

Lösung 4

1. For $x = \tan(s)$, we have

$$\frac{dx}{ds} = \sec^2(s).$$

Thus, we can write

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4) dx = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \exp(-\tan^4(s)) \sec^2(s) ds.$$

2. Wir erhalten die Plots in Abb. 1. In (v) nimmt die Funktion an den verwendeten Knoten zur Berechnung des Fehler-Schätzers denselben Wert an (Null). Der Fehler-Schätzer registriert also einen Fehler von Null und endet mit dem falschen Result $Q = 0$. Durch das aufteilen des Integrals in (vi) liefert der Fehler-Schätzer wieder brauchbare Resultate und die adaptive Quadratur funktioniert. Obwohl die Beispiele (v) und (vi) (sehr!) künstlich erscheinen, sollen sie uns zeigen, dass adaptive Quadratur nicht Totsicher ist!

3. a) In der Vorlesung haben wir den folgenden Trick gesehen

$$E^1[f] = |Q_1[f] - Q_1^2[f] + Q_1^2[f] - I[f]| \leq |Q_1^2[f] - Q_1[f]| + |Q_1^2[f] - I[f]|.$$

Mit $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]| \approx \frac{E^1[f]}{2^s}$, erhalten wir

$$E^1[f] \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \approx |Q_1[f] - Q_1^2[f]| \Leftrightarrow E^1[f] \approx \left(\frac{2^s}{2^s - 1}\right) |Q_1[f] - Q_1^2[f]|.$$

Dann haben wir für $E^2[f]$

$$E^2[f] \approx \frac{E^1[f]}{2^s} \approx \left(\frac{1}{2^s - 1}\right) |Q_1[f] - Q_1^2[f]|.$$

Da die Trapezregel die Ordnung $s = 2$ besitzt, ist der Fehler-Schätzer für $E^2[f]$ gegeben durch

$$E^2[f] \approx \frac{|Q_1[f] - Q_1^2[f]|}{3}.$$

Bitte wenden!

- b) Siehe `adapttrapez_simple.m`.
- c) Die Implementierung `adapttrapez_simple.m` besitzt folgende zwei Haupt-Schwächen:
- Die Rekursion könnte unendlich lang weiter gehen
 - Die Funktionsauswertungen werden immer von neuem berechnet

4. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Die Lösungen finden Sie in den kommentierten `potential.m` und `trapez2D.m`.

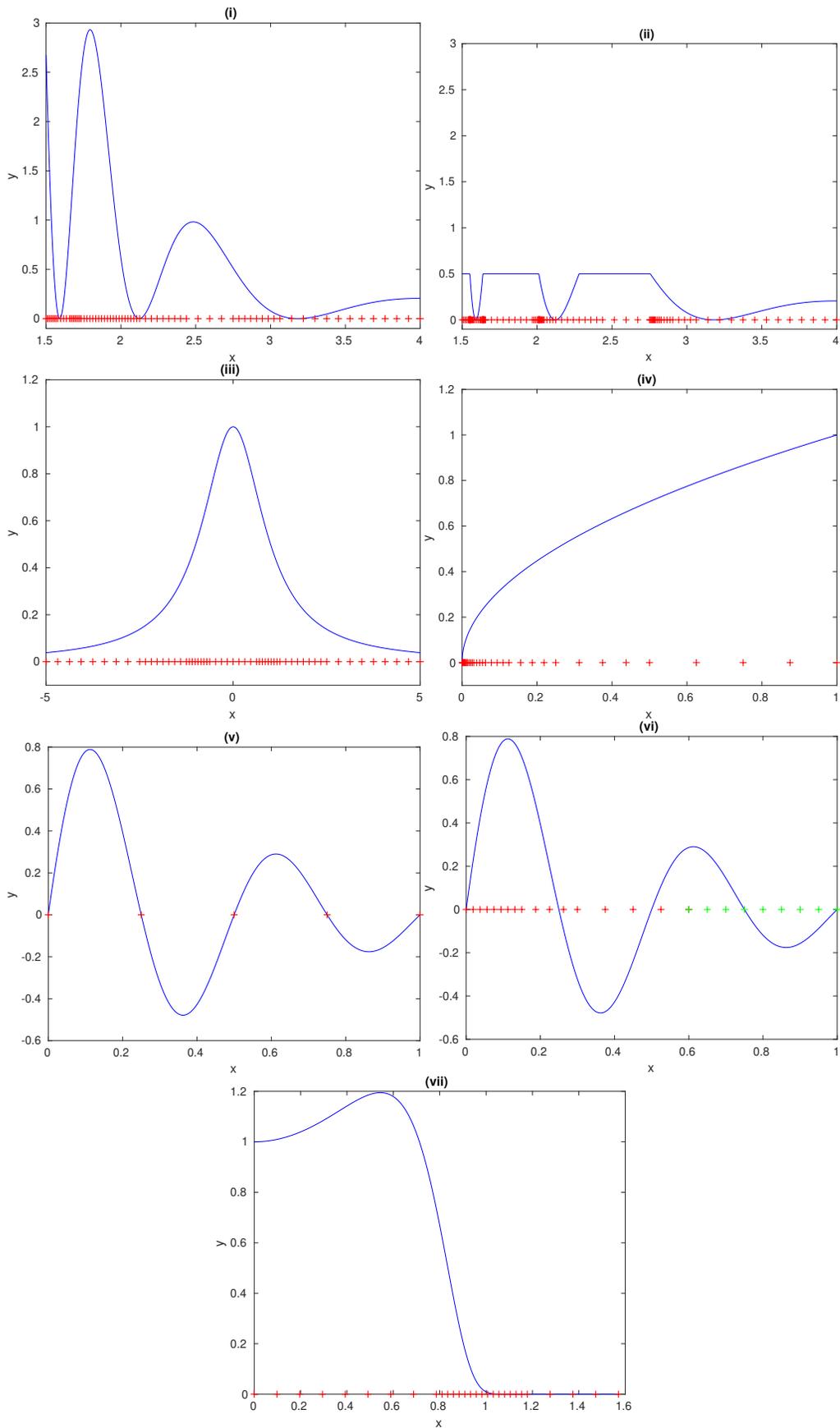


Abbildung 1 – Plots zur adaptiven Simpson Quadratur.