Dr. R. Käppeli
P. Bansal

# Serie 11

**1.** *Fixpunkte*

Geben Sie alle Fixpunkte der Fixpunktfunktion $\phi(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ an.

**2.** *Fixpunktiteration und Konvergenz*

Wir betrachten das Nullstellenproblem

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ und die Fixpunktiterationen

$$x^{(k+1)} = \phi_i(x^{(k)}) \quad , i = 1, 2, 3$$

mit den folgenden drei Fixpunktfunktionen

- $\phi_1(x) = e^{-x}$
- $\phi_2(x) = \frac{x^2e^x+1}{e^x(x+1)}$
- $\phi_3(x) = x + 1 - xe^x$.

**a)** Zeigen Sie für $\phi_i$ ($i = 1, 2, 3$), dass das Fixpunktproblem konsistent mit dem Nullstellenproblem ist.

**b)** Schreiben Sie eine MATLAB Funktion

```
x = fixpunkt(phi,x0,maxitr,atol,rtol)
```

welche eine Fixpunktiteration zu gegebener Fixpunktfunktion `phi` implementiert. Weiter sind `x0` ein Startwert, d.h. $x^{(0)}$, `maxitr` die maximale Anzahl von Iterationen und `atol` und `rtol` gegebene absolute und relative tolerance für das Abbruchkriterium (ABK3) aus der Vorlesung (Kap. 4, Seite 6):

$$\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*| \leq \texttt{atol} + \texttt{rtol}|x^{(k)}|$$

Als Referenzlösung $x^*$ können Sie die letzte Iteration, d.h. wenn das Abbruchkriterium erfüllt ist, des Algorithmus benutzen. Die Funktion soll im Vektor `x` alle Glieder $x^{(k)}$ zurückgeben.

**Bitte wenden!**

**c)** Wenden Sie die `fixpunkt.m` Funktion auf die Fixpunktfunktionen $\phi$ von **a)** an. Benutzen Sie $x_0 = 0$, `maxitr`$= 1000$, `atol=1e-10` und `rtol=1e-8`. Was beobachten Sie?

**d)** Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Konvergenzordnung $p$ und die Konvergenrate $C$ obiger Fixpunktiteration $\phi_1$ und $\phi_2$ mit Startwert $x_0 = 1$, `maxitr`$= 1000$, `atol=1e-10` und `rtol=1e-8` berechnet.

*Hinweis*: Für den Fehler der $k$-ten Iteration $\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$, kann man die Konvergenzordnung und den Konvergenzrate durch

$$p = \frac{\log(\epsilon^{(k+1)}) - \log(\epsilon^{(k)})}{\log(\epsilon^{(k)}) - \log(\epsilon^{(k-1)})}, \qquad C = \frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^p}$$

bestimmen.

**3.** *Newton Verfahren in mehreren Dimensionen*

In mehreren Dimensionen ist das Newton Verfahren zur Lösung des Nullstellenproblems $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, wie folgt definiert:

---

**function** NEWTON(x0,F,DF,nMax,ATOL,RTOL)
  Initialisierung: $n = 1$, $x = x0$
  **while** $n < nMax$ und $\|DF(x)^{-1}F(x)\| > ATOL + RTOL\|x\|$ **do**
    $\Delta x = -DF(x)^{-1}F(x)$
    $x = x + \Delta x$
    $n = n + 1$
  return $x$

---

Hier ist `x0` der Startwert, `DF` die Jacobi-Matrix der Funktion `F`, `nMax` die maximale Anzahl von Iterationen und `ATOL` und `RTOL` gegebene absolute und relative Toleranzen für das Abbruchkriterium (ABK3) (aus der Vorlesung).

**a)** Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newton.m`, die den obigen Algorithmus implementiert.
*Hinweis*: Sie sollten niemals die Inverse $DF(x)^{-1}$ explizit berechnen. Stattdessen sollten Sie das System $DF(x)\Delta x = -F(x)$ lösen. (Es ist durchaus sinnvoll, sich zu überlegen wieso!)

**b)** Betrachten Sie die Funktion $F : D = [-1, 2]^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ ye^x - 2 \end{pmatrix}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Bestimmen Sie mit Ihrer Funktion aus **a)** alle Lösungen des Nullstellenproblems $F(x, y) = 0$.
*Hinweis:* Die Höhenlinien der Funktions-Komponenten können mit `hoehenlinien.m` gezeichnet werden.

**4.** *Mehrschrittverfahren: Das 2-Schrittverfahren von Adams-Moulton*

In Serie 10, Aufgabe 4 hatten wir zum ersten mal Kontakt mit sog. *Mehrschrittverfahren* in der Form der *expliziten Adams-Bashforth* Verfahren. In dieser Aufgabe wollen wir eine Familie von *impliziten* Mehrschrittverfahren einführen: die sog. *Adams-Moulton* Verfahren. Der Einfachheit halber betrachten wir auch in dieser Aufgabe nur eine konstante Schrittweite $h$.

Ausgangspunkt ist auch hier wieder die zur (skalaren) Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{1}$$

Zur Approximation des Integrals soll nun zusätzlich zu den bekannten Werten der Funktion $f(\tau, y(\tau))$ an den $m$ vorhergehenden Zeiten $t_j,\ t_{j-1} := t_j - h,\ \ldots,\ t_{j+1-m} := t_j - (m-1)h$ (d.h. wir kennen $y_j,\ \ldots,\ y_{j+1-m}$ und damit auch $f_j := f(t_j, y_j),\ \ldots,\ f_{j+1-m} := f(t_{j+1-m}, y_{j+1-m})$), auch noch der Unbekannte Wert $f(t_{j+1}, y_{j+1})$ zur Zeit $t_{j+1}$ einbezogen werden. Dieser letzte Stützpunkt macht das Verfahren implizit. Hieraus bilden wir das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu den $m+1$ Stützpunkten $(t_{j+1}, f(t_{j+1}, y_{j+1})),\ (t_j, f_j),\ \ldots,\ (t_{j+1-m}, f_{j+1-m})$:

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} f_{j+1-k}\, L^m_{j+1-k}(t)$$

wobei

$$L^m_{j+1-k}(t) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m} \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}}$$

die Lagrange-Polynome sind. Wir verwenden nun $P_m(t)$ zur Approximation des Integrals in (1) und erhalten somit folgende Ausdruck

$$y_{j+1} = y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_m(\tau)\, d\tau.$$

Dies ist das sog. *$m$-Schrittverfahren von Adams-Moulton* (AM$m$).

**a)** Bauen Sie nach obigem Rezept das 2-Schrittverfahren von Adams-Moulton (AM2).

**Bitte wenden!**

**b)** Nun soll AM2 implementiert werden. Weil das Verfahren implizit ist, müssen wir einen Weg finden um das resultierende Nullstellenproblem zu lösen. Hierzu benuzten wir eine Fixpunktiteration. Als Startwert für die Iteration verwenden wir einen Schritt mit dem expliziten 2-Schrittverfahren von Adams-Bashforth (AB2). Dies führt uns zu sog. *Prädiktor-Korrektor Verfahren* mit folgender Struktur:

1. *Prädiktor*: Bestimmen Sie den Startwert $y_{j+1}^{(0)}$ mit dem 2-Schrittverfahren von Adams-Bashforth

$$y_{j+1}^{(0)} = y_j + h\left(\frac{3}{2}f_j + \frac{1}{2}f_{j-1}\right).$$

2. *Korrektor*: Bestimmen Sie näherungsweise $y_{j+1}$ mit $M$ Iterationen einer Fixpunktiteration:

$$y_{j+1}^{(k+1)} = \Phi(y_{j+1}^{(k)})\ ,\ k = 0, 1, ..., M,$$

wobei $\Phi$ die zu AM2 zugehörige Fixpunktfunktion ist [1]. Die letzte Iteration definiert dann die neue Approximation der Lösung zur Zeit $t_{j+1}$:

$$y_{j+1} = y_{j+1}^{(k+1)}.$$

**c)** Messen Sie die Konvergenzordnung von AM2 an folgendem AWP:

$$\dot{y}(t) = -2y(t),\ y(0) = 5.$$

**Abgabe:** Bis Freitag, den 24.05.2019.

[1] Wie wir in der Vorlesung gesehen haben gibt es i.A. zu jedem Nullstellenproblem eine Vielzahl von Fixpunktfunktionen. Hier zwingt sich aber eine besonders einfache Fixpunktfunktion auf.