Lineare Algebra II - Prüfung Sommer 2019

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Das Minimalpolynom der Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist gleich

(a) $(X-1)^2(X+1)$

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $(X-1)(X+1)$

(c) $(X-1)^3$

(d) $(X-1)(X+1)^2$

Erklärung: Das charakteristische Polynom ist $(X-1)^2(X+1)$. Da es dieselben irreduziblen Faktoren hat wie das Minimalpolynom, gibt es für letzteres nur die Möglichkeiten (a) und (b). Direkte Rechnung zeigt aber $A^2 = I_3$; somit ist das Minimalpolynom gleich $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ und (b) richtig.

(II) Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*? Eine komplexe Matrix, deren ...

(a) ... Jordan-Normalform einen Block der Grösse mindestens zwei besitzt, ist nicht diagonalisierbar.

(b) ... charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, besitzt eine Jordan-Normalform.

$\boxed{\textbf{(c)}}$ ... Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom ist, ist diagonalisierbar.

(d) ... Jordan-Normalform nur einen Block besitzt, hat höchstens einen Eigenwert.

Erklärung: Wenn das Minimalpolynom eine mehrfache Nullstelle hat, ist die Matrix nicht diagonalisierbar. Also ist (c) falsch.

(III) Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = f(x+1)$. Welche der folgenden Abbildungen ist *kein* Skalarprodukt auf V?

(a) $(f,g) \mapsto \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx$.

(b) $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x+2019)\,dx$.

(c) $(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$.

$\boxed{\textbf{(d)}}$ $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x+\frac{1}{2})\,dx$.

Erklärung: Die Abbildung (d) ist nicht positiv definit; zum Beispiel ergibt $f(x) := \sin(2\pi x)$ den Wert $-\int_0^1 \sin^2(2\pi x)\, dx < 0$.

Dagegen sind sonst alle Eigenschaften erfüllt: Zum Beispiel ist die Abbildung (b) wegen $g(x+2019) = g(x)$ das übliche Skalarprodukt auf V. Sowieso sind alle Abbildungen wohldefiniert; wobei für (a) zu beachten ist, dass jede periodische stetige Funktion beschränkt ist und folglich das uneigentliche Integral konvergiert. Ausserdem sind alle Abbildungen bilinear. Weiter sind alle Abbildungen symmetrisch, nämlich (d) nach der Variablensubstitution $x \mapsto x + \frac{1}{2}$. Schliesslich sind alle ausser (d) auch positiv definit.

(IV) Betrachte orthogonale Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Durch welche Eigenschaften wird ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmt?

(a) $v \perp v_1$ und $v \perp v_2$.

(b) $v \perp v_1$ und $\|v\| = \|v_2\|$.

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $\langle v, v_1 \rangle = \|v_1\|$ und $\|v\| = 1$.

(d) $\langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle$.

Erklärung: Antwort (a) ist falsch, weil das orthogonale Komplement von $\{v_1, v_2\}$ die Dimension 1 hat, also aus mehr als einem Element besteht. Weiter ist (b) falsch, weil mit jeder Lösung v auch $-v \neq v$ eine Lösung ist. Schliesslich ist Antwort (d) falsch, weil sie eine homogene lineare Gleichung für v darstellt mit einem Lösungsraum der Dimension 2.

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $|\langle v, v_1 \rangle| \leqslant \|v\| \|v_1\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und v_1 linear abhängig sind. Wegen $v_1 \neq 0$ muss dann $v = \lambda v_1$ sein für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dies also im Fall (c). Wegen $|\lambda| \cdot \|v_1\| = \|\lambda v_1\| = \|v\| = 1$ muss dann $\lambda = \pm \|v_1\|^{-1}$ sein. Ausserdem gilt dann $\lambda \cdot \|v_1\|^2 = \langle \lambda v_1, v_1 \rangle = \langle v, v_1 \rangle = \|v_1\| > 0$ und somit $\lambda > 0$. Insgesamt ist dies nur möglich für $\lambda = \|v_1\|^{-1}$. Umgekehrt sieht man schnell, dass der Vektor $v := v_1 / \|v_1\|$ die Bedingungen erfüllt. Somit ist (c) richtig.

(V) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} iz & 1 \\ 1 & iz \end{smallmatrix}\right)$ hermitesch?

(a) $z \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $z \in i\mathbb{R}$

(c) $z \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$

(d) $z \in \{0, 1\}$

Erklärung: Eine komplexe Matrix A heisst hermitesch, wenn $A^* = \overline{A}^T$ gleich A ist. Im gegebenen Fall ist $\left(\begin{smallmatrix} iz & 1 \\ 1 & iz \end{smallmatrix}\right)^* = \left(\begin{smallmatrix} -i\bar{z} & 1 \\ 1 & -i\bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, also muss $iz = -i\bar{z}$ sein, was genau für $z \in i\mathbb{R}$ der Fall ist.

(VI) Sei A eine reelle symmetrische Matrix. In welchem Fall existiert eine reelle symmetrische Matrix B mit $B^{2019} = A$?

(a) Nur wenn A eine Diagonalmatrix ist.

(b) Nur wenn A positiv definit ist.

(c) Nur, wenn A^2 die Einheitsmatrix ist.

$\boxed{\textbf{(d)}}$ Immer.

Erklärung: Nach dem Spektralsatz existiert eine orthogonale Matrix Q, so dass Q^TAQ eine Diagonalmatrix ist. Da 2019 ungerade ist, besitzt jede reelle Zahl eine eindeutige reelle 2019-te Wurzel. Sei D die Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge die 2019-ten Wurzeln der Diagonaleinträge von Q^TAQ sind. Dann gilt $D^{2019} = Q^TAQ$ und folglich $(QDQ^T)^{2019} = QD^{2019}Q^T = A$ mit der reellen symmetrischne Matrix QDQ^T.

(VII) Betrachte Endomorphismen f und g eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

(a) $f^* = g^* \iff f = g$

(b) $f^* = g \iff f = g^*$

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $f^*g^* = gf \iff fg = g^*f^*$

(d) $f^*g^* = g^*f^* \iff fg = gf$

Erklärung: Die Aussagen (a) und (b) und (c) folgen durch direkte Rechnung aus den Grundeigenschaften $(h^*)^* = h$ und $(hk)^* = k^*h^*$ für alle Endomorphismen h und k. Dagegen ist (c) falsch, wie das Beispiel $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ zeigt.

(VIII) Sei $n > 1$. Wie viele selbstadjungierte orthogonale Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ existieren?

(a) 1

(b) 2^n

(c) 4^n

$\boxed{\textbf{(d)}}$ ∞

Erklärung: Jede orthogonale Spiegelung an einem Unterraum der Kodimension 1 ist ein selbstadjungierter orthogonaler Endomorphismus, und im Fall $n > 1$ existieren unendlich viele solche Unterräume; also ist (d) richtig.

(IX) Sei V ein Vektorraum der Dimension 3. Dann hat $\Lambda^2(S^2V)$ die Dimension

(a) 6.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ 15.

(c) 0.

(d) 3.

Erklärung: Für jeden Vektorraum W der Dimension n gilt $\dim(\Lambda^2 W) = \binom{n}{2}$ und $\dim(S^2W) = \binom{n+1}{2}$. Aus $\dim(V) = 3$ folgt daher $\dim(S^2V) = \binom{3+1}{2} = 6$ und daraus $\dim(\Lambda^2(S^2V)) = \binom{6}{2} = 15$.

(X) Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* für jeden K-Vektorraum V?

(a) $\forall\, v, w \in V\colon\ v \wedge w = -w \wedge v$ in $\Lambda^2 V$.

(b) $\forall\, v_1, v_2 \in V \smallsetminus \{0\}\ \exists\, w \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ v_1 \wedge w = v_2 \wedge w$ in $\Lambda^2 V$.

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $\forall\, \xi \in \Lambda^2 V\ \exists\, v, w \in V\colon\ v \wedge w = \xi$ in $\Lambda^2 V$.

(d) $\forall\, v \in V\ \exists\, w \in V\colon\ v \wedge w = 0$ in $\Lambda^2 V$.

Erklärung: Im Allgemeinen ist nicht jedes Element von $\Lambda^2 V$ ein reines Produkt der Form $v \wedge w$. (Siehe §12.6 der Vorlesung). Somit ist (c) die richtige Antwort.

Dagegen ist (a) eine Grundeigenschaft des äusseren Produkts. Die Aussage (b) gilt im Fall $v_1 = v_2$ mit $w = v_1$ und im Fall $v_1 \neq v_2$ mit $w = v_2 - v_1$ wegen $v_1 \wedge (v_2 - v_1) = v_1 \wedge v_2 = v_2 \wedge (-v_1) = v_2 \wedge (v_2 - v_1)$. Schliesslich gilt (d) immer mit $w = v$.

2. **(a)** *(5 Punkte)* Sei A eine reelle 6×6-Matrix mit charakteristischem Polynom $X^2(X-2)^4$ und Minimalpolynom $X^2(X-2)^2$. Bestimme alle möglichen Jordan-Normalformen von A.

(b) *(6 Punkte)* Bestimme die Jordan-Normalform J der Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^3$ so dass ${}_BM_B(A) = J$ ist.

(c) *(4 Punkte)* Zeige: Eine $n \times n$-Matrix ist nilpotent genau dann, wenn ihr charakteristisches Polynom gleich X^n ist.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom hat nur die Linearfaktoren $X - 0$ und $X - 2$, also gibt es nur Jordanblöcke zu den Eigenwerten 0 und 2.

Der Eigenwert 0 hat die algebraische Vielfachheit 2, und aus dem Minimalpolynom ersehen wir, dass der grösste zugehörige Jordan-Block die Grösse 2 hat. Also gibt es zum Eigenwert 0 genau einen Jordan-Block, und zwar der Grösse 2.

Der Eigenwert 2 hat die algebraische Vielfachheit 4, und aus dem Minimalpolynom ersehen wir, dass der grösste zugehörige Jordan-Block die Grösse 2 hat. Die einzigen Zerlegungen der Zahl 4 als Summe von Zahlen in der Menge $\{1, 2\}$ sind $4 = 2 + 2$ und $4 = 2 + 1 + 1$. Somit gibt es zum Eigenwert 2 entweder 2 Jordanblöcke der Grösse 2, oder 1 Jordanblock der Grösse 2 und 2 Jordanblöcke der Grösse 1.

Insgesamt gibt es also, bis auf Vertauschung der Blöcke, die folgenden beiden Möglichkeiten für die Jordan-Normalform:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gleich $\mathrm{char}_A(X) = (X-1)^3$, also hat A nur den Eigenwert 1. Wir sehen direkt, dass $A - I_3$ nicht Null ist, und rechnen:

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass die Jordan-Normalform von A aus einem Block der Grösse 1 und einem Block der Grösse 2 zum Eigenwert 1 besteht:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um B zu finden, bestimmen wir zuerst eine Basis des Eigenraums von A zum Eigenwert 1:

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Sodann wählen wir irgendeinen Vektor b_3 ausserhalb dieses Eigenraums. Dann ist $b_2 := (A - I_3)b_3$ ein von Null verschiedenes Element des Eigenraums, und ein beliebiges davon linear unabhängiges Element b_1 des Eigenraums gibt uns die gesuchte Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$. Konkret wählen wir zum Beispiel

$$b_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 := (A - I_3)b_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}, \quad b_1 := v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt ${}_BM_B(A) = J$.

(c) Betrachte eine $n \times n$-Matrix N. Ist ihr charakteristisches Polynom gleich X^n, so gilt nach dem Satz von Cayley-Hamilton $N^n = O$; also ist N nilpotent.

Sei umgekehrt N nilpotent, also $N^m = O$ für ein $m \geqslant 1$. Die Matrix N erfüllt also $P(N) = O$ für das Polynom $P(X) = X^m$. Daher muss das Minimalpolynom von N das Polynom X^m teilen. Da das charakteristische Polynom die gleichen irreduziblen Faktoren besitzt wie das Minimalpolynom, muss auch das charakteristische Polynom eine Potenz von X sein. Da es normiert vom Grad n ist, muss es folglich gleich X^n sein.

3. Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\ell_1, \ldots, \ell_m$ Linearformen auf V, die den Dualraum $V^\vee$ erzeugen.

(a) *(5 Punkte)* Zeige, dass die Formel

$$\langle v, w\rangle \ := \ \ell_1(v) \cdot \ell_1(w) + \ldots + \ell_m(v) \cdot \ell_m(w)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

(b) *(3 Punkte)* Finde eine Orthonormalbasis für dieses Skalarprodukt in dem Fall, dass $(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ eine Basis von $V^\vee$ ist.

(c) *(1 Punkt)* Formuliere die Definition der Darstellungsmatrix eines Skalarprodukts.

(d) *(6 Punkte)* Wir identifizieren Elemente von $(\mathbb{R}^3)^\vee$ mit Zeilenvektoren. Gegeben seien $\ell_1 := (1, 0, 2)$ und $\ell_2 := (2, 1, -1)$ und $\ell_3 := (-1, 1, 0)$. Bestimme die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts aus (a) bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle v_1 + \lambda v_2, v_3\rangle &= \sum_{i=1}^m \ell_i(v_1 + \lambda v_2)\ell_i(v_3) = \sum_{i=1}^m (\ell_i(v_1) + \lambda\ell_i(v_2))\ell_i(v_3) \\ &= \sum_{i=1}^m \ell_i(v_1)\ell_i(v_3) + \lambda \sum_{i=1}^m \ell_i(v_2)\ell_i(v_3) = \langle v_1, v_3\rangle + \lambda\langle v_2, v_3\rangle\end{aligned}$$

und

$$\langle v_1, v_2\rangle = \sum_{i=1}^m \ell_i(v_1)\ell_i(v_2) = \sum_{i=1}^m \ell_i(v_2)\ell_i(v_1) = \langle v_2, v_1\rangle.$$

Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear und symmetrisch. Ausserdem gilt immer

$$\langle v, v\rangle \;=\; \ell_1(v)^2 + \ldots + \ell_m(v)^2 \;\geqslant\; 0, \tag{1}$$

weil jeder Summand der rechten Seite $\geqslant 0$ ist.

Ist $v \neq 0$, so existiert bekanntlich eine Linearform $\ell \in V^\vee$ mit $\ell(v) \neq 0$. Da $\ell_1, \ldots, \ell_m$ den Dualraum $V^\vee$ erzeugen, ist $\ell = c_1\ell_1 + \ldots + c_m\ell_m$ für geeignete Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $c_1\ell_1(v) + \ldots + c_m\ell_m(v) = \ell(v) \neq 0$ und somit $\ell_i(v) \neq 0$ für mindestens ein i. Damit ist aber $\ell_i(v)^2 > 0$, und die rechte Seite von (1) ist somit ebenfalls > 0. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit.

Aliter: Betrachte die Abbildung

$$e\colon\; V \to \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto (\ell_i(v))_{i=1,\ldots,m}.$$

Da jede Koeffizientenfunktion ℓ_i linear ist, ist auch e linear. Nach Konstruktion ist dann $\langle v, w\rangle = \langle e(v), e(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf der rechten Seite das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Da dieses in jeder Variablen linear und e ebenfalls linear ist, ist folglich auch $\langle v, w\rangle$ in jeder Variablen linear. Offenbar ist es symmetrisch und seine Werte $\langle v, w\rangle = \langle e(v), e(w)\rangle$ sind immer $\geqslant 0$.

Sei schliesslich $v \neq 0$. Dann existiert bekanntlich eine Linearform $\ell \in V^\vee$ mit $\ell(v) \neq 0$. Nach Voraussetzung ist dann $\ell = c_1\ell_1 + \ldots + c_m\ell_m$ für geeignete Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $c_1\ell_1(v) + \ldots + c_m\ell_m(v) = \ell(v) \neq 0$ und somit $\ell_i(v) \neq 0$ für mindestens ein i. Damit ist aber auch $e(v) \neq 0$ und somit $\langle v, w\rangle = \langle e(v), e(w)\rangle > 0$. Daher ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit.

(b) Ist $(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ eine (geordnete) Basis von $V^\vee$, so sei $(v_1, \ldots, v_m)$ die zugehörige duale Basis von V. Nach Konstruktion gilt dann $\ell_i(v_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \ldots, m$. Für alle $i, j = 1, \ldots, m$ gilt dann

$$\langle v_i, v_j\rangle \;=\; \sum_{k=1}^m \ell_k(v_i)\cdot\ell_k(v_j) \;=\; \sum_{k=1}^m \delta_{ki}\cdot\delta_{kj} \;=\; \delta_{ij}.$$

Somit ist $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Orthonormalbasis von $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(c) Die Darstellungsmatrix eines Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (oder allgemeiner einer Bilinearform) bezüglich einer geordneten Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ ist die $n \times n$-Matrix

$$M_B(\beta) \;:=\; \big(\langle b_i, b_j \rangle\big)_{i,j=1,\dots,n}.$$

(d) Für die Standardbasisvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} \ell_1(e_1) &= 1, & \ell_1(e_2) &= 0, & \ell_1(e_3) &= 2 \\ \ell_2(e_1) &= 2, & \ell_2(e_2) &= 1, & \ell_2(e_3) &= -1 \\ \ell_3(e_1) &= -1, & \ell_3(e_2) &= 1, & \ell_3(e_3) &= 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 6,\ \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 1,\ \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = 0,$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = 2,\ \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = -1,\ \langle e_3, e_3 \rangle = 5.$$

Also ist das Ergebnis $M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Aliter: Betrachte die Matrix $L := \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $\langle v, w \rangle = (Lv)^T (Lw) = v^T L^T L w$. Daher ist die Darstellungsmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Standarbasis gleich

$$M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = L^T L = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. **(a)** *(1 Punkt)* Was ist eine QR-Zerlegung einer reellen $n \times n$-Matrix M?

(b) *(5 Punkte)* Berechne eine QR-Zerlegung der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) *(3 Punkte)* Sei C eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Beweise, dass je zwei Eigenvektoren von C zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(d) *(6 Punkte)* Seien A und B zwei reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$. Zeige: Es existiert eine orthogonale reelle $n \times n$-Matrix Q, so dass $Q^T A Q$ und $Q^T B Q$ beides Diagonalmatrizen sind.

Lösung:

(a) Die QR-Zerlegung besteht aus einer orthogonalen Matrix Q und einer reellen oberen Dreiecksmatrix R, so dass $M = QR$ ist.

(b) Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf die Spalten von M an, um Q zu finden. Seien v_1, v_2, v_3 die Spalten von M. Wir definieren

$$b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 := v_2 - \langle b_1, v_2 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 := v_3 - \langle b_2, v_3 \rangle b_2 - \langle b_1, v_3 \rangle b_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist Q die orthogonale Matrix

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und R ist die obere Dreiecksmatrix

$$R = Q^T M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion gilt $M = QR$.

(c) Seien v und w zwei Eigenvektoren von C zu verschiedenen Eigenwerten λ und μ. Weil C symmetrisch ist, gilt $\lambda\langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Cv, w \rangle = \langle v, Cw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$. Weil $\lambda \neq \mu$ ist, folgt $\langle v, w \rangle = 0$, also sind v und w orthogonal zueinander.

(d) Weil A reell und symmetrisch ist, existiert nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix R, so dass $R^T AR$ eine Diagonalmatrix ist. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Dann kann durch Umordnung der Spalten von R erreicht werden, dass $R^T AR$ eine Blockdiagonalmatrix

$$R^T AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}$$

ist, wobei jeweils n_i die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist. Zudem existiert eine Zerlegung $\mathbb{R}^n \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$. Sei nun $v \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$ für ein i. Dann gilt $A(Bv) = BAv = B(\lambda v) = \lambda Bv$, also ist $B(\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)) \subset \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$. Es folgt, dass die Matrix $R^T BR$ eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$R^T BR = \begin{pmatrix} B_1' & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_r' \end{pmatrix}$$

ist. Weil B symmetrisch ist, gilt dies auch für alle B_i'. Nach dem Spektralsatz existiert also für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ eine orthogonale Matrix S_i, so dass $S_i^T B_i' S_i$ eine Diagonalmatrix ist. Wir definieren die Blockdiagonalmatrix

$$S := \begin{pmatrix} S_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_r \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix S ist ebenfalls orthogonal. Dann ist $S^T R^T B R S$ eine Diagonalmatrix. Wegen $S_i^T \lambda_i I_{n_i} S_i = \lambda_i I_{n_i}$ ist $S^T R^T A R S = R^T A R$ ebenfalls eine Diagonalmatrix. Als Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist $Q := RS$ orthogonal und erfüllt die gewünschte Eigenschaft, dass $Q^T A Q$ und $Q^T B Q$ Diagonalmatrizen sind.

Aliter: Weil A reell und symmetrisch ist, folgt aus dem Spektralsatz, dass A diagonalisierbar ist und ihre Eigenräume orthogonal zueinander sind. Betrachte einen beliebigen Vektor v im Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Dann gilt $A(Bv) = BAv = B(\lambda v) = \lambda Bv$; also liegt auch Bv im Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Somit ist die Zerlegung $\mathbb{R}^n = \bigoplus \mathrm{Eig}_\lambda(A)$ invariant unter B.

Da B symmetrisch ist, ist der zugehörige Endomorphismus $L_B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Bv$ selbstadjungiert für das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Somit ist auch die Einschränkung $L_B|_{\mathrm{Eig}_\lambda(A)}$ selbstadjungiert für das induzierte Skalarprodukt. Nach dem Spektralsatz ist diese Einschränkung also diagonalisierbar und ihre Eigenräume sind orthogonal zueinander.

Für jeden Eigenwert λ von A und jeden Eigenwert μ von $L_B|_{\mathrm{Eig}_\lambda(A)}$ wähle eine Orthonormalbasis des Eigenraums von $L_B|_{\mathrm{Eig}_\lambda(A)}$ zum Eigenwert μ. Diese Basisvektoren sind dann gemeinsame Eigenvektoren von A und B. Indem wir λ und μ variieren, erhalten wir so eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, die aus gemeinsamen Eigenvektoren von A und B bestehen.

Füge diese Orthonormalbasis zu einer Matrix Q zusammen. Dann ist Q orthogonal und $Q^T A Q$ und $Q^T B Q$ beides Diagonalmatrizen, wie gewünscht.

5. Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so dass $f^n = \mathrm{id}_V$ gilt für ein $n \geqslant 1$.

(a) *(3 Punkte)* Zeige, dass durch

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle \;:=\; \sum_{i=0}^{n-1} \langle f^i(v), f^i(w)\rangle$$

ein weiteres Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) *(3 Punkte)* Welche Eigenschaft hat f bezüglich $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$? Folgere daraus, dass f diagonalisierbar ist.

(c) *(2 Punkte)* Zeige mit Hilfe des Minimalpolynoms, dass f diagonalisierbar ist.

(d) *(7 Punkte)* Betrachte den Fall $V = \mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Bestimme $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für den Endomorphismus $f\colon v \mapsto Av$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und ein geeignetes $n \geqslant 1$.

Lösung:

(a) Für jedes $i \geqslant 0$ ist die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle f^i(v), f^i(w)\rangle$ eine hermitesche Form. Da die Summe zweier hermitescher Formen wieder eine hermitesche Form ist, folgt, dass $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ eine hermitesche Form ist. Sei nun $v \in V \setminus \{0\}$. Wegen der positiven Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gilt dann $\langle f^i(v), f^i(v)\rangle > 0$ für alle $i \geqslant 1$. Also ist auch $\langle\!\langle v, v\rangle\!\rangle = \sum_{i=0}^{n-1}\langle f^i(v), f^i(v)\rangle > 0$. Es folgt, dass $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ eine positiv definite hermitesche Form, also ein Skalarprodukt ist.

(b) Für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle\!\langle f(v), f(w)\rangle\!\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}\langle f^i(f(v)), f^i(f(w))\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n}\langle f^j(v), f^j(w)\rangle.$$

Wegen $f^n = \mathrm{id}_V$ gilt dabei $\langle f^n(v), f^n(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Deshalb gilt

$$\langle\!\langle f(v), f(w)\rangle\!\rangle \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\langle f^j(v), f^j(w)\rangle \;=\; \langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle.$$

Somit ist f unitär bezüglich $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$.
Jeder unitäre Endomorphismus ist normal und folglich nach dem Spektralsatz diagonalisierbar. Es folgt daher, dass f diagonalisierbar ist.

(c) Die Gleichung $f^n = \mathrm{id}_V$ bedeutet $P(f) = 0$ für das Polynom $P(X) := X^n - 1$. Also ist das Minimalpolynom von f ein Teiler von P. Aber $P \in \mathbb{C}[X]$ zerfällt in die Linearfaktoren $X - e^{2\pi ik/n}$ der Multiplizität 1 für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Somit zerfällt auch das Minimalpolynom in paarweise einfache Linearfaktoren, und folglich ist f diagonalisierbar.

(d) Wir berechnen zuerst einige Potenzen von A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus $A^3 = -I_2$ folgt $A^6 = I_2$ und

$$A^4 = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also können wir $n = 6$ nehmen. Damit ist

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{5} \langle A^i v, A^i w \rangle \;=\; \sum_{i=0}^{5} (A^i v)^* (A^i w) \;=\; \sum_{i=0}^{5} v^* (A^i)^* A^i w \;=\; v^* B w$$

mit

$$B \;:=\; \sum_{i=0}^{5} (A^i)^* A^i \;=\; \ldots \;=\; \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sodann haben f und A das charakteristische Polynom

$$X^2 - X + 1 \;=\; \big(X - \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\big)\big(X - \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\big).$$

Einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ finden wir durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda I_2)v = 0$ mit dem Resultat $\binom{1}{\lambda}$. Dessen Betragsquadrat bezüglich $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ ergibt sich zu

$$\langle\!\langle \tbinom{1}{\lambda}, \tbinom{1}{\lambda} \rangle\!\rangle \;=\; \tbinom{1}{\lambda}^* \cdot B \cdot \tbinom{1}{\lambda} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \bar\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \;=\; \ldots \;=\; 12.$$

Also bilden die Vektoren $\frac{1}{2\sqrt{3}}\binom{1}{\lambda}$ für $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ eine Basis aus bezüglich $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ normierten Eigenvektoren von f. Diese sind bereits orthogonal bezüglich $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, da es sich um Eigenvektoren eines normalen Operators handelt. Sie bilden also die gesuchte Orthonormalbasis.

6. Seien U und V zwei K-Vektorräume.

(a) *(2 Punkte)* Formuliere die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $U \otimes V$.

(b) *(6 Punkte)* Beweise: Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\Phi : \mathrm{End}(U) \otimes \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(U \otimes V),$$

sodass für alle $f \in \mathrm{End}(U)$ und $g \in \mathrm{End}(V)$ gilt:

$$\forall u \in U \;\forall v \in V\colon \quad \Phi(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)\,.$$

(c) *(7 Punkte)* Betrachte den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ und den von der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dargestellten Endomorphismus L_A. Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume des Endomorphismus $\varphi := \Phi(L_A \otimes L_A)$ von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$.

Lösung:

(a) Das Tensorprodukt besteht aus einem K-Vektorraum $U \otimes V$ und einer bilinearen Abbildung $\kappa\colon U \times V \to U \otimes V$ mit der *universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $\varphi\colon U \times V \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon U \otimes V \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & W \\ & U \otimes V \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{End}(U) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(U \otimes V),\ (f, g) \mapsto f \otimes g,$$

wobei $f \otimes g$ der eindeutige Endomorphismus von $U \otimes V$ ist mit

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V,$$

siehe die Proposition zur Funktorialität in Abschnitt 12.3 der Zusammenfassung. Man prüft direkt, dass φ bilinear ist; zum Beispiel gilt für beliebige Endomorphismen $f_1, f_2 \in \mathrm{End}(U)$ und $g \in \mathrm{End}(V)$

$$\begin{aligned} ((f_1 + f_2) \otimes g)(u \otimes v) &= (f_1 + f_2)(u) \otimes g(v) \\ &= (f_1(u) + f_2(u)) \otimes g(v) \\ &= f_1(u) \otimes g(v) + f_2(u) \otimes g(v) \\ &= (f_1 \otimes g)(u \otimes v) + (f_2 \otimes g)(u \otimes v), \end{aligned}$$

also mit der Proposition zur Funktorialität $(f_1 + f_2) \otimes g = (f_1 \otimes g) + (f_2 \otimes g)$, also $\varphi((f_1+f_2), g) = \varphi(f_1, g)+\varphi(f_2, g)$. Die anderen Bilinearitätseigenschaften von φ folgen ähnlich.

Aus der universellen Eigenschaft von $(\mathrm{End}(U) \otimes \mathrm{End}(V), \kappa)$ folgt, dass eine eindeutige lineare Abbildung

$$\Phi : \mathrm{End}(U) \otimes \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(U \otimes V)$$

existiert mit $\Phi \circ \kappa = \varphi$, also mit $\Phi(f \otimes g) = \varphi(f, g) = f \otimes g$, also mit

$$\forall u \in U\ \forall v \in V\colon\ \Phi(f \otimes g)(u \otimes v) = (f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \cdot g(v)$$

für alle $f \in \mathrm{End}(U)$ und $g \in \mathrm{End}(V)$.

(c) Betrachte die Standardbasis $e_1 = \binom{1}{0}$ und $e_2 = \binom{0}{1}$ von $\mathbb{Q}^2$. Dann gilt $Ae_i = e_{3-i}$ für jedes $i \in \{1,2\}$. Für den Endomorphismus $\varphi := \Phi(L_A \otimes L_A)$ von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$ gilt daher

$$\varphi(e_i \otimes e_j) = Ae_i \otimes Ae_j = e_{3-i} \otimes e_{3-j}$$

für alle $i, j \in \{1,2\}$. Also vertauscht φ den Vektor $e_1 \otimes e_1$ mit dem Vektor $e_2 \otimes e_2$, und den Vektor $e_1 \otimes e_2$ mit dem Vektor $e_2 \otimes e_1$. Folglich sind

$$\begin{aligned} b_1 &:= e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2, \\ b_2 &:= e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und

$$\begin{aligned} b_3 &:= e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2, \\ b_4 &:= e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert -1. Ausserdem ist $(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$. Da die Basiswechselmatrix von dieser Basis zu $B := (b_1, b_2, b_3, b_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, ist auch B eine Basis. Also ist (b_1, b_2) eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 1 und (b_3, b_4) eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert -1 von φ.