Gleichheitszeichen $k_1(h)$ durch vorherige Gleichung ersetzt haben. Somit ergibt sich die Entwicklung der Verfahrens-Funktion zu

$$\begin{aligned}
\Phi(h) &= \frac{1}{2}\Big(3k_1(h) - k_2(h)\Big) \\
&= \underbrace{f(t, y(t))}_{\Phi(t,y(t),0)} \\
&\quad + h\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))\right)}_{\dot{\Phi}(t,y(t),0)} \\
&\quad + \frac{h^2}{2}\underbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2\right)}_{\ddot{\Phi}(t,y(t),0)} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned} \tag{5}$$

Mit Gl. (2-4) und (5) können wir die Terme in den Klammern von Gl. (1) berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \Phi(y, y(t), 0) \\
\ddot{y}(t) &= 2\dot{\Phi}(y, y(t), 0) \\
\dddot{y}(t) &\neq 3\ddot{\Phi}(y, y(t), 0),
\end{aligned}$$

d.h. der erste und der zweite Klammer-Term in Gl. (1) sind Null und hierraus folgern wir, dass das Adams-Bashforth Verfahren Konsistenzordnung $p = 2$ hat, d.h.

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^2).$$