Lineare Algebra II - Prüfung Winter 2020

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Welche der folgenden reellen Matrizen ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(II) Sei $V := \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller reellen Polynome in einer Variablen X. Welche der folgenden Formeln definiert *kein* Skalarprodukt auf V?

(a) $(f, g) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)g^{(n)}(0)$, wobei $(\ )^{(n)}$ die n-te Ableitung bezeichnet.

(b) $(f, g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$.

(c) $(f, g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)e^{-n}$.

(d) $(f, g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})g(\frac{1}{n})e^{-n}$.

(III) Sei A eine reelle symmetrische Matrix. In welchem Fall existiert eine reelle symmetrische Matrix B mit $B^{2020} = A$?

(a) Genau dann, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

(b) Genau dann, wenn A positiv semidefinit ist.

(c) Genau dann, wenn alle Einträge von A in $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ liegen.

(d) Immer.

(IV) Betrachte Endomorphismen f und g eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V. Welcher der folgenden Endomorphismen ist im Allgemeinen *nicht* selbstadjungiert?

(a) f^*f

(b) $f^*g + fg^*$

(c) $f^*g + g^*f$

(d) $(f - f^*)^2$

(V) Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geqslant 1$. Wie viele orthogonale Endomorphismen von V existieren, die eine gegebene ungeordnete Orthonormalbasis B in sich abbilden?

(a) 1

(b) $n!$

(c) 2^n

(d) $2^n n!$

(VI) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} z & z \\ z & iz \end{smallmatrix}\right)$ unitär?

(a) Nie.

(b) Für alle z mit $|z| = 1/\sqrt{2}$.

(c) Für alle $z \in \mathbb{R}$.

(d) Für $z = \pm i$.

(VII) Sei U ein Unterraum eines Vektorraums V, und sei $\pi\colon V \twoheadrightarrow V/U$ die Projektion auf den Quotientenvektorraum. Die universelle Eigenschaft von $(V/U, \pi)$ besagt für alle Vektorräume W:

(a) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(W, V/U)\ \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(W, V)\colon \pi \circ \bar{\varphi} = \varphi$

(b) $\forall \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)\ \exists! \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)\colon \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

(c) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)\colon \varphi|_U = 0 \Longrightarrow \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)\colon \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

(d) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(W, V)\colon\ \mathrm{Im}(\varphi) \subset U \Rightarrow \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)\colon \bar{\varphi} \circ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_W$

(VIII) Für jedes $d \geqslant 0$ bezeichne V_d einen Vektorraum der Dimension d. Welcher der folgenden Vektorräume hat *nicht* die Dimension 6?

(a) $V_2 \otimes \mathrm{Hom}(V_3, V_1)$

(b) $S^6(V_2)$

(c) $\Lambda^2(\mathrm{Hom}(V_2, V_2))$

(d) $V_6 \otimes S^0 V_0$

(IX) Sei A eine komplexe quadratische Matrix, deren Jordan-Normalform zu jedem Eigenwert genau einen Block enthält. Dann ...

(a) ist A diagonalisierbar.

(b) ist das charakteristische Polynom von A gleich seinem Minimalpolynom.

(c) besitzt das Minimalpolynom keine mehrfachen Nullstellen.

(d) ist das Minimalpolynom irreduzibel.

(X) Sei W ein eindimensionaler reeller Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Durch welche Eigenschaft bestimmt jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus W$ einen eindeutigen Vektor $w \in W$?

(a) $\langle w, v - w \rangle = 0$.

(b) $\langle w, v \rangle = 0$.

(c) $\langle w, v \rangle = 1$.

(d) $v - w \perp W$

2. **(a)** *(4 Punkte)* Sei M eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom $(X-2)^3(X-i)^2$ und Minimalpolynom vom Grad 3. Bestimme alle möglichen Jordannormalformen von M bis auf Vertauschung der Jordanblöcke.

(b) *(8 Punkte)* Bestimme die Jordannormalform J der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^3$ mit ${}_B M_B(A) = J$.

(c) *(3 Punkte)* Sei C eine invertierbare quadratische Matrix. Drücke das charakteristische Polynom von C^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von C aus.

3. Für $n \geqslant 1$ betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathfrak{o}(n) := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^T = -A \right\}.$$

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge.

(a) *(2 Punkte)* Zeige: Für je zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

(b) *(5 Punkte)* Beweise, dass die Formel $\langle A, B\rangle := -\,\mathrm{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{o}(n)$ induziert.

(c) *(5 Punkte)* Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{o}(n)$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(d) *(3 Punkte)* Bestimme für jedes $A \in \mathfrak{o}(n)$ die Adjungierte der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$f_A\colon \mathfrak{o}(n) \longrightarrow \mathfrak{o}(n),\;\; B \mapsto AB - BA$$

bezüglich des obigen Skalarprodukts.

4. **(a)** *(2 Punkte)* Zeige, dass für jede reelle Matrix A die Matrix A^TA positiv semidefinit ist.

(b) *(4 Punkte)* Beweise, dass eine symmetrische reelle Matrix genau dann positiv semidefinit ist, wenn alle ihre Eigenwerte nichtnegativ sind.

(c) *(2 Punkte)* Wie ist die Singulärwert-Zerlegung einer reellen Matrix definiert?

(d) *(7 Punkte)* Bestimme die Singulärwert-Zerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Für jedes $n > 0$ sei V_n der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n in einer Variablen. Sie dürfen voraussetzen, dass die Formel

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}g(k)$$

eine hermitesche Form auf V_n definiert.

(a) *(2 Punkte)* Zeige, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b) *(6 Punkte)* Wende im Spezialfall $n = 2$ das Gram-Schmidt Verfahren bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf die geordnete Basis $1, x, x^2$ von V_2 an.

(c) *(3 Punkte)* Welche Eigenschaft besitzt der Endomorphismus

$$\varphi\colon f(X) \mapsto f(n - X)$$

von V_n bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$? Folgere daraus, dass φ diagonalisierbar ist.

(d) *(4 Punkte)* Sei ψ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums W. Zeige, dass auf W ein Skalarprodukt existiert, bezüglich dem ψ normal ist.

6. Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension n. Ein Element der Form $v \wedge w \in \Lambda^2 V$ für $v, w \in V$ heisst ein *reines Wedge-Produkt*.

(a) *(2 Punkte)* Formuliere die universelle Eigenschaft der zweiten alternierenden Potenz von V.

(b) *(4 Punkte)* Beweise, dass eine zweite alternierende Potenz von V eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie ist.

(c) *(5 Punkte)* Zeige im Fall $n = 3$, dass jedes Element von $\Lambda^2 V$ ein reines Wedge-Produkt ist.

(d) *(4 Punkte)* Für $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$ schreibe das Element

$$t := \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in \Lambda^2 V$$

als reines Wedge-Produkt.