

Serie 3

1. 3-Punkte Gauss Quadraturregel

In dieser Aufgabe wollen wir die berühmte 3-Punkte Gauss Quadraturregel $G_2[f]$ herleiten.

- a) Berechnen Sie die Quadratur Knoten von $G_2[f]$ in dem Sie die Nullstellen des Legendre-Polynoms dritten Grades $P_3(x)$ bestimmen.

Hinweis: Zur Berechnung der Gewichte können Sie die Formel in den Vorlesungsnotizen verwenden:

$$\omega_k = \frac{2(1 - x_k^2)}{((j + 1)P_j(x_k))^2}, \quad k = 0, 1, 2.$$

- b) Bestätigen Sie, dass $G_2[f]$ Ordnung 6 hat.

- c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

$$y = \text{summ3punktgauss}(f, a, b, N),$$

die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit der summierten 3-Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

- d) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Serie 2 Aufgabe 3d) für $G_2[f]$ mit den Integranden

$$f_1(x) = x \cos(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x - a)^{7/3}$$

mit $a = \sqrt{2}$ auf dem Intervall $[\sqrt{2}, \pi]$. Was beobachten Sie?

Hinweis: Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

2. Konvergenz

In der numerischen Mathematik spricht man von algebraischer und exponentieller Konvergenz einer Methode, falls der Fehler der Methode sich wie

$$E(N) = CN^{-\alpha} \quad \text{bzw.} \quad E(N) = Cq^N$$

Bitte wenden!

verhält für N gross genug. Hier sind C und α positive Konstanten, $q \in (0, 1)$ und N entspricht einem Methodenparameter (z.B. die Anzahl Teil-Intervalle einer summierten Quadraturregel oder den Genauigkeitsgrad/Ordnung einer Quadraturregel).

- a) Die MATLAB -Funktion `Konvergenz` berechnet Approximationen des bestimmten Integrals

$$I_i = \int_0^1 f_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei

$$f_1(x) = \cosh(x), \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \arcsin(x)$$

mittels Gauss-Legendre Quadratur und plottet die Quadraturfehler als Funktion der Anzahl Knoten der Quadraturregel. Beschreiben Sie welche Art von Konvergenz für f_1 , f_2 und f_3 vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q .

- b) Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden eine wesentliche Verbesserung des Konvergenz-Verhalten erreichen. Das Integral I_3 aus a) kann durch die Substitution $y = \arcsin(x)$ auf folgendes transformiert werden

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos(y) dy \quad (\equiv I_3).$$

Beschreiben Sie nun welche Art von Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q .

- c) Nun wiederholen wir a) und b) mit den Newton-Cotes Quadraturregeln. Führen Sie hierzu die MATLAB -Funktion `Konvergenz_newcot` aus. Was beobachten Sie?

3. Quadratur für 2D-Integrale, Rechteckige Gebiete

In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, wie man mittels den in der Vorlesung kennengelernten Quadraturregeln auch zweidimensional Integrale approximativ berechnen kann. Dies wird oft in sog. finiten Elementen Methoden verwendet um näherungsweise z.B. die Maxwell-Gleichungen zu lösen.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten das Integral

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei $[a, b] \times [c, d]$ ein rechteckiges Gebiet darstellt. Um eine Approximation von (1) herzuleiten, definieren wir die Funktion

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx, \quad (2)$$

und wandeln (1) in ein eindimensionales Integral um, d.h.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d F(y) dy. \quad (3)$$

Dann wenden wir eine 1D-Quadraturregel mit Knoten $\{x_i\}_{i=0}^n$ und Gewichte $\{w_i\}_{i=0}^n$ auf die rechte Seite von (3) an. Wir erhalten

$$\int_c^d F(y) dy \approx \sum_{i=0}^n w_i F(x_i) = \sum_{i=0}^n w_i \int_a^b f(x, x_i) dx.$$

Wir definieren nun die Funktion

$$G(x) := \sum_{i=0}^n w_i f(x, x_i).$$

Somit gilt

$$\sum_{i=0}^n w_i \int_a^b f(x, x_i) dx = \int_a^b G(x) dx.$$

Wir verwenden nochmals die 1D-Quadraturregel, diesmal auf \int_a^b , und erhalten

$$\int_a^b G(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i G(x_i) = \sum_{i,j=0}^n w_i w_j f(x_i, x_j) =: \sum_{i,j=0}^n \hat{w}_{i,j} f(\mathbf{x}_{i,j}). \quad (4)$$

Die rechte Seite von (4) entspricht einer 2D-Quadraturregel mit Gewichten $\{\hat{w}_{i,j}\}_{i,j=0}^n$ und Knoten $\{\mathbf{x}_{i,j}\}_{i,j=0}^n$ zur Approximation von Integral (1).

- a) Geben Sie die Gewichte und die Knoten der 2D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ auf dem Referenzviereck $[-1, 1] \times [-1, 1]$ an.
Was können Sie über die Lage der Knotenpunkte aussagen?
- b) Geben Sie die Gewichte und die Knoten der 2D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ auf dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$ an.

4. Quadratur für 2D-Integrale, Dreieckige Gebiete

Bitte wenden!

Gegeben $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ein dreieckiges Gebiet K mit Ecken $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$. Wir betrachten das Integral der Funktion f über dem Dreieck K

$$I[f] = \int_K f(x, y) dK. \quad (5)$$

Um eine Approximation von (5) herzuleiten, transformieren wir das Dreieck K in das Referenzquadrat $\hat{S} = [-1, +1] \times [-1, +1]$ durch

$$x = a \cdot \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - \eta}{2} \right), \quad y = b \cdot \frac{1 + \eta}{2} \quad (6)$$

wobei $(\xi, \eta) \in \hat{S}$. Die Jacobi-Matrix der Transformation ist gegeben durch

$$J(\xi, \eta) := \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} a \cdot \frac{1-\eta}{4} & -a \cdot \frac{1+\xi}{4} \\ 0 & b \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

und ihre Determinante (die sog. Funktionaldeterminante) ist

$$\det(J)(\xi, \eta) = ab \cdot (1 - \eta)/8. \quad (8)$$

Mit dieser Transformation kann das Integral wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_K f(x, y) dK = \int_{\hat{S}} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot |\det(J)(\xi, \eta)| d\hat{S} \\ &= \frac{ab}{8} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot (1 - \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Damit können wir nun eine zweidimensionale Quadraturregel wie in Aufgabe 3 beschrieben verwenden.

Geben Sie die Gewichte und die Knoten der 2D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ auf dem Dreieck K mit $a = b = 1$ an.

Abgabe: Bis Freitag, den 15.03.2019.

Laden Sie Ihre MATLAB -Programme unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.

Die schriftlichen Ergebnisse sollten Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.