

## Serie 4

1. Wir betrachten das folgende *uneigentliche* Integral

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4) dx.$$

Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden ein *eigentliches* Integral bekommen.

Verwenden Sie die Substitution  $x = \tan(s)$  und schreiben Sie  $I$  in ein (*eigentliches*) Integral um.

2. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit adaptiver Quadratur vertraut machen. Benutzen Sie die MATLAB Funktion `adaptsim.m` um folgende Funktionen Integrale zu berechnen:

- (i)  $\int_{3/2}^4 f_1(x)dx$  mit  $f_1(x) = \frac{1}{2x^3-x^2} \left(5 \sin\left(\frac{20}{x}\right)\right)^2$
- (ii)  $\int_{3/2}^4 f_2(x)dx$  mit  $f_2(x) = \min\left(f_1(x), \frac{1}{2}\right)$
- (iii)  $\int_{-5}^5 f_3(x)dx$  mit  $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- (iv)  $\int_0^1 f_4(x)dx$  mit  $f_4(x) = \sqrt{x}$
- (v)  $\int_0^1 f_5(x)dx$  mit  $f_5(x) = \sin(4\pi x)e^{-2x}$
- (vi)  $\int_0^{0.6} f_5(x)dx + \int_{0.6}^1 f_5(x)dx$
- (vii)  $\int_0^{+\infty} \exp(-x^4) dx$  [Verwenden Sie die Substitution aus problem (1)]

Für (i)-(vii) plotten Sie die Funktion und das adaptive Quadratur Gitter. Verwenden Sie als Toleranz `tol=1e-4` und für die maximal Anzahl Verfeinerungen `maxlevel=12`. Was geht schief bei (v) und warum klappt es bei (vi)?

3. In dieser Aufgabe wollen wir eine adaptive Quadratur Methode zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

**Bitte wenden!**

entwickeln und implementieren basierend auf der Trapezregel. Wie in der Vorlesung diskutiert, benötigt man dafür einen Fehler-Schätzer. Hierzu vergleichen wir das Resultat der Trapezregel

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

mit dem Resultat der zusammengesetzten Trapezregel

$$Q_1^2[f] = \frac{b-a}{4} \left( f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

(mit zwei Teil-Intervallen).

- a)** Bestimmen Sie den Fehler-Schätzer  $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]|$ .

*Hinweis* : Beispiel (14) und (15) in der Vorlesung.

- b)** Implementieren Sie die adaptive Quadratur Methode in der MATLAB Funktion `adapttrapez_simple_Template.m`.

*Hinweis* : Verwenden Sie den in der Vorlesung gezeigten Pseudo-MATLAB Code.

- c)** Der in der Vorlesung gezeigte Pseudo-MATLAB Code ist sehr simple und besitzt einige Schwächen. Geben Sie zwei offensichtliche Schwächen an und versuchen Sie diese zu beheben.

*Hinweis* : Die `adaptsimp.m` Funktion von Aufgabe 1 könnte hilfreich sein.

#### 4. Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der  $x$ - $y$ -Ebene welches eine konstante elektrische Ladungsdichte  $\varrho_0$  aufweist

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \varrho_0, & (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential  $\phi$  an einem Punkt  $(x_p, y_p)$  ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\phi(x_p, y_p) = \frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}} dx dy.$$

Der Einfachheit halber setzen wir  $\frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0} = 1$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapezregel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann  $\phi(x_p, y_p)$  für  $x_p = y_p = 2, 10, 20$ . Verwenden Sie  $N = 128$  Teilintervalle für beide Dimensionen und vergleichen Sie Ihre Werte mit den exakten:

$$\begin{aligned}\phi(2, 2) &= 1.4493948762686699 \\ \phi(10, 10) &= 0.2830800703857426 \\ \phi(20, 20) &= 0.1414508706242226.\end{aligned}$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Templates `potential_Template.m` und `trapez2D_Template.m`.

**Abgabe:** Bis Freitag, den 22.03.2019.

Laden Sie Ihre MATLAB -Programme unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.

Die schriftlichen Ergebnisse sollten Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.