Lineare Algebra II - Prüfung Sommer 2019

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Das Minimalpolynom der Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist gleich

- **(a)** $(X-1)^2(X+1)$
- **(b)** $(X-1)(X+1)$
- **(c)** $(X-1)^3$
- **(d)** $(X-1)(X+1)^2$

(II) Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*? Eine komplexe Matrix, deren ...

- **(a)** ... Jordan-Normalform einen Block der Grösse mindestens zwei besitzt, ist nicht diagonalisierbar.
- **(b)** ... charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, besitzt eine Jordan-Normalform.
- **(c)** ... Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom ist, ist diagonalisierbar.
- **(d)** ... Jordan-Normalform nur einen Block besitzt, hat höchstens einen Eigenwert.

(III) Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = f(x+1)$. Welche der folgenden Abbildungen ist *kein* Skalarprodukt auf V?

- **(a)** $(f,g) \mapsto \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx$.
- **(b)** $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x+2019)\,dx$.
- **(c)** $(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$.
- **(d)** $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x+\frac{1}{2})\,dx$.

(IV) Betrachte orthogonale Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. Durch welche Eigenschaften wird ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmt?

- **(a)** $v \perp v_1$ und $v \perp v_2$.
- **(b)** $v \perp v_1$ und $\|v\| = \|v_2\|$.
- **(c)** $\langle v, v_1\rangle = \|v_1\|$ und $\|v\| = 1$.
- **(d)** $\langle v, v_1\rangle = \langle v, v_2\rangle$.

(V) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} iz & 1 \\ 1 & iz \end{smallmatrix}\right)$ hermitesch?

(a) $z \in \mathbb{R}$

(b) $z \in i\mathbb{R}$

(c) $z \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$

(d) $z \in \{0, 1\}$

(VI) Sei A eine reelle symmetrische Matrix. In welchem Fall existiert eine reelle symmetrische Matrix B mit $B^{2019} = A$?

(a) Nur wenn A eine Diagonalmatrix ist.

(b) Nur wenn A positiv definit ist.

(c) Nur, wenn A^2 die Einheitsmatrix ist.

(d) Immer.

(VII) Betrachte Endomorphismen f und g eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

(a) $f^* = g^* \iff f = g$

(b) $f^* = g \iff f = g^*$

(c) $f^*g^* = gf \iff fg = g^*f^*$

(d) $f^*g^* = g^*f^* \iff fg = gf$

(VIII) Sei $n > 1$. Wie viele selbstadjungierte orthogonale Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ existieren?

(a) 1

(b) 2^n

(c) 4^n

(d) ∞

(IX) Sei V ein Vektorraum der Dimension 3. Dann hat $\Lambda^2(S^2V)$ die Dimension

(a) 6.

(b) 15.

(c) 0.

(d) 3.

(X) Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* für jeden K-Vektorraum V?

(a) $\forall\, v, w \in V\colon\ v \wedge w = -w \wedge v$ in $\Lambda^2 V$.

(b) $\forall\, v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}\ \exists\, w \in V \setminus \{0\}\colon\ v_1 \wedge w = v_2 \wedge w$ in $\Lambda^2 V$.

(c) $\forall\, \xi \in \Lambda^2 V\ \exists\, v, w \in V\colon\ v \wedge w = \xi$ in $\Lambda^2 V$.

(d) $\forall\, v \in V\ \exists\, w \in V\colon\ v \wedge w = 0$ in $\Lambda^2 V$.

2. **(a)** *(5 Punkte)* Sei A eine reelle 6×6-Matrix mit charakteristischem Polynom $X^2(X-2)^4$ und Minimalpolynom $X^2(X-2)^2$. Bestimme alle möglichen Jordan-Normalformen von A.

(b) *(6 Punkte)* Bestimme die Jordan-Normalform J der Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^3$ so dass ${}_BM_B(A) = J$ ist.

(c) *(4 Punkte)* Zeige: Eine $n \times n$-Matrix ist nilpotent genau dann, wenn ihr charakteristisches Polynom gleich X^n ist.

3. Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\ell_1, \ldots, \ell_m$ Linearformen auf V, die den Dualraum $V^\vee$ erzeugen.

(a) *(5 Punkte)* Zeige, dass die Formel

$$\langle v, w \rangle \;:=\; \ell_1(v) \cdot \ell_1(w) + \ldots + \ell_m(v) \cdot \ell_m(w)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

(b) *(3 Punkte)* Finde eine Orthonormalbasis für dieses Skalarprodukt in dem Fall, dass $(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ eine Basis von $V^\vee$ ist.

(c) *(1 Punkt)* Formuliere die Definition der Darstellungsmatrix eines Skalarprodukts.

(d) *(6 Punkte)* Wir identifizieren Elemente von $(\mathbb{R}^3)^\vee$ mit Zeilenvektoren. Gegeben seien $\ell_1 := (1, 0, 2)$ und $\ell_2 := (2, 1, -1)$ und $\ell_3 := (-1, 1, 0)$. Bestimme die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts aus (a) bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

4. **(a)** *(1 Punkt)* Was ist eine QR-Zerlegung einer reellen $n \times n$-Matrix M?

(b) *(5 Punkte)* Berechne eine QR-Zerlegung der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) *(3 Punkte)* Sei C eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Beweise, dass je zwei Eigenvektoren von C zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(d) *(6 Punkte)* Seien A und B zwei reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$. Zeige: Es existiert eine orthogonale reelle $n \times n$-Matrix Q, so dass Q^TAQ und Q^TBQ beides Diagonalmatrizen sind.

5. Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so dass $f^n = \mathrm{id}_V$ gilt für ein $n \geqslant 1$.

(a) *(3 Punkte)* Zeige, dass durch

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \ := \ \sum_{i=0}^{n-1} \langle f^i(v), f^i(w) \rangle$$

ein weiteres Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) *(3 Punkte)* Welche Eigenschaft hat f bezüglich $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$? Folgere daraus, dass f diagonalisierbar ist.

(c) *(2 Punkte)* Zeige mit Hilfe des Minimalpolynoms, dass f diagonalisierbar ist.

(d) *(7 Punkte)* Betrachte den Fall $V = \mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Bestimme $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für den Endomorphismus $f\colon v \mapsto Av$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und ein geeignetes $n \geqslant 1$.

6. Seien U und V zwei K-Vektorräume.

(a) *(2 Punkte)* Formuliere die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $U \otimes V$.

(b) *(6 Punkte)* Beweise: Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\Phi : \mathrm{End}(U) \otimes \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(U \otimes V),$$

sodass für alle $f \in \mathrm{End}(U)$ und $g \in \mathrm{End}(V)$ gilt:

$$\forall u \in U \ \forall v \in V\colon \quad \Phi(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)\,.$$

(c) *(7 Punkte)* Betrachte den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ und den von der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dargestellten Endomorphismus L_A. Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume des Endomorphismus $\varphi := \Phi(L_A \otimes L_A)$ von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$.