Lineare Algebra II - Prüfung Winter 2020

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Welche der folgenden reellen Matrizen ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Erklärung: Die Matrix in (b) hat das charakteristische Polynom $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$, welches in paarweise verschiedene normierte Linearfaktoren zerfällt. Somit ist die Matrix diagonalisierbar.

Dagegen hat die Matrix in (c) das charakteristische Polynom $X^3 + X = X(X^2+1)$ mit einem über $\mathbb{R}$ irreduziblen Faktor vom Grad 2 und ist daher nicht diagonalisierbar. Die Matrix in (a) ist nicht diagonalisierbar, weil sie den Eigenwert 1 mit der arithmetischen Vielfachheit 2, aber der geometrischen Vielfachheit 1 hat. Die Matrix in (d) ist nicht diagonalisierbar, weil sie den Eigenwert 0 mit der arithmetischen Vielfachheit 3, aber der geometrischen Vielfachheit 1 hat.

(II) Sei $V := \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller reellen Polynome in einer Variablen X. Welche der folgenden Formeln definiert *kein* Skalarprodukt auf V?

(a) $(f,g) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)g^{(n)}(0)$, wobei $(\ )^{(n)}$ die n-te Ableitung bezeichnet.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $(f,g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$.

(c) $(f,g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)e^{-n}$.

(d) $(f,g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})g(\frac{1}{n})e^{-n}$.

Erklärung: Die Reihe in (b) divergiert für alle $f, g \neq 0$, zum Beispiel schon für $f = g = 1$. Damit ist (b) die richtige Antwort.

Dagegen konvergiert die Reihe in (a), weil für jede Wahl von f und g fast alle Terme verschwinden, und die Reihe in (c) konvergiert, weil der Wert $f(n)g(n)$

höchstens polynomial mit n wächst und dies durch den exponentiellen Faktor e^{-n} kompensiert wird. Die Reihe in (d) konvergiert erst recht, weil der Wert $f(\frac{1}{n})g(\frac{1}{n})$ für $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Alle übrigen Eigenschaften des Skalarprodukts sind dann auch erfüllt.

(III) Sei A eine reelle symmetrische Matrix. In welchem Fall existiert eine reelle symmetrische Matrix B mit $B^{2020} = A$?

(a) Genau dann, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ Genau dann, wenn A positiv semidefinit ist.

(c) Genau dann, wenn alle Einträge von A in $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ liegen.

(d) Immer.

Erklärung: Die richtige Antwort ist (b), denn: Für jede solche Matrix B existiert nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, so dass $D := Q^T BQ$ eine Diagonalmatrix ist, sagen wir mit den Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n$. Dann ist $Q^T AQ = Q^T B^{2020} Q = (Q^T BQ)^{2020} = D^{2020}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $d_1^{2020}, \ldots, d_n^{2020}$. Da 2020 gerade ist, sind diese Diagonaleinträge $\geqslant 0$. Somit ist D^{2020} und daher auch A positiv semidefinit.

Sei umgekehrt A positiv semidefinit. Nach dem Spektralsatz wählen wir eine orthogonale Matrix Q, so dass $Q^T AQ$ eine Diagonalmatrix ist. Diese Matrix ist dann ebenfalls positiv semidefinit; ihre Diagonaleinträge sind daher $\geqslant 0$. Indem wir aus diesen eine reelle 2020-te Wurzel ziehen, finden wir eine reelle Diagonalmatrix D mit $D^{2020} = Q^T AQ$. Nun ist $B := QDQ^T$ eine reelle symmetrische Matrix mit $B^{2020} = (QDQ^T)^{2020} = QD^{2020}Q^T = QQ^T AQQ^T = A$, wie gewünscht.

(IV) Betrachte Endomorphismen f und g eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V. Welcher der folgenden Endomorphismen ist im Allgemeinen *nicht* selbstadjungiert?

(a) f^*f

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $f^*g + fg^*$

(c) $f^*g + g^*f$

(d) $(f - f^*)^2$

Erklärung: Ein Endomorphismus h ist genau dann selbstadjungiert, wenn $h^* = h$ ist. In den Fällen (a) und (c) und (d) folgt dies durch direkte Rechnung aus den Grundeigenschaften $(h^*)^* = h$ und $(hk)^* = k^*h^*$ für alle Endomorphismen h und k. Dagegen ist (b) falsch, wie das Beispiel $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ zeigt.

(V) Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geqslant 1$. Wie viele orthogonale Endomorphismen von V existieren, die eine gegebene ungeordnete Orthonormalbasis B in sich abbilden?

(a) 1

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $n!$

(c) 2^n

(d) $2^n n!$

Erklärung: Jeder solche Endomorphismus φ induziert eine Abbildung $B \to B$. Als orthogonaler Endomorphismus muss φ ein Automorphismus sein; somit muss die induzierte Abbildung $B \to B$ bijektiv sein. Umgekehrt setzt sich jede bijektive Abbildung $B \to B$ zu einem eindeutigen Automorphismus fort, und da B eine Orthonormalbasis ist, ist dieser automatisch orthogonal. Somit ist die gesuchte Zahl gleich der Anzahl $n!$ der Permutationen von B.

(VI) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} z & z \\ z & iz \end{smallmatrix}\right)$ unitär?

$\boxed{\textbf{(a)}}$ Nie.

(b) Für alle z mit $|z| = 1/\sqrt{2}$.

(c) Für alle $z \in \mathbb{R}$.

(d) Für $z = \pm i$.

Erklärung: Eine komplexe quadratische Matrix ist genau dann unitär, wenn ihre Spalten ein Orthonormalsystem bilden. Im vorliegenden Fall ist das Skalarprodukt der beiden Spalten $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} z \\ z \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z \\ iz \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = \bar{z} \cdot z + \bar{z} \cdot iz = |z|^2(1+i)$. Damit dieses gleich Null ist, muss z gleich Null sein. Dann ist aber $\left(\begin{smallmatrix} z \\ z \end{smallmatrix}\right)$ der Nullvektor, und die Spalten bilden kein Orthonormalsystem. Daher ist (a) die korrekte Antwort.

Dagegen garantiert (b) nur, dass die Spalten den Betrag 1 haben. Die Antwort (c) ist für $z = 0$ sicherlich falsch. Weil der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix}\right)$ nicht Betrag 1 hat, ist auch Antwort (d) falsch.

(VII) Sei U ein Unterraum eines Vektorraums V, und sei $\pi\colon V \twoheadrightarrow V/U$ die Projektion auf den Quotientenvektorraum. Die universelle Eigenschaft von $(V/U, \pi)$ besagt für alle Vektorräume W:

(a) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(W, V/U)\ \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(W, V)\colon \pi \circ \bar{\varphi} = \varphi$

(b) $\forall \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)\ \exists! \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)\colon \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)\colon \varphi|_U = 0 \Longrightarrow \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)\colon \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

(d) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(W, V)\colon\ \mathrm{Im}(\varphi) \subset U \Rightarrow \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)\colon \bar{\varphi} \circ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_W$

Erklärung: Die Aussage (c) ist die universelle Eigenschaft. Die Aussage (a) ist falsch, denn im Allgemeinen existieren mehrere solche $\bar{\varphi}$, wie man am Beispiel $U = V$ sieht. Die Aussage (b) ist zwar wahr, gilt aber für jeden Homomorphismus $V \to V/U$. Die Aussage (d) ist falsch, denn für jede solche Abbildung φ gilt $\pi \circ \varphi = 0$.

(VIII) Für jedes $d \geqslant 0$ bezeichne V_d einen Vektorraum der Dimension d. Welcher der folgenden Vektorräume hat *nicht* die Dimension 6?

(a) $V_2 \otimes \mathrm{Hom}(V_3, V_1)$

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $S^6(V_2)$

(c) $\Lambda^2(\mathrm{Hom}(V_2, V_2))$

(d) $V_6 \otimes S^0 V_0$

Erklärung: Aus den bekannten Formeln $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ und $\dim(S^n V) = \binom{\dim(V)+n-1}{n}$ sowie $\dim(\Lambda^n V) = \binom{\dim(V)}{n}$ folgt, dass der Raum in (b) die Dimension 7 und alle übrigen die Dimension 6 haben.

(IX) Sei A eine komplexe quadratische Matrix, deren Jordan-Normalform zu jedem Eigenwert genau einen Block enthält. Dann ...

(a) ist A diagonalisierbar.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ ist das charakteristische Polynom von A gleich seinem Minimalpolynom.

(c) besitzt das Minimalpolynom keine mehrfachen Nullstellen.

(d) ist das Minimalpolynom irreduzibel.

Erklärung: Die Vielfachheit einer Nullstelle im Minimalpolynom ist die Grösse des grössten Jordan-Blocks zu diesem Eigenwert. Wenn zu jedem Eigenwert nur ein Block existiert, ist dieser Block der grösste Jordan-Block, also muss die Vielfachheit des Eigenwerts als Nullstelle des Minimalpolynoms gleich der algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes sein. Das bedeutet, dass das Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom ist, also ist (b) richtig. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Gegenbeispiel zu (a), (c) und (d).

(X) Sei W ein eindimensionaler reeller Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Durch welche Eigenschaft bestimmt jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus W$ einen eindeutigen Vektor $w \in W$?

(a) $\langle w, v - w \rangle = 0$.

(b) $\langle w, v \rangle = 0$.

(c) $\langle w, v \rangle = 1$.

$\boxed{\textbf{(d)}}$ $v - w \perp W$

Erklärung: Die Aussage (d) bedeutet die Zerlegung $v = w + (v - w)$ mit Vektoren $w \in W$ und $v - w \in W^{\perp}$, so dass also w die orthogonale Projektion von v auf w ist und damit eindeutig existiert. Somit ist (d) die richtige Antwort.

Dieselbe orthogonale Projektion w erfüllt auch die Aussage (a), aber der Nullvektor $w = 0$ tut dies ebenso; darum definiert diese Aussage kein eindeutiges w. Schliesslich sind die Aussagen (b) und (c) invariant unter Ersetzen von w durch $w + u$ für einen beliebigen Vektor u in dem eindimensionalen orthogonalen Komplement $\{v\}^{\perp}$, bestimmen also kein eindeutiges w.

2. **(a)** *(4 Punkte)* Sei M eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom $(X-2)^3(X-i)^2$ und Minimalpolynom vom Grad 3. Bestimme alle möglichen Jordannormalformen von M bis auf Vertauschung der Jordanblöcke.

(b) *(8 Punkte)* Bestimme die Jordannormalform J der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^3$ mit ${}_BM_B(A) = J$.

(c) *(3 Punkte)* Sei C eine invertierbare quadratische Matrix. Drücke das charakteristische Polynom von C^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von C aus.

Lösung:

(a) Da das Minimalpolynom dieselben Nullstellen wie das charakteristische Polynom besitzt, gibt es dafür genau die Möglichkeiten

$$(X-2)^2(X-i) \quad \text{und} \quad (X-2)(X-i)^2.$$

Im ersten Fall gehört zum Eigenwert 2 ein Jordanblock der Grösse 2×2. Da dieser Eigenwert die arithmetische Multiplizität 3 hat, kommt dann noch ein Jordanblock der Grösse 1×1 hinzu. Ausserdem haben alle Jordanblöcke zum Eigenwert i die Grösse 1×1. Die Jordannormalform lautet daher bis auf Vertauschung der Jordanblöcke

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right).$$

Im zweiten Fall haben alle Jordanblöcke zum Eigenwert 2 die Grösse 1×1. Ausserdem gehört zum Eigenwert i ein Jordanblock der Grösse 2×2. Da die arithmetische Multiplizität 2 dieses Eigenwerts damit bereits ausgeschöpft wird, lautet die Jordannormalform daher bis auf Vertauschung der Jordanblöcke

$$\left(\begin{array}{c|c|c|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right).$$

(b) Das charakteristische Polynom von A berechnet sich zu

$$\mathrm{char}_A(X) = \det(XI_3 - A) = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1).$$

Dieses zerfällt in Linearfaktoren mit den Eigenwerten 1 und -1 mit den respektiven arithmetischen Multiplizitäten 2 und 1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A - I_3)v = 0$. Da die Matrix $A - I_3$ zwei linear unabhängige Spalten besitzt, hat dieser Eigenraum höchstens die Dimension 1. Insbesondere stimmt die geometrische Multiplizität dieses Eigenwerts nicht mit der arithmetischen Multiplizität 2 überein, und die Matrix ist nicht diagonalisierbar. Für ihre Jordannormalform gibt es daher bis auf Vertauschung der Jordanblöcke nur die Möglichkeit

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sodann ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A + I_3)v = 0$. Eine explizite Rechnung zeigt, dass dieser 1-dimensional ist mit der Basis

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung des Eigenraums zum Eigenwert 1 können wir auslassen, indem wir direkt den entsprechenden Hauptraum bestimmen. Dieser ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A - I_3)^2 v = 0$. Wegen

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

hat dieser die Basis

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da der entsprechende Eigenraum nur 1-dimensional ist, erfüllt einer dieser Vektoren nicht schon die Gleichung $(A - I_3)v = 0$. Konkret ist zum Beispiel

$$v_2 := (A - I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ungleich Null. Mit $B := (v_1, v_2, v_3)$ gilt dann nach Konstruktion ${}_BM_B(A) = J$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_{C^{-1}}(X) &= \det(XI_n - C^{-1}) \\ &= \det(XC - I_n)\det(C^{-1}) \\ &= (-X)^n \det(X^{-1}I_n - C)\det(C^{-1}) \\ &= (-X)^n \,\mathrm{char}_C(X^{-1})\det(C^{-1}). \end{aligned}$$

Alternative Darstellung: Ist $\mathrm{char}_C(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$, so ist $\mathrm{char}_{C^{-1}}(X) = \frac{1}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}X + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n}X^{n-1} + X^n$.

3. Für $n \geqslant 1$ betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathfrak{o}(n) := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^T = -A \right\}.$$

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge.

(a) *(2 Punkte)* Zeige: Für je zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

(b) *(5 Punkte)* Beweise, dass die Formel $\langle A, B\rangle := -\,\mathrm{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{o}(n)$ induziert.

(c) *(5 Punkte)* Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{o}(n)$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(d) *(3 Punkte)* Bestimme für jedes $A \in \mathfrak{o}(n)$ die Adjungierte der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$f_A\colon \mathfrak{o}(n) \longrightarrow \mathfrak{o}(n),\ B \mapsto AB - BA$$

bezüglich des obigen Skalarprodukts.

Lösung:

(a) Für jede Matrix X schreiben wir X_{ij} für den Eintrag an der Stelle (i,j). Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt dann

$$\mathrm{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ki}A_{ik} = \mathrm{Spur}(BA).$$

(b) Seien $A, B, C \in \mathfrak{o}(n)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle aA + B, C\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}((aA+B)C)_{ii} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(aA_{ik} + B_{ik})C_{ki}\\ &= -a\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{ki} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{ik}C_{ki}\\ &= a\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle\end{aligned}$$

und daher ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im ersten Argument linear. Die Teilaufgabe (a) zeigt die Symmetrie $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$. Daraus schliessen wir, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch im zweiten Argument linear, also symmetrisch und bilinear ist. Die Rechnung

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle = -\,\mathrm{Spur}(AA) = \mathrm{Spur}((-A)A) = \mathrm{Spur}(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A^T)_{ik}A_{ki}\\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}A_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}^2\end{aligned}$$

zeigt $\langle A, A\rangle \geqslant 0$ und $\langle A, A\rangle = 0$ genau dann, wenn $A = 0$ ist.

Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein reelles Skalarprodukt auf $\mathfrak{o}(n)$.

(c) Für eine beliebige Matrix $A = (A_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt $A^T = (A_{ji})_{i,j}$, also $A^T = -A$ genau dann, wenn $A_{ji} = -A_{ij}$ ist für alle $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Im Fall $i = j$ bedeutet dies $A_{ii} = -A_{ii}$, was in $\mathbb{R}$ zu $A_{ii} = 0$ äquivalent ist. Für allgemeine i,j geht die Gleichung unter Vertauschen von i und j in sich über. Wir müssen die Gleichung $A_{ji} = -A_{ij}$ daher nur noch für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$ beachten. (Diese bedeutet, dass alle Einträge von A unterhalb der Diagonalen das Negative der an der Diagonalen gespiegelten Einträge oberhalb der Diagonalen sind.)

Für jedes Paar (i,j) mit $1 \leqslant i,j \leqslant n$ bezeichne E_{ij} die Matrix mit einer 1 an der Stelle (i,j) und allen anderen Einträgen gleich 0. Für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$ setze $V_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$. Die obigen Überlegungen zeigen dann

$$A \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}E_{ij} \;=\; \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (A_{ij}E_{ij} - A_{ij}E_{ji}) \;=\; \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_{ij}V_{ij}.$$

Dabei sind die Koeffizienten A_{ij} bereits durch A bestimmt; folglich bilden die Matrizen V_{ij} für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$ eine Basis von $\mathfrak{o}(n)$.

Zur Berechnung ihrer Skalarprodukte benutzen wir die Formel

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$$

für alle i,j,k,ℓ. Für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$ und $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$ folgt

$$\begin{aligned}
\langle V_{ij}, V_{k\ell}\rangle &= -\operatorname{Spur}(V_{ij}V_{k\ell}) = -\operatorname{Spur}((E_{ij}-E_{ji})(E_{k\ell}-E_{\ell k}))\\
&= -\operatorname{Spur}(E_{ij}E_{k\ell} - E_{ji}E_{k\ell} - E_{ij}E_{\ell k} + E_{ji}E_{\ell k})\\
&= -\operatorname{Spur}(\delta_{jk}E_{i\ell}) + \operatorname{Spur}(\delta_{ik}E_{j\ell}) + \operatorname{Spur}(\delta_{j\ell}E_{ik}) - \operatorname{Spur}(\delta_{i\ell}E_{jk})\\
&= -\delta_{jk}\delta_{i\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{j\ell}\delta_{ik} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}\\
&= 2\delta_{j\ell}\delta_{ik} - 2\delta_{i\ell}\delta_{jk}\\
&= 2\delta_{j\ell}\delta_{ik}
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Bedingungen $i < j$ und $k < \ell$ ausgenutzt haben. Die Rechnung zeigt, dass unsere Basisvektoren zueinander orthogonal sind. Ausserdem gilt für jeden einzelnen

$$\|V_{ij}\|^2 = \langle V_{ij}, V_{ij}\rangle = 2\delta_{jj}\delta_{ii} = 2.$$

Durch Normieren erhalten wir also die gesuchte Orthonormalbasis

$$B_{ij} := \frac{1}{\sqrt{2}}V_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji}) \quad \text{für alle } 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

von $\mathfrak{o}(n)$.

(d) Für alle $B, C \in \mathfrak{o}(n)$ berechnen wir, unter Benutzung der Definitionen von $\langle\ ,\ \rangle$ und f_A, der Linearität der Spur und der Bilinearität des Matrixprodukts:

$$\begin{aligned}
\langle f_A(B), C\rangle &= -\operatorname{Spur}((AB - BA)C) \\
&= -\operatorname{Spur}(ABC - BAC) \\
&= -\operatorname{Spur}(ABC) + \operatorname{Spur}(BAC) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} -\operatorname{Spur}(BCA) + \operatorname{Spur}(BAC) \\
&= -\operatorname{Spur}(BCA - BAC) \\
&= -\operatorname{Spur}(B(CA - AC)) \\
&= \langle B, -f_A(C)\rangle.
\end{aligned}$$

Somit gilt $f_A^* = -f_A$.

4. **(a)** *(2 Punkte)* Zeige, dass für jede reelle Matrix A die Matrix A^TA positiv semidefinit ist.

(b) *(4 Punkte)* Beweise, dass eine symmetrische reelle Matrix genau dann positiv semidefinit ist, wenn alle ihre Eigenwerte nichtnegativ sind.

(c) *(2 Punkte)* Wie ist die Singulärwert-Zerlegung einer reellen Matrix definiert?

(d) *(7 Punkte)* Bestimme die Singulärwert-Zerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Wegen $(A^TA)^T = A^TA$ ist A^TA symmetrisch. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$x^TA^TAx = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geqslant 0,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Also ist A^TA positiv semidefinit.

(b) Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix.

Angenommen A sei positiv semidefinit. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\lambda\|v\|^2 = v^T(\lambda v) = v^TAv \geqslant 0$$

und wegen $\|v\|^2 > 0$ folgt $\lambda \geqslant 0$.

Umgekehrt seien alle Eigenwerte von A als nichtnegativ angenommen. Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen existiert eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ die zugehörigen Eigenwerte. Für alle $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$ gilt dann:

$$v^TAv = (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^T)A(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i\alpha_j v_i^TAv_j = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i\alpha_j\lambda_j\langle v_i, v_j\rangle$$

und wegen der Orthonormalität von $v_1, \dots, v_n$ dann

$$v^T A v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \geqslant 0$$

wie gewünscht.

(c) Für jede reelle $m \times n$-Matrix A vom Rang r existieren eine orthogonale $m \times m$-Matrix Q, eine orthogonale $n \times n$-Matrix R und eine $m \times n$-Matrix der Form

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

für reelle Zahlen $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n > 0$ und allen übrigen Einträgen 0, so dass gilt

$$A = QDR.$$

(d) Die Diagonaleinträge der Diagonalmatrix D sind gerade die positiven Quadratwurzeln der von Null verschiedenen Eigenwerte von $A^T A$. Wir berechnen

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $(X-8)(X-4)X$, also mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 4$ sowie $\lambda_3 = 0$ und den jeweiligen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also sind die Singulärwerte von A gleich $2\sqrt{2}$ und 2. Die normierten Eigenvektoren von $A^T A$ sind die Spalten von R^T, also erhalten wir

$$D = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; R^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 2 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = AR^T = QD = Q \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

schliessen wir

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Singulärwertzerlegung ist somit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Für jedes $n > 0$ sei V_n der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n in einer Variablen. Sie dürfen voraussetzen, dass die Formel

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}g(k)$$

eine hermitesche Form auf V_n definiert.

(a) *(2 Punkte)* Zeige, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b) *(6 Punkte)* Wende im Spezialfall $n = 2$ das Gram-Schmidt Verfahren bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf die geordnete Basis $1, x, x^2$ von V_2 an.

(c) *(3 Punkte)* Welche Eigenschaft besitzt der Endomorphismus

$$\varphi\colon f(X) \mapsto f(n - X)$$

von V_n bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$? Folgere daraus, dass φ diagonalisierbar ist.

(d) *(4 Punkte)* Sei ψ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums W. Zeige, dass auf W ein Skalarprodukt existiert, bezüglich dem ψ normal ist.

Lösung:

(a) Für alle $f, g, h \in V_n$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle\alpha f + h, g\rangle &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{(\alpha f(k) + h(k))}g(k)\\ &= \overline{\alpha}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}g(k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{h(k)}g(k)\\ &= \overline{\alpha}\langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g + h\rangle &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}(\alpha g(k) + h(k))\\ &= \alpha\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}g(k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}h(k)\\ &= \alpha\langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle.\end{aligned}$$

Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Sesquilinearform. Wegen

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)}g(k) = \overline{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{g(k)}f(k)} = \overline{\langle g, f\rangle}$$

ist diese Form auch hermitesch.

Für alle $f \in V_n$ gilt

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \overline{f(k)} f(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|f(k)\|^2 \geqslant 0,$$

und falls dies gleich 0 ist, so gilt $f(k) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$. Dann hat f aber mindestens $n+1$ Nullstellen und, weil f Grad n hat, folgt $f = 0$. Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit.

(b) Es gilt $\langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$, also ist das Element $v_1 := 1 \in V_2$ bereits normiert. Wir setzen nun

$$\tilde{v}_2 := x - \langle x, v_1 \rangle v_1 = x - \frac{1}{3}(0+1+2) \cdot 1 = x - 1$$

und wegen

$$\|\tilde{v}_2\|^2 = \langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_2 \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} (i-1)^2 = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3}$$

ist der zweite gesuchte Vektor gleich

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x-1).$$

Sodann setzen wir

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3 &:= x^2 - \langle x^2, v_1 \rangle v_1 - \langle x^2, v_2 \rangle v_2 \\ &= x^2 - \frac{1}{3}(0+1+4) \cdot 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i^2 (i-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x-1) \\ &= x^2 - 2x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\|\tilde{v}_3\|^2 = \langle \tilde{v}_3, \tilde{v}_3 \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} (x^2 - 2x + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}) = \frac{2}{9}$$

ist der gesuchte dritte Vektor gleich

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x^2 - 6x + 1).$$

(c) Für alle $f, g \in V_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(f), g \rangle &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi(f)(k)} g(k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \overline{f(n-k)} g(k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overline{f(j)} g(n-j) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overline{f(j)} \varphi(g)(j) \\
&= \langle f, \varphi(g) \rangle
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $j := n - k$ benutzt haben. Also ist φ selbstadjungiert. Nach dem Spektralsatz ist φ daher diagonalisierbar.

Aliter: Für alle $f, g \in V_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(f), \varphi(g) \rangle &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi(f)(k)} \varphi(g)(k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \overline{f(n-k)} g(n-k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overline{f(j)} g(j) \\
&= \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

Also ist φ unitär. Nach dem Spektralsatz ist φ daher diagonalisierbar.

(d) Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von W aus Eigenvektoren von ψ mit $\psi(v_j) = \lambda_j v_j$ für alle j. Für alle $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{C}$ setze

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \right\rangle := \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j \beta_j.$$

Sei $\varphi \colon W \to \mathbb{C}^n$ der Isomorphismus, der jedes v_j auf den Standardbasisvektor e_j abbildet. Dann gilt für alle $v, w \in W$

$$\langle v, w \rangle = \langle\!\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle\!\rangle,$$

wobei $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist. Weil φ ein Isomorphismus ist, folgt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf W ist, bezüglich dem B eine Orthonormalbasis ist. Die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(\psi)$ ist die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Es folgt dass

$${}_BM_B(\psi) \cdot {}_BM_B(\psi)^* = {}_BM_B(\psi)^* {}_BM_B(\psi)$$

gilt, also gilt auch $\psi\psi^* = \psi^*\psi$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Daher ist ψ normal.

6. Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension n. Ein Element der Form $v \wedge w \in \Lambda^2 V$ für $v, w \in V$ heisst ein *reines Wedge-Produkt*.

(a) *(2 Punkte)* Formuliere die universelle Eigenschaft der zweiten alternierenden Potenz von V.

(b) *(4 Punkte)* Beweise, dass eine zweite alternierende Potenz von V eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie ist.

(c) *(5 Punkte)* Zeige im Fall $n = 3$, dass jedes Element von $\Lambda^2 V$ ein reines Wedge-Produkt ist.

(d) *(4 Punkte)* Für $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$ schreibe das Element

$$t := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \Lambda^2 V$$

als reines Wedge-Produkt.

Lösung:

(a) Sei $\Lambda^2 V$ mit der alternierenden bilinearen Abbildung $\kappa\colon V^2 \to \Lambda^2 V$ eine zweite alternierende Potenz von V. Die universelle Eigenschaft lautet dann:

Für jeden K-Vektorraum W und jede alternierende multilineare Abbildung $\varphi\colon V^2 \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \Lambda^2 V \to W$ mit $\tilde{\varphi} \circ \kappa = \varphi$.

(b) Seien (W, κ) und $(\tilde{W}, \tilde{\kappa})$ zwei alternierende Potenzen von V. Wegen der universellen Eigenschaft von W angewendet auf $\tilde{\kappa}$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon W \to \tilde{W}$ so dass $\varphi \circ \kappa = \tilde{\kappa}$ gilt. Wegen der universellen Eigenschaft von $\tilde{W}$ angewendet auf κ existiert umgekehrt eine eindeutige lineare Abbildung $\psi\colon \tilde{W} \to W$ mit $\psi \circ \tilde{\kappa} = \kappa$.

Nun ist $\varphi \circ \psi\colon \tilde{W} \to \tilde{W}$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \psi \circ \tilde{\kappa} = \varphi \circ \kappa = \tilde{\kappa}$. Weil auch $\mathrm{id}_{\tilde{W}}$ die Gleichung $\mathrm{id}_{\tilde{W}} \circ \tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}$ erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft von $\tilde{W}$, dass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{W}}$ gilt.

Analog dazu ist $\psi \circ \varphi\colon W \to W$ eine lineare Abbildung mit $\psi \circ \varphi \circ \kappa = \psi \circ \tilde{\kappa} = \kappa$. Weil auch id_W die Gleichung $\mathrm{id}_W \circ \kappa = \kappa$ erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft von W, dass $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_W$ gilt.

Es folgt, dass φ und ψ Isomorphismen sind, und weil beide eindeutig sind, sind also W und $\tilde{W}$ isomorph durch einen eindeutigen Isomorphismus.

(c) Sei $v_1, v_2, v_3 \in V$ eine Basis von V. Wir wissen aus der Vorlesung, dass dann $v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3$ eine Basis von $\Lambda^2 V$ ist. Ein beliebiges Element $w \in \Lambda^2 V$ besitzt daher eine eindeutige Darstellung

$$w = a_1(v_1 \wedge v_2) + a_2(v_1 \wedge v_3) + a_3(v_2 \wedge v_3)$$

mit Koeffizienten $a_1, a_2, a_3 \in K$. Falls $a_2 = 0$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} w &= a_1(v_1 \wedge v_2) + a_3(v_2 \wedge v_3) \\ &= (a_1 v_1) \wedge v_2 - a_3(v_3 \wedge v_2) \\ &= (a_1 v_1) \wedge v_2 - (a_3 v_3) \wedge v_2 \\ &= (a_1 v_1 - a_3 v_3) \wedge v_2. \end{aligned}$$

Im Fall $a_2 \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} w &= a_1(v_1 \wedge v_2) + a_2(v_1 \wedge v_3) + a_3(v_2 \wedge v_3) \\ &= v_1 \wedge (a_1 v_2) + v_1 \wedge (a_2 v_3) + a_3(v_2 \wedge v_3) \\ &= v_1 \wedge (a_1 v_2 + a_2 v_3) + a_3(v_2 \wedge v_3) \\ &= v_1 \wedge (a_1 v_2 + a_2 v_3) + (\tfrac{a_3}{a_2} v_2) \wedge (a_2 v_3) \\ &= v_1 \wedge (a_1 v_2 + a_2 v_3) + (\tfrac{a_3}{a_2} v_2) \wedge (a_1 v_2 + a_2 v_3) \\ &= (v_1 + \tfrac{a_3}{a_2} v_2) \wedge (a_1 v_2 + a_2 v_3). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass w ein reines Wedge-Produkt ist.

(d) Wir bestimmen zuerst jedes reine Wedge-Produkt in der gegebenen Summe als Linearkombination der Basisvektoren $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist, und verwenden dann die Teilaufgabe (c). Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3$$

wobei wir den zweiten Vektor vom ersten subtrahiert, und danach den ersten vom zweiten Vektor subtrahiert haben. Genau durch das gleiche Vorgehen erhalten wir den letzten Summanden von t

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e_2 \wedge e_3.$$

Ein ähnliches Vorgehen erzielt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e_1 \wedge e_3 + 3e_2 \wedge e_3.$$

Durch Bilinearität des Wedge-Produktes gilt schliesslich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 \wedge e_2 - 2e_1 \wedge e_3 - 4e_2 \wedge e_3.$$

Wir können t unter Verwendung der Lösung in (c) daher schreiben als

$$\begin{aligned} t &= 3e_1 \wedge e_2 + 3e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3 \\ &\overset{(c)}{=} (e_1 + \frac{1}{3}e_2) \wedge (3e_2 + 3e_3) \\ &= (3e_1 + e_2) \wedge (e_2 + e_3) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$