D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Lösung 2

1. **a)** In the given quadrature formula, the 3 quadrature weights are unknown. To determine these 3 degrees of freedom, we need 3 equations. We obtain these from the definition of **degree of accuracy (Genauigkeitsgrad)** of a quadrature formula, see lecture notes *Kap01_Notizen.pdf, page 15*. We also note that $I[f]$ and $Q[f]$ are **linear**. Therefore, we test the given quadrature formula for exact integration with respect to monomials $1, x, x^2$:

$$Q[1] = \alpha + \beta + \gamma \qquad = I[1] = 1, \tag{1a}$$

$$Q[x] = \frac{\beta}{2} + \gamma \qquad = I[x] = \frac{1}{2}, \tag{1b}$$

$$Q[x^2] = \frac{\beta}{4} + \gamma \qquad = I[x^2] = \frac{1}{3}. \tag{1c}$$

Now, we solve this linear system of equations (1). Subtracting (1c) from (1b),

$$\frac{\beta}{4} = 1/6 \qquad \Longrightarrow \beta = \frac{4}{6}.$$

Using the value of β in (1b), we get

$$\gamma = \frac{1}{6}.$$

Then, substituting values of β and γ in (1a),

$$\alpha = \frac{1}{6}.$$

b) We want to approximate the integral $I_{[a,b]}[f] := \int_a^b f(x)dx$. If we can find an equivalent integral $I_{[a,b]}[f] = I_{[0,1]}[\tilde{f}] := \int_0^1 \tilde{f}(\xi)d\xi$, then we can use the given quadrature formula $Q[\tilde{f}]$ to approximate $I_{[a,b]}[f]$. We use the transformation

$$x = a + (b-a)\xi, \quad \forall \xi \in [0,1].$$

One can verify that at $\xi = 0$, $x = a$ and at $\xi = 1$, $x = b$.

Therefore, we get:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\xi} = (b-a), \\
\implies\ & I_{[a,b]}[f] = \int_0^1 (b-a)\cdot f(a+(b-a)\xi)d\xi \\
&\qquad = \int_0^1 \tilde{f}(\xi)d\xi \quad [\text{define } \tilde{f}(\xi) = (b-a)\cdot f(a+(b-a)\xi)], \\
&\qquad = I_{[0,1]}[\tilde{f}].
\end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}
I_{[a,b]}[f] &\approx Q[\tilde{f}] \\
&= \frac{1}{6}(\tilde{f}(0) + 4\tilde{f}(1/2) + \tilde{f}(1)) \\
&= \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)).
\end{aligned}$$

This we know is the **Simpson rule**.

2. a) In the given quadrature formula, the quadrature nodes and weights are unknown. To determine these degrees of freedom such that the **degree of accuracy (Genauigkeitsgrad)** $q = 3$, we test the given quadrature formula for exact integration with respect to monomials x^j, for $j = 0, 1, \ldots, q$,

$$Q[1] = 2(\omega_0 + \omega_1) = I[1] = 2, \tag{2a}$$
$$Q[x] = 2(\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1) = I[x] = 0, \tag{2b}$$
$$Q[x^2] = 2(\omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2) = I[x^2] = \frac{2}{3}, \tag{2c}$$
$$Q[x^3] = 2(\omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3) = I[x^3] = 0. \tag{2d}$$

From (2a),

$$\omega_1 = 1 - \omega_0.$$

Using this in (2b),

$$x_1 = -\omega_0 x_0/(1-\omega_0).$$

Then from (2d),

$$\begin{aligned}
\omega_0 x_0^3 &= -\omega_1 x_1^3 \\
&= -(1-\omega_0)\left(-\frac{\omega_0 x_0}{1-\omega_0}\right)^3 \\
&= \frac{\omega_0^3 x_0^3}{(1-\omega_0)^2}, \\
\rightsquigarrow \quad \omega_0 &= 1/2.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\Longrightarrow \omega_1 = 1/2, \quad x_1 = -x_0$$

Finally, using the above information in (2c) yields

$$x_0 = \mp 1/\sqrt{3}, \;\; x_1 = \pm 1/\sqrt{3}.$$

and

$$Q[f] = f(-1/\sqrt{3}) + f(+1/\sqrt{3})$$

b) We proceed similar to the solution of 1b). Here, the tranformation will be

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi, \quad \forall \xi \in [-1,1].$$

One can verify that at $\xi = -1$, $x = a$ and at $\xi = 1$, $x = b$.

Therefore, we get:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\xi} &= \frac{b-a}{2}, \\
\Longrightarrow I_{[a,b]}[f] &= \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right) d\xi \\
&= \int_{-1}^{1} \tilde{f}(\xi) d\xi \quad [\text{define } \tilde{f}(\xi) = \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)], \\
&= I_{[-1,1]}[\tilde{f}].
\end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}
I_{[a,b]}[f] &\approx Q[\tilde{f}] \\
&= \tilde{f}(-1/\sqrt{3}) + \tilde{f}(+1/\sqrt{3}) \\
&= \frac{b-a}{2}\{f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}b\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}b\right)\}.
\end{aligned}$$

3. **a)** Siehe das m-file `summtrapezregel`.

b) Siehe das m-file `summsimpsonregel`.

c) Siehe das m-file `summ2punktgauss`.

d) Siehe das m-file `summbestimmeordnung`

Bitte wenden!

e) Gegeben sei eine summierte Quadraturregel (SQR) Q^N basierend auf einer Quadraturregel (QR) der Ordnung s (d.h. einen Genauigkeitsgrad $q = s - 1$). In der Vorlesung haben wir gesehen, dass falls der Integrand f glatt genug ist, konvergiert die SQR mit Ordnung s, d.h.

$$E^N(f) := \left|I[f] - Q^N[f]\right| \leq \frac{\|f^{(s)}\|_\infty}{s!}(b-a)h^s.$$

In unserem Fall besitzt die Trapezregel die Ordnung 2.

Wir sehen, dass f_1 und f_3 glatt genug sind, d.h. $f_1, f_3 \in C^2(a,b)$ und wir beobachten für beide Funktionen die erwartete quadratische Konvergenz. Die Funktion f_2 ist nicht $C^2(a,b)$ aber wir sehen trotzdem eine beschränkte Konvergenzordnung (≈ 1.5).

Die beobachtete Konvergenzordnung für die in `f_4.p` definierte Funktion ist 10.87. Diese verbesserte Konvergenz ist eine Konsequenz der Perriodizität von der Funktion f_4. Tatsächlich kann man für periodische glatten Funktionen exponentielle Konvergenz zeigen.

In der folgenden Tabelle, zeigen wir die beobachtete Konvergenzordnungen für die verschiedenen Funktionen und Verfahren. In der zweiten Zeile steht die erwartete Konvergordnung.

	Summ. Trapezregel	Summ. Simpsonregel	Summ. 2 P. Gauss
	2	4	4
f_1	2.00	4.00	4.00
f_2	1.46	1.50	1.50
f_3	2.00	3.43	3.43
f_4	10.87	Inf	10.25

f) Auf jedem Intervall wertet die Trapezregel die Funktion zweimal aus. Wir können es jedoch besser machen. Da die Quadraturegel nur die Endpunkte benutzt, können wir die inneren Gitterpunkte nur einmal auswerten. Wir erhalten dann $(N-1) + 2 = N + 1$ Funktionsauswertungen für die summierte Trapezregel.

Für die summierte 2 Punkte Gauss Quadraturformel gibt es auch 2 Punkte in jedem Intervall aber in dieser Situation können wir nichts verbessern und wir erhalten $2N$.

Die summierte Simpsonregel benutzt 3 punkte in jedem Intervall aber die Situation ist ähnlich wie bei der Trapezregel. Nur die Mittelpunkte (in jedem Intervall) können nicht zweimal benutzt werden. In diesem Fall erhalten wir dann $(N+1) + N = 2N + 1$ Funktionsauswertungen.