

Lösung 7

1. a) Wir haben

$$\begin{aligned}I[1] &= \int_0^1 1 dx = 1, \\I[x] &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \\I[x^2] &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

und für die Quadraturformel $Q[g]$

$$\begin{aligned}Q[1] &= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \Rightarrow \checkmark \\Q[x] &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \checkmark \\Q[x^2] &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) = \frac{5}{16} \Rightarrow \times\end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität der Regel folgt dann aus der Exaktheit für die Monome 1 und x , dass die Regel auch exakt ist für allgemeine lineare Polynome $\alpha_0 + \alpha_1 x$.

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Durch Integration erhalten wir

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) ds.$$

Wir wenden dann unsere Quadraturformel auf das Integral für $t_1 = t_0 + h$ an und erhalten

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) ds \approx \frac{h}{2} \left(f \left(t_0 + \frac{h}{4}, y \left(t_0 + \frac{h}{4} \right) \right) + f \left(t_0 + \frac{3h}{4}, y \left(t_0 + \frac{3h}{4} \right) \right) \right).$$

Bitte wenden!

Wir approximieren $y(t_0 + \frac{h}{4})$ und $y(t_0 + \frac{3h}{4})$ mithilfe des expliziten Eulerverfahrens

$$y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right) \approx y_0 + \frac{h}{4}f(t_0, y_0),$$

$$y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right) \approx y_0 + \frac{3h}{4}f(t_0, y_0),$$

und erhalten

$$\begin{cases} k_1 := f(t_0, y_0), \\ k_2 := f\left(t_0 + \frac{h}{4}, y_0 + \frac{h}{4}k_1\right), \\ k_3 := f\left(t_0 + \frac{3h}{4}, y_0 + \frac{3h}{4}k_1\right), \\ y_1 := y_0 + \frac{h}{2}(k_2 + k_3). \end{cases}$$

- c) Siehe quadraturRK.m und konvergenzRK.m. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $1.99 \approx 2$.

2. Butcher-Tableaux

- a) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie oben links in Abb. 1 skizziert aus.

- b) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \hline & & & \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie oben rechts in Abb. 1 skizziert aus.

- c) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{2}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \hline & & & \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie unten links in Abb. 1 skizziert aus.

Siehe nächstes Blatt!

d) Das Verfahren ist implizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie unten rechts in Abb. 1 skizziert aus. In der Literatur ist es bekannt als das *implizite Mittelpunkts-Verfahren*.

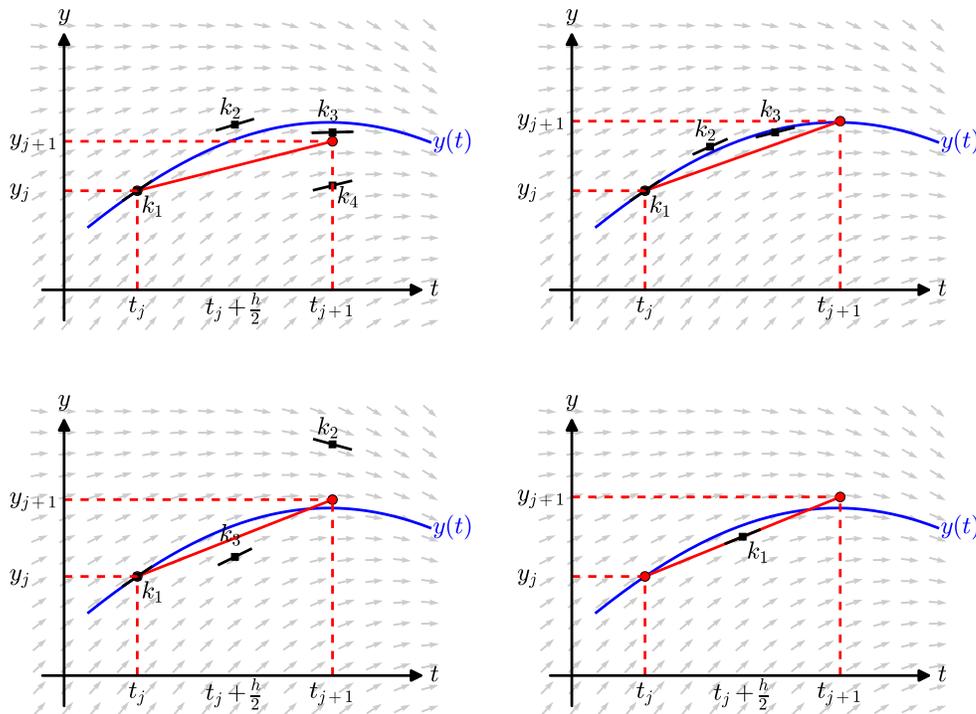


Abbildung 1 – Skizze der Verfahren im Richtungsfeld.

3. a) Ein Schritt des Verfahrens ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

b) Siehe klassische RK.m.

Bitte wenden!

c) Siehe `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $3.98 \approx 4$.

4. Siehe `lokglobFehler_linear.m`. Die lokale und globale Konvergenzordnungen für das Verfahren basierend auf der Quadraturregel sind 3.02 beziehungsweise 1.99. Für die klassische RK Methode haben wir 5.01 und 3.97 für die Ordnung des lokalen und globalen Diskretisierungsfehlers. Wir beobachten dann, dass die Ordnung des Einschritt-Fehlers um eins größer ist als die Ordnung des globalen Fehlers.

5. a) Wir haben

$$\begin{aligned}
 -2ty^2 &= -2(t_j + h) (y_j + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \dots)^2 \\
 &= -2(t_j + h) (y_j^2 + 2c_1y_jh + (c_1^2 + 2c_2y_j)h^2 + (2c_1c_2 + 2c_3y_j)h^3 + \dots) \\
 &= \underbrace{(-2t_jy_j^2)}_{c_1} + \underbrace{(-2y_j^2 - 4c_1t_jy_j)}_{2c_2} h + \underbrace{(-4c_1y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2y_j))}_{3c_3} h^2 \\
 &\quad + \underbrace{(-2(c_1^2 + 2c_2y_j) - 4t_j(c_1c_2 + c_3y_j))}_{4c_4} h^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$c_1 = -2t_jy_j^2$$

$$c_2 = -y_j^2 - 2c_1t_jy_j$$

$$c_3 = \frac{1}{3} (-4c_1y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2y_j))$$

$$c_4 = -\left(\frac{c_1^2}{2} + c_2y_j + t_j(c_1c_2 + c_3y_j)\right)$$

b) Siehe `run_taylorreihenmethode.m` und `taylorreihenmethode.m`.