Lineare Algebra I - Prüfung Sommer 2019

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Sei A wahr und B falsch. Welcher der folgenden Ausdrücke ist dann wahr?

- **(a)** $(\neg B \wedge \neg A) \vee (B \wedge A)$
- **(b)** $(A \wedge (B \vee \neg A)) \vee (B \vee \neg A)$
- **(c)** $(\neg B \wedge A) \wedge ((B \vee A) \wedge A)$
- **(d)** $B \wedge (A \vee (B \wedge A) \vee \neg A)$

(II) Welcher Ausdruck ist äquivalent zur Aussage $C \Leftrightarrow D$?

- **(a)** $(C \wedge D) \wedge (\neg C \wedge \neg D)$
- **(b)** $(C \vee \neg C) \vee (D \vee \neg D)$
- **(c)** $(C \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D)$
- **(d)** $(\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee C)$

(III) Welche Eigenschaft gilt *nicht* für jede Gruppe $(G, \circ, e)$?

- **(a)** Für alle $a, b \in G$ ist $a \circ b = b \circ a$.
- **(b)** Für alle $a \in G$ ist $a \circ e = e \circ a = a$.
- **(c)** Für alle $a \in G$ existiert ein $b \in G$ so dass $a \circ b = b \circ a = e$ ist.
- **(d)** Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

(IV) Im Körper $\mathbb{F}_{23}$ ist $\overline{8} \cdot \overline{9}$ gleich

- **(a)** $\overline{3}$.
- **(b)** $\overline{20}$.
- **(c)** $\overline{22}$.
- **(d)** $\overline{8}$.

(V) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ reell diagonalisierbar?

- **(a)** Für alle $\alpha \neq 0$ mit $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$.
- **(b)** Für alle $\alpha > 0$.
- **(c)** Für alle geraden ganzen Zahlen $\alpha \neq 0$.
- **(d)** Für alle α mit $\alpha^2 = 1$.

(VI) Ein homogenes lineares Gleichungssystem bestehend aus n Gleichungen in m Variablen hat garantiert eine von Null verschiedene Lösung, wenn gilt:

- **(a)** $n = m$.
- **(b)** $n > m$.
- **(c)** $n < m$.
- **(d)** $n \neq m$.

(VII) Für wieviele Teilmengen $B \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

- **(a)** 0
- **(b)** 2
- **(c)** 5
- **(d)** 7

(VIII) Welche Aussage über Homomorphismen von Vektorräumen ist *falsch*?

- **(a)** Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus.
- **(b)** Jeder injektive Endomorphismus ist ein Automorphismus.
- **(c)** Jeder Automorphismus ist die Komposition zweier Isomorphismen.
- **(d)** Jeder surjektive Homomorphismus ist ein Isomorphismus.

(IX) Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen. Welche Rechenregel gilt im Allgemeinen *nicht*?

- **(a)** $\det(2A) = 2\det(A)$
- **(b)** $\det(A)\det(B) = \det(AB)$
- **(c)** $\det(AB) = \det(BA)$
- **(d)** $\det(I_n) = 1$

(X) Welche Aussage ist richtig für jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen $f\colon V \to W$?

- **(a)** Der Rang von f ist abhängig von der Wahl von Basen in V und W.
- **(b)** Ist f ein Isomorphismus, so gilt $\mathrm{Rang}(f) = \dim V = \dim W$.
- **(c)** Ist f kein Isomorphismus, so gilt $\mathrm{Rang}(f) = 0$.
- **(d)** Es gilt $\mathrm{Rang}(f) = \min\{\dim V, \dim W\}$.

2. Sei V der Vektorraum aller reellen Folgen $(x_n)_{n\geqslant 0}$, und betrachte die beiden Verschiebungsoperatoren

$$T_+\colon V \to V,\quad (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n,$$
$$T_-\colon V \to V,\quad (x_n)_n \mapsto (x_{n-1})_n \text{ mit } x_{-1} := 0.$$

(a) *(3 Punkte)* Zeige, dass die Folgen, welche nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, einen Unterraum W von V bilden.

(b) *(2 Punkte)* Zeige, dass der Unterraum W invariant ist unter T_+ und T_-.

(c) *(7 Punkte)* Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $T_+|_W$ und $T_-|_W$.

(d) *(3 Punkte)* Finde alle Eigenwerte von $T_+ + T_-$ (auf V!) und ihre geometrischen Vielfachheiten.

3. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ betrachte die reelle Matrix

$$M_n := \left(\binom{i+j}{2}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

(a) *(1 Punkt)* Gib die Definition der Determinante einer allgemeinen $n\times n$-Matrix an.

(b) *(2 Punkte)* Schreibe M_n explizit aus.

(c) *(3 Punkte)* Berechne $\det(M_n)$ für die Werte $n = 1, 2, 3$.

(d) *(9 Punkte)* Berechne die Determinante und den Rang von M_n für alle $n \geqslant 1$.

4. Betrachte einen beliebigen Körper K. Eine quadratische Matrix A heisst *idempotent*, wenn $A^2 = A$ ist. Zeige:

(a) *(4 Punkte)* Jede idempotente Matrix ist diagonalisierbar mit Eigenwerten in der Menge $\{0, 1\}$.

(b) *(5 Punkte)* Zwei idempotente $n \times n$-Matrizen sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie den gleichen Rang besitzen.

(c) *(3 Punkte)* Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer idempotenten $n\times n$-Matrix A und einem Vektor $b \in K^n \smallsetminus \{0\}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist. Beschreibe die Lösungsmenge in diesem Fall.

(d) *(3 Punkte)* Seien nun $K = \mathbb{Q}$ und $A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ explizit.

5. Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen 2×2 oberen Dreiecksmatrizen und betrachte die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in V.$$

(a) *(3 Punkte)* Zeige, dass

$$\Phi\colon\ V \to V,\ A \mapsto SAS$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(b) *(3 Punkte)* Zeige, dass die Matrizen

$$b_1 := \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ b_2 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b_3 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

(c) *(4 Punkte)* Bestimme die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis in (b).

(d) *(5 Punkte)* Finde eine Basis von V, bezüglich welcher Φ trigonal ist.

6. **(a)** *(3 Punkte)* Zeige durch Induktion die folgende Formel für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) *(4 Punkte)* Seien V_1, V_2 Untervektorräume eines Vektorraumes W. Beweise die Formel

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

(c) *(5 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und seien V_1 und V_2 Unterräume von V mit der Eigenschaft

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V).$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $V_1 + V_2 = V$

(ii) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(iii) $V = V_1 \oplus V_2$.

(d) *(3 Punkte)* Sei nun K ein endlicher Körper der Kardinalität q. Bestimme die Anzahl der Unterräume von K^2.