Lineare Algebra I - Prüfung Winter 2019

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Im Körper $\mathbb{F}_{17}$ gilt die Gleichung $x \cdot \overline{7} = \overline{1}$ für

- **(a)** $x = \overline{15}$
- **(b)** $x = \overline{9}$
- **(c)** $x = \overline{3}$
- $\boxed{\textbf{(d)}}$ $x = \overline{5}$

(II) Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraumes. Welche Aussage ist **richtig**?

- **(a)** Die Summe zweier Eigenvektoren von f ist wieder ein Eigenvektor von f.
- **(b)** Die Summe zweier Eigenwerte von f ist wieder ein Eigenwert von f.
- $\boxed{\textbf{(c)}}$ Jeder Eigenvektor von f gehört zu genau einem Eigenwert von f.
- **(d)** Zu jedem Eigenwert von f existiert ein eindeutiger Eigenvektor von f.

(III) Sei V ein Vektorraum mit Dualraum V^*. Welche Aussage ist **richtig**?

- **(a)** Der Begriff *duale Basis* bezeichnet eine durch V eindeutig bestimmte Basis von V^*.
- **(b)** Die Elemente von V sind gleich den Elementen von V^*.
- $\boxed{\textbf{(c)}}$ Für $\dim(V) < \infty$ ist $V \cong V^*$.
- **(d)** Es gilt $V^* = \mathrm{End}_K(V)$.

(IV) Welche der folgenden Definitionen ergibt einen Sinn für alle $n \geqslant 0$? Eine $n \times n$-Matrix A über einem Körper K heisst

- **(a)** *positiv*, wenn $\det(A) > 0$ gilt.
- $\boxed{\textbf{(b)}}$ *definit*, wenn für alle $v \in K^n$ gilt $v^T A v = 0 \iff v = 0$.
- **(c)** *konstant*, wenn für alle $v \in K^n$ ein $\lambda \in K$ existiert, so dass $Av = \lambda$ gilt.
- **(d)** *doppelsymmetrisch*, wenn für die zusammengesetzte $n \times 2n$-Matrix $(A|A)$ gilt $(A|A)^T = (A|A)$.

(V) Seien A und B Aussagen. Welcher Ausdruck ist **nicht** äquivalent zum Ausdruck $\neg(\neg(A \vee B) \vee (B \wedge A)) \wedge B$?

- $\boxed{\textbf{(a)}}$ $B \wedge A$
- **(b)** $\neg(\neg(A \vee B) \vee (B \wedge A) \vee \neg B)$
- **(c)** $(A \vee B) \wedge \neg(B \wedge A) \wedge B$
- **(d)** $B \wedge \neg A$

(VI) Die Aussage „Alle Menschen machen die gleichen Fehler" ist äquivalent zu

(a) $\forall x, y \in \{\text{Mensch}\}\ \exists f \in \{\text{Fehler}\}\colon (x \text{ macht } f)\ \wedge\ (y \text{ macht } f)$.

(b) $\forall x \in \{\text{Mensch}\}\ \exists f, g \in \{\text{Fehler}\}\colon (x \text{ macht } f)\ \Leftrightarrow\ (x \text{ macht } g)$.

(c) $\forall f \in \{\text{Fehler}\}\ \exists x, y \in \{\text{Mensch}\}\colon (x \text{ macht } f)\ \Rightarrow\ (y \text{ macht } f)$.

$\boxed{\textbf{(d)}}$ $\forall x, y \in \{\text{Mensch}\}\ \forall f \in \{\text{Fehler}\}\colon (x \text{ macht } f)\ \Rightarrow\ (y \text{ macht } f)$.

(VII) Für welche binäre Operation $*\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $(\mathbb{R}, *, 0)$ eine Gruppe?

(a) $a * b := ab^2 + a^2b$.

(b) $a * b := a + ab + b$.

(c) $a * b := a + a^2b^2 + b$.

$\boxed{\textbf{(d)}}$ $a * b := (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}$.

Begründung: Bei (a) ist 0 kein neutrales Element, bei (b) ist die Operation assoziativ und hat 0 als neutrales Element, aber -1 hat kein Inverses. Die Operation (c) ist nicht assoziativ und hat nicht alle Inversen, aber 0 ist ein neutrales Element. Für (d) betrachte die bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^3$; wegen $f(a*b) = f(a) + f(b)$ übertragen sich die Gruppenaxiome von $(\mathbb{R}, +, 0)$ direkt auf $(\mathbb{R}, *, 0)$.

(VIII) Sei V ein Vektorraum. Welche Aussage ist im allgemeinen **falsch**?

(a) Eine Teilmenge $U \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle U \rangle = U$ ist.

(b) Für alle Teilmengen $S_1, S_2 \subset V$ gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

$\boxed{\textbf{(c)}}$ Für alle Teilmengen $S_1, S_2 \subset V$ gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

(d) Für jede Basis $B \subset V$ ist $\langle B \rangle = V$.

Begründung: Für die Teilmengen $S_1 := \{\binom{1}{1}\}$ und $S_2 := \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ von k^2 gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle \varnothing \rangle = \{0\}$, aber $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap k^2 = \langle S_1 \rangle \neq \{0\}$.

(IX) Welche Eigenschaft erfüllt die Determinante einer Matrix **nicht**?

$\boxed{\textbf{(a)}}$ Invarianz unter Vertauschung zweier Spalten.

(b) Für alle $n \times n$-Matrizen A und B gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(c) Linearität in jeder Spalte.

(d) Invarianz unter Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte.

(X) Welche Eigenschaft gilt für jede $n \times m$-Matrix A und jede $m \times n$-Matrix B?

(a) Wenn $AB = I_n$ gilt, dann ist $n = m$ und A und B sind invertierbar.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ Falls AB invertierbar ist, so ist $m \geqslant n$.

(c) Ist AB die Nullmatrix, dann ist A oder B die Nullmatrix.

(d) Wenn $A^TA = BB^T$ gilt, dann ist $A = B$.

2. Sei M eine endliche Menge und $V := \{f\colon M \to K\}$ die Menge aller Abbildungen von M in den Körper K.

(a) *(6 Punkte)* Zeige, dass V mit den Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(af)(x) := af(x)$$

für $f, g \in V$ und $a \in K$ einen K-Vektorraum bildet.

(b) *(3 Punkte)* Bestimme die Dimension von V.

(c) *(3 Punkte)* Wähle ein $m \in M$. Zeige, dass die Menge $U_m := \{f \in V \mid f(m) = 0\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(d) *(3 Punkte)* Bestimme ein Komplement zu U_m in V.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass die Vektorraumaxiome (I) bis (V) aus der Zusammenfassung gelten. Als neutrales Element dient dabei die konstante Nullabbildung $O_V(m) = 0$ für alle $m \in M$.

(I) Dass die Verknüpfung $+$ wohldefiniert und assoziativ ist, folgt direkt aus den Körperaxiomen für K. Ebenso folgt die Kommutativität und dass O_V ein neutrales Element ist. Für jede Abbildung $f\colon M \to K$ ist die Abbildung $g := (m \mapsto -f(m))$ ein inverses Element. Also ist $(V, +, O_V)$ eine abelsche Gruppe.

(II) Sei $\lambda \in K$ und $f, g \in V$. Für alle $m \in M$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(m) &= \lambda(f+g)(m) = \lambda(f(m) + g(m)) \\ &= \lambda f(m) + \lambda g(m) = (\lambda f + \lambda g)(m),\end{aligned}$$

also sind die Verknüpfungen linksdistributiv.

(III) Sei $\lambda, \lambda' \in K$ und $f \in V$. Für alle $m \in M$ gilt dann

$$((\lambda + \lambda')f)(m) = (\lambda + \lambda')f(m) = \lambda f(m) + \lambda' f(m) = (\lambda f + \lambda' f)(m),$$

also sind die Verknüpfungen rechtsdistributiv.

(IV) Die Assoziativität der Skalarmultiplikation folgt aus der Assoziativität der Multiplikation in K.

(V) Für alle $f \in V$ und $m \in M$ gilt $(1_K \cdot f)(m) = 1_K \cdot f(m) = f(m)$, also ist $1_K \cdot f = f$.

(b) Für jedes $m \in M$ sei $1_m \in V$ die Abbildung $1_m(n) = 1$, falls $m = n$ ist und $1_m(n) = 0$, falls $m \neq n$ ist. Für jedes $f \in V$ gilt dann $f = \sum_{m \in M} f(m) \cdot 1_m$, also ist $\{1_m \mid m \in M\}$ ein Erzeugendensystem von V. Dieses ist aber auch linear unabhängig: Sei $(a_m)_{m \in M} \in K$ so dass $\sum_{m \in M} a_m 1_m = 0$ gilt. Dann ist $a_n = \left(\sum_{m \in M} a_m 1_m\right)(n) = 0$ für jedes $n \in M$, woraus die lineare Unabhängigkeit folgt. Insgesamt ist $\{1_m \mid m \in M\}$ also eine Basis von V und deshalb ist die Dimension $\dim(V) = |\{1_m \mid m \in M\}| = |M|$.

(c) Wir überprüfen die drei Axiome von Unterräumen. Wegen $0_V \in U_m$ ist U_m nicht leer. Für alle $f, g \in U_m$ ist $(f+g)(m) = f(m) + g(m) = 0$, also ist $f+g \in U_m$. Des Weiteren ist $(\lambda f)(m) = \lambda f(m) = 0$, und damit $\lambda f \in U_m$, für jedes $f \in U_m$ und $\lambda \in K$. Daraus folgt, dass U_m ein Unterraum von V ist.

(d) Jeder eindimensionale Unterraum $U \subset V$, der durch ein Element $f \in U$ erzeugt ist, so dass $f(m) \neq 0$ gilt, ist ein Komplement zu U_m in V. Zum Beispiel ist also $U := \langle 1 \rangle$ ein Komplement, wobei 1 die konstante 1-Abbildung $m \mapsto 1$ ist.

3. Betrachte die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) *(1 Punkte)* Gib eine Definition für den Rang einer allgemeinen Matrix an.

(b) *(6 Punkte)* Bestimme den Rang von A in Abhängigkeit von t.

(c) *(4 Punkte)* Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ im Fall $t = 2$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(d) *(4 Punkte)* Sei C eine $n \times n$-Matrix vom Rang m. Beweise, dass eine $n \times m$-Matrix A und eine $m \times n$-Matrix B existieren, so dass $C = AB$ gilt.

Lösung:

(a) Sei B eine $n \times m$-Matrix. Aus einem Satz aus der Vorlesung folgt, dass invertierbare Matrizen U und V existieren, so dass UAV eine Blockmatrix mit linkem oberen Block I_r und sonst nur Nullen ist für ein geeignetes $0 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$. Dieses r ist definiert als der Rang der Matrix.

(b) Wir subtrahieren zuerst t mal die zweite Zeile von der dritten, und dann t mal die erste Zeile von der zweiten, und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t & 1 \\ 0 & 1-t^2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & t-t^2 & 1-t^3 \\ 0 & 1-t^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese elementaren Zeilenoperationen ändern den Rang nicht.

Die Matrix auf der rechten Seite hat die Determinante $-1 \cdot (1-t^2) \cdot (1-t^3) = -(t-1)^2 \cdot (t-1) \cdot (t^2+t+1)$. Die komplexen Nullstellen des Polynoms t^2+t+1

sind nach der Mitternachtsformel gleich $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, also nicht reell. Für $t \neq \pm 1$ ist somit die Determinante ungleich Null und der Rang gleich 3.

Für $t = 1$ ist die erste Zeile der rechten Matrix ungleich Null, die übrigen Zeilen aber Null; somit ist der Rang gleich 1.

Für $t = -1$ ist die erste Zeile der rechten Matrix ungleich Null, die zweite Zeile von der ersten linear unabhängig, aber die dritte Zeile gleich Null; somit ist der Rang gleich 2.

(c) (Gaussverfahren) Wir wenden dieselben elementaren Zeilenumformungen wie in (a) auf die erweiterte Matrix $(A|b)$ an und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -7 & -13 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Dann multiplizieren wir die mittlere bzw. letzte Zeile mit -1 bzw. $-\frac{1}{3}$, vertauschen diese Zeilen, und subtrahieren 2 mal die zweite Zeile von der dritten:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 13 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right).$$

Nun multiplizieren wir die letzte Zeile mit $-\frac{1}{7}$, danach subtrahieren wir 2 mal die mittlere Zeile sowie 4 mal die letzte Zeile von der ersten, und erhalten:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Daher erhalten wir als einzige Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Nach einem Satz der Vorlesung existieren invertierbare $n \times n$-Matrizen U und V, so dass UCV eine Blockmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} I_m & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ ist mit der $m \times m$-Einheitsmatrix I_m und allen übrigen Einträgen gleich Null. Diese können wir als Produkt von Blockmatrizen

$$U \cdot C \cdot V \;=\; \begin{pmatrix} I_m & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{m,m} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & O_{m,n-m} \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei jeweils $O_{k,\ell}$ die Nullmatrix der Grösse $k \times \ell$ bezeichnet. Mit $A := U^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_m \\ O_{m,n-m} \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \begin{pmatrix} I_m & O_{n-m,m} \end{pmatrix} V^{-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned} A \cdot B \;&=\; U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_m \\ O_{m,n-m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & O_{n-m,m} \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \\ &=\; U^{-1} \cdot U \cdot C \cdot V \cdot V^{-1} \;=\; I_n \cdot C \cdot I_n \;=\; C. \end{aligned}$$

4. Gegeben seien die komplexen Matrizen

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *(4 Punkte)* Zeige, dass das Tupel $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Basis des komplexen Vektorraumes $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ der 2×2-Matrizen bildet.

(b) *(2 Punkte)* Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto XB - BX \end{aligned}$$

linear ist.

(c) *(4 Punkte)* Bestimme die Darstellungsmatrix der Abbildung T bezüglich der Basis $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

(d) *(5 Punkte)* Bestimme eine Basis von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, welche T trigonalisiert.

Lösung:

(a) Der Vektorraum hat Dimension 4, also genügt zu zeigen, dass die Matrizen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ linear unabhängig sind. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ Koeffizienten so dass $a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3 = 0$. Aus dem oberen linken Eintrag der Matrizen folgt dann, dass $a + d = 0$ ist und aus dem rechten unteren Eintrag folgt, dass $a - d = 0$ ist. Also ist $a = d = 0$ und wir haben noch die Gleichung $b\sigma_1 + c\sigma_2 = 0$. Aus dem linken unteren Eintrag folgt dann, dass $b + ic = 0$ ist und aus dem rechten oberen Eintrag folgt, dass $b - ic = 0$ ist. Insgesamt folgt damit $b = c = 0$ und daher die Behauptung.

Alternativ kann die Standardbasis wie folgt dargestellt werden:

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_3), \; E_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \; E_{21} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2), \; E_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_3),$$

woraus ebenfalls folgt, dass $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Basis bildet.

(b) Seien X, Y zwei 2×2-Matrizen und sei $a \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$T(X+Y) = (X+Y)B - B(X+Y) = XB + YB - BX - BY = T(X) + T(Y)$$

und

$$T(aX) = (aX)B - B(aX) = a(XB - BX) = aT(X).$$

Dies zeigt, dass T eine lineare Abbildung ist.

(c) Wir berechnen:

$$T(\sigma_0) = 0, \; T(\sigma_1) = -\sigma_3, \; T(\sigma_2) = -i\sigma_3, \; T(\sigma_3) = \sigma_1 + i\sigma_2.$$

Daher ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Wegen $T(\sigma_1 + i\sigma_2) = 0$ und den in (c) berechneten Relationen folgern wir, dass $T^3 = 0$ ist. Wir suchen uns einen Vektor v so dass $T^2(v) \neq 0$ ist. Wenn (σ_0, T^2v, Tv, v) eine Basis ist, trigonalisiert sie die Abbildung T. Wir wählen $v = \sigma_2$ und erhalten die Basis $(\sigma_0, \sigma_2 - i\sigma_1, -i\sigma_3, \sigma_2)$. In dieser Basis hat T die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die alternative Basis $(\sigma_2 - i\sigma_1, -i\sigma_3, \sigma_2, \sigma_0)$ ergibt die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die (allfällig erratene) alternative Basis $(\sigma_0, \sigma_1 + i\sigma_2, \sigma_3, \sigma_2)$ ergibt die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann auch die Standardbasis in geänderter Reihenfolge benutzt werden. Es gilt

$$T(E_{11}) = E_{12},\ T(E_{12}) = 0,\ T(E_{21}) = E_{22} - E_{11},\ T(E_{22}) = -E_{12}.$$

In der Basis $(E_{12}, E_{11}, E_{22}, E_{21})$ ist die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Gegeben sei eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in K. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ betrachte die Matrix $A_n := (a_{\min\{i,j\}})_{i,j=1,\ldots,n}$.

(a) *(6 Punkte)* Beweise die Formel für die Entwicklung einer Determinante nach der letzten Zeile.

(b) *(1 Punkte)* Schreibe A_n aus (mit Pünktchen).

(c) *(4 Punkte)* Zeige $\det(A_{n+1}) = \det(A_n) \cdot (a_{n+1} - a_n)$ für alle $n \geqslant 1$.

(d) *(4 Punkte)* Gib eine explizite Formel für $\det(A_n)$ an für alle $n \geqslant 1$ und beweise sie durch Induktion.

Lösung:

(a) Sei B eine $n \times n$-Matrix mit $n > 0$. Bezeichne mit B_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus B durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Wir bezeichnen mit b_{ij} den Eintrag der Matrix B an der Stelle (i,j) und mit c_{ab}^{ij} den Eintrag der Matrix B_{ij} an der Stelle (a,b). Dann ist die Entwicklung der letzten Zeile gegeben durch:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} b_{nj} \det(B_{nj}).$$

Die Determinante von B ist definiert als

$$\begin{aligned}\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} b_{k\sigma k} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} b_{k\sigma k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{nj} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n-1} b_{k\sigma k}.\end{aligned}$$

Für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$ gibt es eine Bijektion zwischen der Menge aller Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = j$ und und der Menge $\tau \in S_{n-1}$. Dabei ist die Anzahl Fehlstände von σ um $n-j$ höher als die Anzahl Fehlstände von τ weil genau jedes $1 \leqslant k < n$ mit $\sigma k > j = \sigma(n)$ ein Fehlstand von σ, aber nicht von τ ist. Es gibt genau $n-j$ solche k. Daher ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-j} \operatorname{sgn}(\tau)$ und es folgt die Gleichheit

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n-1} b_{k\sigma k} = \sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^{n-j} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{k=1}^{n-1} b_{k\sigma k} = (-1)^{n-j} \det(B_{nj}).$$

Mit der obigen Rechnung folgt zusammenfügend also

$$\begin{aligned}\det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{nj} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n-1} b_{k\sigma k} &= \sum_{j=1}^{n} b_{nj} (-1)^{n-j} \det(B_{nj}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} b_{nj} \det(B_{nj}),\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ gilt.

(b)

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

(c) In A_{n+1} subtrahiere die vorletzte Zeile von der letzten. Diese Operation verändert die Determinante nicht. Wir erhalten dabei eine Blockmatrix mit quadratischem linken oberen Block A_n und dem Eintrag $a_{n+1} - a_n$ unten rechts. Mit der Determinantenformel für Blockmatrizen folgt $\det(A_{n+1}) = A_n \cdot (a_{n+1} - a_n)$.

(d) Wir behaupten, dass die Formel

$$\det(A_n) \;=\; a_1 \cdot (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})$$

lautet.

Induktionsanfang: $\det(A_1) = a_1$ erfüllt die Formel.

Induktionsschritt: Wir benutzen Teilaufgabe (c) für den Schritt. Wir nehmen an, die obige Formel gelte für n. Dann ist

$$\det(A_{n+1}) = \det(A_n) \cdot (a_{n+1} - a_n) = a_1 \cdot (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1}) \cdot (a_{n+1} - a_n),$$

wobei wir im ersten Gleichheitszeichen (c) und im zweiten Gleichheitszeichen die Induktionshypothese verwendet haben. Die Formel gilt also auch für $n+1$. Durch Induktion ist die Formel bewiesen.

6. Gegeben sei die Rekursionsformel einer Folge $(F_i)_{i \geqslant 0} \in \mathbb{C}$:

$$F_0 := 3, \quad F_1 := 6, \quad F_2 := 14, \quad F_{n+1} := 6F_n - 11F_{n-1} + 6F_{n-2} \;\text{ für }\; n \geqslant 2.$$

(a) *(2 Punkte)* Sei $v_n := (F_n, F_{n-1}, F_{n-2})^T$ für alle $n \geqslant 2$. Schreibe die obige Rekursion in Matrixform $v_{n+1} = Av_n$ mit einer 3×3-Matrix A.

(b) *(7 Punkte)* Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von A über $\mathbb{C}$.

(c) *(6 Punkte)* Gib eine explizite Formel für F_n an.

Lösung:

(a) Wir wollen das System als $v_{n+1} = Av_n$ schreiben für $v_n = (F_n, F_{n-1}, F_{n-2})^T$ und $n \geqslant 2$. Wir finden:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Das charakteristische Polynom von A ist

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Daher sind die Eigenwerte $1, 2, 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir nutzen die Eigenbasis von A. Sei dafür

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Basiswechselmatrix. Wir berechnen die Inverse

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen damit

$$\tilde{v}_2 := T^{-1} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können alternativ auch den Vektor $\tilde{v}_2$ als Lösung des linearen Gleichungssystems $Tx = v_2$ bestimmen, dann brauchen wir die Inverse nicht explizit. Sei

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen

$$v_{n+2} = A^n v_2 = T D^n T^{-1} v_2 = T D^n \tilde{v}_2 =$$

$$= T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2^{n+2} + 3^{n+2} \\ 1 + 2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 1 + 2^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

Eine explizite Formel ist daher $F_n = 1 + 2^n + 3^n$.