D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Numerische Methoden

FS 2019

Serie 12

1. *Nullstellensuche mit dem Newton Verfahren*

a) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `untersucheNewton.m`, die die Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - 3x + 2$ sucht. Diese Funktion ruft die Funktion `newton.m` von Aufgabe 3 aus Serie 11 mit verschiedenen Anfangswerten auf und plottet welche Anfangswerte gegen welche Nullstellen konvergieren. Identifizieren Sie die zwei Konvergenzbereiche des Newton Verfahrens.

b) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `newtonKonvergenz.m`, in der die Konvergenz der Newtoniterierten gegen die Nullstelle $x = 1$ des Polynoms $p(x) = x^2 - 3x + 2$ untersucht wird.

c) Wiederholen Sie das Experiment `untersucheNewton.m` mit dem Polynom $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Erklären Sie das Verhalten des Newton Verfahrens für Anfangswerte im Bereich $[1.4, 1.6]$.

d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newtonKonvergenzFD.m` basierend auf `newtonKonvergenz.m`, in welcher $F'(x)$ durch folgende Finite-Differenzen Approximation

$$F'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ersetzt wird. Wiederholen Sie **c)** mit $h = 10^{-7}$ und 10^{-16}. Was beobachten Sie?

2. *Stabilitäts-funktionen und Gebiete*

a) Berechnen Sie die Stabilitäts-funktionen folgender Verfahren:

(i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Bitte wenden!

(iii) Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(v) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Hinweis: (i) und (ii) wurde bereits in der Vorlesung berechnet.

b) Zeichnen Sie die Stabilitätsgebiete mit die MATLAB Funktionen `draw_stabfunc.m` für die Verfahren (i)-(v). Was beobachten Sie?

c) Bestimmen Sie auf mindesten fünf Stellen genau die Stabilitätsintervalle für die Verfahren (i)-(v).
Hinweis: Sie können im Template `stab_klassiches_RK.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

d) Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (-1000 + \pi i) y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Geben Sie sinnvolle Grenzen für die Schrittweite h an, so dass die Verfahren (i)-(v) den qualitativen Verlauf der exakten Lösung folgen.
Hinweis: Sie können im Template `grenzen_schrittweite_h.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

e) Zeichnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Lösung $y(t)$ aus **d)**.
Hinweis: Sie können im Template `schnelle_oszillation_verfall.m` arbeiten.

Siehe nächstes Blatt!

3. *Lineares homogenes System*

Gegeben folgendes System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t),$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{869}{10} & \frac{1521}{5} \\ 0 & -\frac{227}{2} & \frac{591}{2} \\ 0 & \frac{591}{2} & -\frac{1803}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) mit den Anfangswerten $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = 6$ und $y_3(t) = 2$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 2]$.

a) Lösen Sie obiges AWP analytisch.
Hinweis: Entkoppeln Sie dieses System durch diagonalisieren der Matrix A (wozu Sie ein Computeralgebrasystem verwenden können).

b) Lösen Sie obiges AWP numerisch mit dem verbesserten Euler Verfahren für $h = 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2, ..., 12$, und berechnen den globalen Diskretisierungsfehler (GDF) zur Zeit $t = 2$. Erklären Sie den Verlauf des GDFs als Funktion der Schrittweite h.
Hinweis: Sie finden das bereits implementierte verbesserte Euler Verfahren in `verbEuler.m`.

4. *Stabilitäts-funktionen für RK-ESV*

Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion eines expliziten RK-ESVs *immer* ein Polynom ist.

5. *Steifes nichtlineares AWP*

Wir betrachten (wiedereinmal!) die Van der Pol Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = \mu(1 - y(t)^2)\dot{y}(t) - y(t)$$

mit $\mu = 1000$ für $t \in [0, 3000]$ mit den Anfangswerten

$$y(0) = 2 \quad , \quad \dot{y}(0) = 0.$$

a) Lösen Sie obiges Anfangswertproblem numerisch mit den Matlab Lösern `ode45` und `ode23s`. Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Arbeiten Sie im Template `StiffVanDerPol.m`.
Beachte: Die Rechnung mit `ode45` kann durchaus ein paar Minuten dauern.

Bitte wenden!

b) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter S zur Anfangszeit und Anfangswerten. Ist dieses Problem lokal steif?

c) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter S in jedem Zeitschritt für die numerische Lösung mit `ode23s`. Was beobachten Sie?

Abgabe: Bis Freitag, den 31.05.2019.