Lösung 8

1. *Konsistenzordnung*

Im folgenden betrachten wir das skalare Anfangswert-Problem (AWP) erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f(t, y(t))\\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

und bezeichnen mit der "rechten Seite" die Funktion $f(t, y(t))$. Weiter setzen wir stillschweigend voraus, dass die rechte Seite genügend oft stetig differenzierbar ist (damit die kommenden Entwicklungen Sinn machen!).

Um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion $\varPhi$ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \varPhi(t_j, y(t_j), h) = O(h^p)$$

mittels Taylor-Entwicklungen abschätzen. Hierzu entwickelt man die Lösung und die Verfahrens-Funktion in Potenzen der Schrittweite h

$$\begin{aligned}\tau_{j+1} = \quad & \Big(\dot{y}(t_j) - \quad \varPhi(t_j, y(t_j), 0)\Big)\\ &+ \frac{h}{2}\Big(\ddot{y}(t_j) - 2\dot{\varPhi}(t_j, y(t_j), 0)\Big)\\ &+ \frac{h^2}{6}\Big(\dddot{y}(t_j) - 3\ddot{\varPhi}(t_j, y(t_j), 0)\Big)\\ &+ \cdots\\ &+ O(h^p).\end{aligned} \tag{1}$$

Um die Konsistenzordnung p zu bestimmen, muss man nun "einfach" die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

Einerseits benötigen wir die Ableitungen der Lösung, ausgedrückt mit (Ableitungen) der rechten Seite der Diff.-Gl. $f(t, y(t))$:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t))\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))\, f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))\, f(t, y(t))^2 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\right)^2 f(t, y(t)).\end{aligned} \tag{4}$$

Es empfiehlt sich, diese einfachen (aber durchaus mühsamen) Rechnungen (einmal) selbst durchzurechnen.

Anderseits brauchen wir die Ableitungen der Verfahrens-Funktion welche wir als Funktion der Schrittweite h auffassen, d.h. $\Phi = \Phi(h)$ wobei t und damit auch $y(t)$ fest gehalten werden. Zunächst schreiben wir also das Verfahren von Heun in Stufen-Form

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y_j) \\ k_2 &= f(t_j + h, y_j + hk_1) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).\end{aligned}$$

Die Verfahrens-Funktion dieses ESV ist damit gegeben durch

$$\Phi(t, y(t), h) = \frac{1}{2}\Big(k_1(t, y(t), h) + k_2(t, y(t), h)\Big).$$

Da wir t und damit auch $y(t)$ fest halten, vereinfachen wir die Notation zu

$$\Phi(h) = \frac{1}{2}\Big(k_1(h) + k_2(h)\Big).$$

Die Entwicklung der ersten Stufe ergibt einfach eine Konstante

$$k_1(h) = f(t, y(t)),$$

da wir ja t festhalten. Für die Entwicklung der zweiten Stufe benötigt man die zwei-

Siehe nächstes Blatt!

dimensionale Taylor-Entwicklung (siehe Vorlesung):

$$
\begin{aligned}
k_2(h) &= f(t+h, y(t) + hk_1(h)) \\
&= f(t, y(t)) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))h + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))hk_1(h) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t))h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))h^2 k_1(h) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))(hk_1(h))^2 \\
&+ \cdots \\
&= f(t, y(t)) \\
&+ h\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))\right) \\
&+ \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2\right) \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

wobei wir nach dem dritten Gleichheitszeichen $k_1(h)$ durch vorherige Gleichung ersetzt haben. Somit ergibt sich die Entwicklung der Verfahrens-Funktion zu

$$
\begin{aligned}
\Phi(h) &= \frac{1}{2}\Big(k_1(h) + k_2(h)\Big) \\
&= \underbrace{f(t, y(t))}_{\Phi(t, y(t), 0)} \\
&+ h\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))\right)}_{\dot{\Phi}(t, y(t), 0)} \\
&+ \frac{h^2}{2}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2\right)}_{\ddot{\Phi}(t, y(t), 0)} \\
&+ \cdots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Mit Gl. (2-4) und (5) können wir die Terme in den Klammern von Gl. (10) berechnen. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \Phi(y, y(t), 0) \\
\ddot{y}(t) &= 2\dot{\Phi}(y, y(t), 0) \\
\dddot{y}(t) &\neq 3\ddot{\Phi}(y, y(t), 0),
\end{aligned}
$$

d.h. der erste und der zweite Klammer-Term in Gl. (10) sind Null und hierraus folgern wir, dass das Verfahren von Heun Konsistenzordnung $p = 2$ hat, d.h.

$$
\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^2).
$$

Bitte wenden!

2. **a)** Wir müssen einfach die Bedingung überprüfen:

(i) Das klassische Runge-Kutta Verfahren ist autonomisierungsinvariant:

$$0 = c_1 = \sum_{l=1}^{4} a_{1l} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \qquad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} = c_2 = \sum_{l=1}^{4} a_{2l} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} = c_3 = \sum_{l=1}^{4} a_{3l} = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

$$1 = c_4 = \sum_{l=1}^{4} a_{4l} = 0 + 0 + 1 + 0 = 1 \qquad \checkmark$$

(ii) Die verbesserte Polygonzug-Methode von Euler ist autonomisierungsinvariant:

$$0 = c_1 = \sum_{l=1}^{2} a_{1l} = 0 + 0 = 0 \qquad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} = c_2 = \sum_{l=1}^{2} a_{2l} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

(iii) Das 2-Stufen Oliver Verfahren ist **nicht** autonomisierungsinvariant:

$$\frac{1}{3} = c_1 \neq \sum_{l=1}^{2} a_{1l} = 0 + 0 = 0 \qquad ✗$$

$$\frac{5}{9} = c_2 \neq \sum_{l=1}^{2} a_{2l} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} \qquad ✗$$

(iv) Die SDIRK Methode dritter Ordnung ist autonomisierungsinvariant:

$$\gamma = c_1 = \sum_{l=1}^{2} a_{1l} = \gamma + 0 = \gamma \qquad \checkmark$$

$$1 - \gamma = c_2 = \sum_{l=1}^{2} a_{2l} = (1 - 2\gamma) + \gamma = 1 - \gamma \qquad \checkmark$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Wenn ein Verfahren autonomisierungsinvariant ist, dann vereinfacht sich die Bestimmung der Konsistenzordnung dadurch, dass man "nur" das autonome AWP

$$\begin{aligned} \dot y(t) &= f(y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

zu betrachten braucht. D.h. man kann sich die mühsamen partiellen Ableitungen nach der Zeit in den Rechnungen schencken!

Konkret ergibt sich für die Ableitungen der Lösung

$$\begin{aligned} \dot y(t) &= f(y(t)) && (6)\\ \ddot y(t) &= \frac{d}{dt} f(y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) f(y(t)) && (7)\\ \dddot y(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(y(t)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))\, f(y(t))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\right)^2 f(y(t)) && (8) \end{aligned}$$

und für die Entwicklung der Verfahrens-Funktion

$$\begin{aligned} \Phi(h) = &\underbrace{f(y(t))}_{\Phi(y(t),0)} \\ &+ h \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) f(y(t))\right)}_{\dot\Phi(y(t),0)} \\ &+ \frac{h^2}{2} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t)) f(y(t))^2\right)}_{\ddot\Phi(y(t),0)} \\ &+ \cdots \end{aligned} \qquad (9)$$

Es ist offensichtlich, dass diese Ausdrücke wesentlich einfacher sind verglichen mit denen in Aufgabe 1! Die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun $p = 2$ ist natürlich identisch zum Resultat von Aufage 1.

Fazit: Man überprüfe zuerst ob ein Verfahren autonomisierungsinvariant (denn falls ja vereinfachen sich die Rechnungen massiv!).

3. *Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung*

Bitte wenden!

a) Das Verfahren ist durch

$$\begin{aligned} k_1 =& f(t_n, y_n), \\ k_2 =& f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1), \\ y_{n+1} =& y_n + \frac{1}{4}h(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

definiert.

b) Wie wir in Aufgabe 2 der Serie 8 gesehen haben, vereinfacht sich die Bestimmung der Konsistenzordnung erheblich bei einem autonomisierungsinvarianten Verfahren.

Schritt 1: Wir überprüfen zunächst, ob die Methode autonomisierungsinvariant ist

$$\begin{array}{lll} c_1 = 0 & \text{und} \quad \sum_{j=1}^{2} a_{1j} = 0 + 0 = 0 & \checkmark \\ c_2 = \frac{2}{3} & \text{und} \quad \sum_{j=1}^{2} a_{2j} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} & \checkmark \end{array}$$

Schritt 2: Wie erklärt in Serie 8, um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion Φ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned} \tau_{j+1} = & \quad \Big(\dot{y}(t_j) - \quad \Phi(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \frac{h}{2}\Big(\ddot{y}(t_j) - 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \frac{h^2}{6}\Big(\dddot{y}(t_j) - 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \cdots \\ & + O(h^p) \end{aligned} \tag{10}$$

berechnen und die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

In unserem Fall ist die Verfahrens-Funktion definiert durch

$$\Phi(h) = \Phi(t_j, y(t_j), h) := \frac{1}{4}\left(f\left(y\left(t_j\right)\right) + 3f\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right)\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

Nun berechnen wir die Terme in der Φ Entwicklung und

$$\dot{\Phi}(h) = \frac{1}{2} f(y(t_j)) \frac{\partial f}{\partial y} \left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3} h f\left(y\left(t_j\right)\right) \right),$$
$$\ddot{\Phi}(h) = \frac{1}{3} \left(f(y(t_j))\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3} h f\left(y\left(t_j\right)\right) \right).$$

Für die Ableitungen der Lösung haben wir

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(y(t)) \\
\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} f(y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) f(y(t)) \\
\dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(y(t)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))\, f(y(t))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\right)^2 f(y(t)).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich

$$\begin{aligned}
\Phi(t_j, y(t_j), 0) &= \dot{y}(t_j), \\
2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &= \ddot{y}(t_j), \\
3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &\neq \dddot{y}(t_j),
\end{aligned}$$

ergibt sich dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

c) Es folgt von Satz II.3, dass das Verfahren Konvergenzordnung 2 hat.