Lineare Algebra I - Prüfung Winter 2019

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Im Körper $\mathbb{F}_{17}$ gilt die Gleichung $x \cdot \overline{7} = \overline{1}$ für

(a) $x = \overline{15}$
(b) $x = \overline{9}$
(c) $x = \overline{3}$
(d) $x = \overline{5}$

(II) Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraumes. Welche Aussage ist **richtig**?

(a) Die Summe zweier Eigenvektoren von f ist wieder ein Eigenvektor von f.
(b) Die Summe zweier Eigenwerte von f ist wieder ein Eigenwert von f.
(c) Jeder Eigenvektor von f gehört zu genau einem Eigenwert von f.
(d) Zu jedem Eigenwert von f existiert ein eindeutiger Eigenvektor von f.

(III) Sei V ein Vektorraum mit Dualraum V^*. Welche Aussage ist **richtig**?

(a) Der Begriff *duale Basis* bezeichnet eine durch V eindeutig bestimmte Basis von V^*.
(b) Die Elemente von V sind gleich den Elementen von V^*.
(c) Für $\dim(V) < \infty$ ist $V \cong V^*$.
(d) Es gilt $V^* = \mathrm{End}_K(V)$.

(IV) Welche der folgenden Definitionen ergibt einen Sinn für alle $n \geqslant 0$? Eine $n \times n$-Matrix A über einem Körper K heisst

(a) *positiv*, wenn $\det(A) > 0$ gilt.
(b) *definit*, wenn für alle $v \in K^n$ gilt $v^T A v = 0 \iff v = 0$.
(c) *konstant*, wenn für alle $v \in K^n$ ein $\lambda \in K$ existiert, so dass $Av = \lambda$ gilt.
(d) *doppelsymmetrisch*, wenn für die zusammengesetzte $n \times 2n$-Matrix $(A|A)$ gilt $(A|A)^T = (A|A)$.

(V) Seien A und B Aussagen. Welcher Ausdruck ist **nicht** äquivalent zum Ausdruck $\neg(\neg(A \vee B) \vee (B \wedge A)) \wedge B$?

(a) $B \wedge A$
(b) $\neg(\neg(A \vee B) \vee (B \wedge A) \vee \neg B)$
(c) $(A \vee B) \wedge \neg(B \wedge A) \wedge B$
(d) $B \wedge \neg A$

(VI) Die Aussage „Alle Menschen machen die gleichen Fehler“ ist äquivalent zu

- **(a)** $\forall x, y \in \{\text{Mensch}\}\ \exists f \in \{\text{Fehler}\}\colon (x \text{ macht } f) \ \wedge\ (y \text{ macht } f)$.
- **(b)** $\forall x \in \{\text{Mensch}\}\ \exists f, g \in \{\text{Fehler}\}\colon (x \text{ macht } f) \ \Leftrightarrow\ (x \text{ macht } g)$.
- **(c)** $\forall f \in \{\text{Fehler}\}\ \exists x, y \in \{\text{Mensch}\}\colon (x \text{ macht } f) \ \Rightarrow\ (y \text{ macht } f)$.
- **(d)** $\forall x, y \in \{\text{Mensch}\}\ \forall f \in \{\text{Fehler}\}\colon (x \text{ macht } f) \ \Rightarrow\ (y \text{ macht } f)$.

(VII) Für welche binäre Operation $*\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $(\mathbb{R}, *, 0)$ eine Gruppe?

- **(a)** $a * b := ab^2 + a^2 b$.
- **(b)** $a * b := a + ab + b$.
- **(c)** $a * b := a + a^2 b^2 + b$.
- **(d)** $a * b := (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}$.

(VIII) Sei V ein Vektorraum. Welche Aussage ist im allgemeinen **falsch**?

- **(a)** Eine Teilmenge $U \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle U \rangle = U$ ist.
- **(b)** Für alle Teilmengen $S_1, S_2 \subset V$ gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.
- **(c)** Für alle Teilmengen $S_1, S_2 \subset V$ gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.
- **(d)** Für jede Basis $B \subset V$ ist $\langle B \rangle = V$.

(IX) Welche Eigenschaft erfüllt die Determinante einer Matrix **nicht**?

- **(a)** Invarianz unter Vertauschung zweier Spalten.
- **(b)** Für alle $n \times n$-Matrizen A und B gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **(c)** Linearität in jeder Spalte.
- **(d)** Invarianz unter Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte.

(X) Welche Eigenschaft gilt für jede $n \times m$-Matrix A und jede $m \times n$-Matrix B?

- **(a)** Wenn $AB = I_n$ gilt, dann ist $n = m$ und A und B sind invertierbar.
- **(b)** Falls AB invertierbar ist, so ist $m \geqslant n$.
- **(c)** Ist AB die Nullmatrix, dann ist A oder B die Nullmatrix.
- **(d)** Wenn $A^T A = BB^T$ gilt, dann ist $A = B$.

2. Sei M eine endliche Menge und $V := \{f\colon M \to K\}$ die Menge aller Abbildungen von M in den Körper K.

(a) *(6 Punkte)* Zeige, dass V mit den Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) := af(x)$$

für $f, g \in V$ und $a \in K$ einen K-Vektorraum bildet.

(b) *(3 Punkte)* Bestimme die Dimension von V.

(c) *(3 Punkte)* Wähle ein $m \in M$. Zeige, dass die Menge $U_m := \{f \in V \mid f(m) = 0\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(d) *(3 Punkte)* Bestimme ein Komplement zu U_m in V.

3. Betrachte die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) *(1 Punkte)* Gib eine Definition für den Rang einer allgemeinen Matrix an.

(b) *(6 Punkte)* Bestimme den Rang von A in Abhängigkeit von t.

(c) *(4 Punkte)* Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ im Fall $t = 2$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(d) *(4 Punkte)* Sei C eine $n \times n$-Matrix vom Rang m. Beweise, dass eine $n \times m$-Matrix A und eine $m \times n$-Matrix B existieren, so dass $C = AB$ gilt.

4. Gegeben seien die komplexen Matrizen

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *(4 Punkte)* Zeige, dass das Tupel $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Basis des komplexen Vektorraumes $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ der 2×2-Matrizen bildet.

(b) *(2 Punkte)* Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto XB - BX \end{aligned}$$

linear ist.

(c) *(4 Punkte)* Bestimme die Darstellungsmatrix der Abbildung T bezüglich der Basis $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

(d) *(5 Punkte)* Bestimme eine Basis von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, welche T trigonalisiert.

5. Gegeben sei eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in K. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ betrachte die Matrix $A_n := (a_{\min\{i,j\}})_{i,j=1,\ldots,n}$.

(a) *(6 Punkte)* Beweise die Formel für die Entwicklung einer Determinante nach der letzten Zeile.

(b) *(1 Punkte)* Schreibe A_n aus (mit Pünktchen).

(c) *(4 Punkte)* Zeige $\det(A_{n+1}) = \det(A_n) \cdot (a_{n+1} - a_n)$ für alle $n \geqslant 1$.

(d) *(4 Punkte)* Gib eine explizite Formel für $\det(A_n)$ an für alle $n \geqslant 1$ und beweise sie durch Induktion.

6. Gegeben sei die Rekursionsformel einer Folge $(F_i)_{i\geqslant 0} \in \mathbb{C}$:

$$F_0 := 3, \quad F_1 := 6, \quad F_2 := 14, \quad F_{n+1} := 6F_n - 11F_{n-1} + 6F_{n-2} \ \text{ für } \ n \geqslant 2.$$

(a) *(2 Punkte)* Sei $v_n := (F_n, F_{n-1}, F_{n-2})^T$ für alle $n \geqslant 2$. Schreibe die obige Rekursion in Matrixform $v_{n+1} = Av_n$ mit einer 3×3-Matrix A.

(b) *(7 Punkte)* Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von A über $\mathbb{C}$.

(c) *(6 Punkte)* Gib eine explizite Formel für F_n an.