Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Lösung 11

1. *Fixpunkte*

Der Punkt x ist einen Fixpunkt für die Funktion ϕ falls $\phi(x) = x$. Wir erhalten dann

$$x = \phi(x) = x^3+2x^2-2 \Leftrightarrow 0 = x^3+2x^2-x-2 = (x+2)(x+1)(x-1) \Leftrightarrow x \in \{-2, -1, +1\}.$$

2. *Fixpunktiteration*

a) Für die verschiedene Funktionen haben wir

- $x = \phi_1(x) = e^{-x} \Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.
- $x = \phi_2(x) = \frac{x^2e^x+1}{e^x(x+1)} \Leftrightarrow x^2e^x + xe^x = x(x+1)e^x = x^2e^x + 1 \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.
- $x = \phi_3(x) = x + 1 - xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.

Deshalb sind alle drei Fixpunktfunktionen konsistent mit dem Nullstellenproblem.

b) Siehe `fixpunkt.m`.

c) Siehe `fixpunktproblem.m`. Wir sehen, dass der Algorithmus für ϕ_3 divergiert.

d) Siehe `fixpunktkonvergenz.m`. Wir erhalten für Fixpunktiteration ϕ_1 $C \approx 0.55$ und $p \approx 1$, d.h. die Fixpunktiteration ϕ_1 konvergiert linear.

Wir erhalten für Fixpunktiteration ϕ_2 $C \approx 0.8$ und $p \approx 2$, d.h. die Fixpunktiteration ϕ_2 konvergiert quadratisch.

3. *Newton mehrere Dimensionen*

a) Siehe `newton.m`.

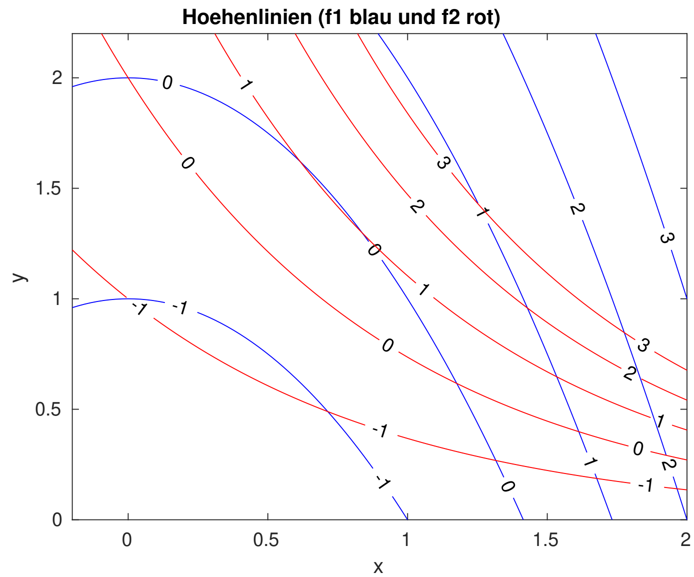

Abbildung 1 – Höhenlinien der Funktion F.

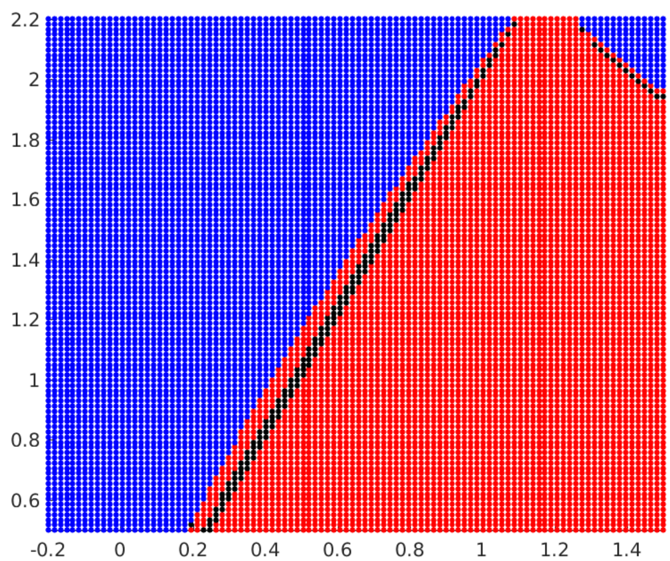

Abbildung 2 – Konvergenz des Newton Verfahrens.

b) In Abbildung 1 zeigen wir die Höhenlinien der Funktion F. Wir sehen, dass die Nullstellen in der Nähe vone $(0, 2)$ und $(1.15, 0.6)$ sind.

Siehe `plotKonvergenznewton2D.m` und Abbildung 2. Wir sehen, dass in der Nähe von (x_i, y_i) , $i = 1, 2$, konvergiert das Verfahren durch (x_i, y_i). Start-

Siehe nächstes Blatt!

werte in der blauen/roten Region konvergieren durch $(x_1, y_1)/(x_2, y_2)$. Aber in der Nähe der Grenze divergiert das Verfahren (schwarze Punkte).

4. *Mehrschrittverfahren: Das 2-Schrittverfahren von Adams-Moulton*

a) Für $m = 2$,

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \sum_{k=0}^{2} f_{j+1-k}\, L^2_{j+1-k}(t) \\ &= f_{j+1}\, L^2_{j+1}(t) + f_j\, L^2_j(t) + f_{j-1}\, L^2_{j-1}(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{mit } k=0: \quad L^2_{j+1}(t) &= \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{2} \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot \frac{t - t_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}}, \\ \text{mit } k=1: \quad L^2_j(t) &= \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{2} \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} \cdot \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, \\ \text{mit } k=2: \quad L^2_{j-1}(t) &= \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{2} \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_{j+1}}{t_{j-1} - t_{j+1}} \cdot \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j}. \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L^2_{j+1}(\tau)\, d\tau &= \frac{1}{2h^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tau - t_j)(\tau - t_{j-1})\, d\tau \\ &= \frac{1}{2h^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\tau^2 - (t_j + t_{j-1})\,\tau + t_j t_{j-1}\right)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{\tau^3}{3} - (t_j + t_{j-1})\frac{\tau^2}{2} + t_j t_{j-1}\tau\right]_{t_j}^{t_{j+1}} \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{t^3_{j+1} - t^3_j}{3} - (t_j + t_{j-1})\frac{t^2_{j+1} - t^2_j}{2} + t_j t_{j-1}(t_{j+1} - t_j)\right] \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{(t_{j+1} - t_j)}{3}(t^2_{j+1} + t_{j+1}t_j + t^2_j) - (t_j + t_{j-1})\frac{t_{j+1} + t_j}{2}h + t_j t_{j-1} h\right] \\ &= \frac{1}{12h} \left[2(t^2_{j+1} + t_{j+1}t_j + t^2_j) - 3(t_j + t_{j-1})(t_{j+1} + t_j) + 6t_j t_{j-1}\right] \\ &= \frac{1}{12h} \left[2((t_j + h)^2 + t_j(t_j + h) + t^2_j) - 3(2t_j - h)(2t_j + h) + 6t_j(t_j - h)\right] \\ &= \frac{1}{12h} \left[2(3t^2_j + 3t_j h + h^2) - 3(4t^2_j - h^2) + 6(t^2_j - t_j\, h)\right] \\ &= \frac{5}{12}h \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_j^2(\tau)\, d\tau &= -\frac{1}{h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tau - t_{j+1})(\tau - t_{j-1})\, d\tau \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\tau^2 - (t_{j-1} + t_{j+1})\,\tau + t_{j-1}t_{j+1}\right)\, d\tau \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{\tau^3}{3} - (t_{j-1} + t_{j+1})\frac{\tau^2}{2} + t_{j-1}t_{j+1}\tau\right]_{t_j}^{t_{j+1}} \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{t_{j+1}^3 - t_j^3}{3} - (t_{j-1} + t_{j+1})\frac{t_{j+1}^2 - t_j^2}{2} + t_{j-1}t_{j+1}(t_{j+1} - t_j)\right] \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{(t_{j+1} - t_j)}{3}(t_{j+1}^2 + t_{j+1}t_j + t_j^2) - (t_{j-1} + t_{j+1})\frac{t_{j+1} + t_j}{2}h + t_{j-1}t_{j+1}h\right] \\
&= -\frac{1}{6h}\left[2(t_{j+1}^2 + t_{j+1}t_j + t_j^2) - 3(t_{j-1} + t_{j+1})(t_{j+1} + t_j) + 6t_{j-1}t_{j+1}\right] \\
&= -\frac{1}{6h}\left[2((t_j + h)^2 + t_j(t_j + h) + t_j^2) - 3(2t_j)(2t_j + h) + 6(t_j - h)(t_j + h)\right] \\
&= -\frac{1}{6h}\left[2(3t_j^2 + 3t_jh + h^2) - 3(4t_j^2 + 2t_jh) + 6(t_j^2 - h^2)\right] \\
&= \frac{2}{3}h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{j-1}^2(\tau)\, d\tau &= -\frac{1}{h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tau - t_{j+1})(\tau - t_j)\, d\tau \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\tau^2 - (t_j + t_{j+1})\,\tau + t_jt_{j+1}\right)\, d\tau \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{\tau^3}{3} - (t_j + t_{j+1})\frac{\tau^2}{2} + t_jt_{j+1}\tau\right]_{t_j}^{t_{j+1}} \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{t_{j+1}^3 - t_j^3}{3} - (t_j + t_{j+1})\frac{t_{j+1}^2 - t_j^2}{2} + t_jt_{j+1}(t_{j+1} - t_j)\right] \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{(t_{j+1} - t_j)}{3}(t_{j+1}^2 + t_{j+1}t_j + t_j^2) - (t_j + t_{j+1})\frac{t_{j+1} + t_j}{2}h + t_jt_{j+1}h\right] \\
&= -\frac{1}{6h}\left[2(t_{j+1}^2 + t_{j+1}t_j + t_j^2) - 3(t_j + t_{j+1})(t_{j+1} + t_j) + 6t_jt_{j+1}\right] \\
&= -\frac{1}{6h}\left[2((t_j + h)^2 + t_j(t_j + h) + t_j^2) - 3(2t_j + h)(2t_j + h) + 6(t_j)(t_j + h)\right] \\
&= -\frac{1}{6h}\left[2(3t_j^2 + 3t_jh + h^2) - 3(4t_j^2 + 4t_jh + h^2) + 6(t_j^2 + t_jh)\right] \\
&= -\frac{1}{12}h
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann und wir bekommen

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} \left(5f(t_{j+1}, y_{j+1}) + 8f(t_j, y_j) - f(t_{j-1}, y_{j-1}) \right).$$

b) Siehe `TwoStepAdamsMoulton.m`

c) Siehe `KonvTestAM2.m`