Lineare Algebra I - Prüfung Sommer 2019

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Sei A wahr und B falsch. Welcher der folgenden Ausdrücke ist dann wahr?

(a) $(\neg B \wedge \neg A) \vee (B \wedge A)$

(b) $(A \wedge (B \vee \neg A)) \vee (B \vee \neg A)$

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $(\neg B \wedge A) \wedge ((B \vee A) \wedge A)$

(d) $B \wedge (A \vee (B \wedge A) \vee \neg A)$

(II) Welcher Ausdruck ist äquivalent zur Aussage $C \Leftrightarrow D$?

(a) $(C \wedge D) \wedge (\neg C \wedge \neg D)$

(b) $(C \vee \neg C) \vee (D \vee \neg D)$

(c) $(C \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D)$

$\boxed{\textbf{(d)}}$ $(\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee C)$

(III) Welche Eigenschaft gilt *nicht* für jede Gruppe $(G, \circ, e)$?

$\boxed{\textbf{(a)}}$ Für alle $a, b \in G$ ist $a \circ b = b \circ a$.

(b) Für alle $a \in G$ ist $a \circ e = e \circ a = a$.

(c) Für alle $a \in G$ existiert ein $b \in G$ so dass $a \circ b = b \circ a = e$ ist.

(d) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Erklärung: Eigenschaft (a) ist die Kommutativität, die nicht jede Gruppe erfüllt.

(IV) Im Körper $\mathbb{F}_{23}$ ist $\overline{8} \cdot \overline{9}$ gleich

$\boxed{\textbf{(a)}}$ $\overline{3}$.

(b) $\overline{20}$.

(c) $\overline{22}$.

(d) $\overline{8}$.

(V) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ reell diagonalisierbar?

(a) Für alle $\alpha \neq 0$ mit $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ Für alle $\alpha > 0$.

(c) Für alle geraden ganzen Zahlen $\alpha \neq 0$.

(d) Für alle α mit $\alpha^2 = 1$.

Erklärung: Das charakteristische Polynom ist $X^2 - \alpha = (X - \sqrt{\alpha})(X + \sqrt{\alpha})$. Für $\alpha > 0$ ist $\sqrt{\alpha}$ reell und die Matrix hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte, ist also diagonalisierbar. Für $\alpha < 0$ hat die Matrix keine reellen Eigenwerte, ist also nicht diagonalisierbar. Für $\alpha = 0$ ist die Matrix die Transponierte eines Jordanblocks der Grösse 2 und ist deshalb nicht diagonalisierbar.

(VI) Ein homogenes lineares Gleichungssystem bestehend aus n Gleichungen in m Variablen hat garantiert eine von Null verschiedene Lösung, wenn gilt:

(a) $n = m$.

(b) $n > m$.

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $n < m$.

(d) $n \neq m$.

Erklärung: In der praktischen Rechnung kann man mit jeder von Null verschiedenen Gleichung eine Variable eliminieren. Im Fall $n < m$ bleiben am Ende noch mindestens $m - n > 0$ freie Variablen übrig, mit denen man eine von Null verschiedene Lösung finden kann.

Aliter: Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist der Kern einer linearen Abbildung $\varphi\colon K^m \to K^n$. Dieser Kern hat die Dimension $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim(K^m) - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \geqslant \dim(K^m) - \dim(K^n) = m - n$. Nur für $m - n > 0$ ist dieser Kern garantiert ungleich Null.

(VII) Für wieviele Teilmengen $B \subset \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ ist B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

(a) 0

(b) 2

$\boxed{\textbf{(c)}}$ 5

(d) 7

Erklärung: Jede Basis muss aus $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ linear unabhängigen Vektoren bestehen. Nennen wir die Vektoren in der gegebenen Reihenfolge $v_1, \ldots, v_5$. Da v_3 und v_5 skalare Vielfache voneinander sind, kann eine Basis nur höchstens einen davon enthalten; und für jede Basis, die einen davon enthält, erhalten wir durch Ersetzen durch den anderen eine weitere Basis. Wir betrachten daher zuerst nur die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$. Wegen

$$\begin{aligned} &\det(v_1, v_2, v_3) = 0, \qquad &&\det(v_1, v_2, v_4) = 2, \\ &\det(v_1, v_3, v_4) = -2, \qquad &&\det(v_2, v_3, v_4) = 2 \end{aligned}$$

bilden von diesen nur $\{v_1, v_2, v_4\}$ und $\{v_1, v_3, v_4\}$ und $\{v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis. Für die letzteren beiden liefert Ersetzen von v_3 durch v_5 eine weitere Basis. Insgesamt gibt es also $3 + 2 = 5$ verschiedene Teilmengen, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(VIII) Welche Aussage über Homomorphismen von Vektorräumen ist *falsch*?

(a) Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus.

(b) Jeder injektive Endomorphismus ist ein Automorphismus.

(c) Jeder Automorphismus ist die Komposition zweier Isomorphismen.

$\boxed{\textbf{(d)}}$ Jeder surjektive Homomorphismus ist ein Isomorphismus.

Erklärung: Ein Homomorphismus ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er injektiv und surjektiv ist. Die Surjektivität allein genügt dabei nicht; daher ist (d) falsch.

(IX) Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen. Welche Rechenregel gilt im Allgemeinen *nicht*?

$\boxed{\textbf{(a)}}$ $\det(2A) = 2\det(A)$

(b) $\det(A)\det(B) = \det(AB)$

(c) $\det(AB) = \det(BA)$

(d) $\det(I_n) = 1$

Erklärung: Multipliziert man eine Zeile einer Matrix mit einem Skalar a, so multipliziert sich die Determinante ebenfalls mit a. Multipliziert man die gesamte Matrix A mit a, so multipliziert man n verschiedene Zeilen mit a, und insgesamt multipliziert sich die Determinante mit a^n. Es gilt also $\det(2A) = 2^n \det(A)$, und die Aussage (a) ist im Allgemeinen falsch.

(X) Welche Aussage ist richtig für jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen $f\colon V \to W$?

(a) Der Rang von f ist abhängig von der Wahl von Basen in V und W.

$\boxed{\textbf{(b)}}$ Ist f ein Isomorphismus, so gilt $\mathrm{Rang}(f) = \dim V = \dim W$.

(c) Ist f kein Isomorphismus, so gilt $\mathrm{Rang}(f) = 0$.

(d) Es gilt $\mathrm{Rang}(f) = \min\{\dim V, \dim W\}$.

2. Sei V der Vektorraum aller reellen Folgen $(x_n)_{n\geqslant 0}$, und betrachte die beiden Verschiebungsoperatoren

$$T_+ \colon V \to V, \quad (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n,$$
$$T_- \colon V \to V, \quad (x_n)_n \mapsto (x_{n-1})_n \text{ mit } x_{-1} := 0.$$

(a) *(3 Punkte)* Zeige, dass die Folgen, welche nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, einen Unterraum W von V bilden.

(b) *(2 Punkte)* Zeige, dass der Unterraum W invariant ist unter T_+ und T_-.

(c) *(7 Punkte)* Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $T_+|_W$ und $T_-|_W$.

(d) *(3 Punkte)* Finde alle Eigenwerte von $T_+ + T_-$ (auf V!) und ihre geometrischen Vielfachheiten.

Lösung:

(a) Sei W die Menge aller Folgen in V, die nur endlich viele verschiedenen Werte annehmen. Die Nullfolge ist eine solche Folge; daher ist W nicht leer. Seien $(x_n)_{n\geqslant 0}$ und $(y_n)_{n\geqslant 0}$ zwei Folgen in W mit jeweiligen Wertemengen X und Y, die nach Voraussetzung beide endlich sind. Dann nimmt die Folge $(x_n+y_n)_{n\geqslant 0}$ Werte in der Menge $\{x+y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ an. Diese Menge ist endlich, also liegt die Folge $(x_n+y_n)_{n\geqslant 0}$ wieder in W. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann nimmt die Folge $(\lambda x_n)_{n\geqslant 0}$ Werte in der Menge $\{\lambda x \mid x \in X\}$ an. Da diese Menge endlich ist, liegt die Folge $(\lambda x_n)_{n\geqslant 0}$ wieder in W. Somit ist W ein Unterraum von V.

(b) Sei $(x_n)_{n\geqslant 0}$ eine Folge in W. Die Wertemenge der Folge $(x_{n+1})_{n\geqslant 0}$ ist eine Teilmenge der Wertemenge der Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ und deshalb wieder endlich. Die Wertemenge der Folge $(x_{n-1})_{n\geqslant 0}$ ist die Wertemenge der Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ vereinigt mit der Menge $\{0\}$, also auch wieder endlich. Dies zeigt, dass W invariant ist unter den Operatoren T_+ und T_-.

(c) Eine Folge $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in V$ erfüllt die Eigenwertgleichung $T_+x = \lambda x$ genau dann, wenn für alle $n \geqslant 0$ die Gleichung $x_{n+1} = \lambda x_n$ gilt. Nach Induktion über n ist dies äquivalent zu $x_n = \lambda^n x_0$ für alle $n \geqslant 0$. Damit x ein Eigenvektor ist, muss zusätzlich $x \neq 0$, also $x_0 \neq 0$ sein. Für $x \in W$ darf zudem die Folge $(\lambda^n x_0)_{n\geqslant 0}$ nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Insbesondere existieren $n > m \geqslant 0$ mit $\lambda^n x_0 = \lambda^m x_0$. Wegen $x_0 \neq 0$ bedeutet dies $(\lambda^{n-m}-1)\lambda^m = 0$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist dies nur möglich mit $\lambda \in \{0, \pm 1\}$. Umgekehrt liegt die Folge $f^\lambda := (\lambda^n)_{n\geqslant 0}$ in $W \smallsetminus \{0\}$ für jedes $\lambda \in \{0, \pm 1\}$. Somit hat $T_+|_W$ genau die Eigenwerte $\lambda \in \{0, \pm 1\}$ mit dem jeweiligen Eigenraum $\langle f^\lambda \rangle$.

Betrachte nun einen Eigenvektor $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in V$ von T_- zum Eigenwert λ. Dann gilt $T_-x = \lambda x$, also $x_{n-1} = \lambda x_n$ für alle $n \geqslant 0$ mit $x_{-1} := 0$. Ausserdem ist mindestens ein x_n ungleich Null. Sei $m \geqslant 0$ minimal mit $x_m \neq 0$. Nach der Eigenwertgleichung ist dann $0 = x_{m-1} = \lambda x_m$ mit $x_m \neq 0$; also folgt $\lambda = 0$. Für $n := m+1$ folgt dann aber $x_m = \lambda x_{m+1} = 0 \cdot x_{m+1} = 0$, im Widerspruch zu $x_m \neq 0$. Somit besitzt T_- keine Eigenvektoren und Eigenwerte. Dasselbe gilt dann erst recht für die Einschränkung $T_-|_W$.

(d) Eine Folge $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in V$ erfüllt die Eigenwertgleichung $(T_+ + T_-)x = \lambda x$ genau dann, wenn für alle $n \geqslant 0$ die Gleichung $x_{n+1} + x_{n-1} = \lambda x_n$ gilt mit $x_{-1} := 0$. Dies ist äquivalent zu der linearen Rekursion $x_{n+1} = \lambda x_n - x_{n-1}$ für alle $n \geqslant 0$ mit den Startwerten $x_{-1} = 0$ und einer Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$. Für jede Wahl von λ und x_0 ist diese Rekursion eindeutig lösbar. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $g^\lambda \in V$ die eindeutige Lösung mit dem Anfangswert $x_0 = 1$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist dann cg^λ die eindeutige Lösung mit dem Anfangswert $x_0 = c$. Also ist der Eigenraum zum Eigenwert λ gleich $\langle g^\lambda \rangle$ und wegen $g^\lambda \neq 0$ somit eindimensional. Zusammenfassend besitzt $T_+ + T_-$ also jede reelle Zahl als Eigenwert mit der geometrischen Vielfachheit 1.

3. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ betrachte die reelle Matrix

$$M_n \;:=\; \left(\tbinom{i+j}{2}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

(a) *(1 Punkt)* Gib die Definition der Determinante einer allgemeinen $n\times n$-Matrix an.

(b) *(2 Punkte)* Schreibe M_n explizit aus.

(c) *(3 Punkte)* Berechne $\det(M_n)$ für die Werte $n = 1, 2, 3$.

(d) *(9 Punkte)* Berechne die Determinante und den Rang von M_n für alle $n \geqslant 1$.

Lösung:

(a) Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ist

$$\det(A) \;:=\; \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i}.$$

Aliter: Eine andere in Lehrbüchern übliche Definitionen, sofern vollständig.

(b) Es ist $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ und somit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \ldots & \frac{(n+1)n}{2} \\ 3 & 6 & 10 & \ldots & \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ 6 & 10 & 15 & \ldots & \frac{(n+3)(n+2)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(n+1)n}{2} & \frac{(n+2)(n+1)}{2} & \frac{(n+3)(n+2)}{2} & \ldots & \frac{2n(2n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Es ist $\det(M_1) = 1$ und $\det(M_2) = -3$ und $\det(M_3) = -1$.

(d) Für $n = 1, 2, 3$ wurde die Determinante in (c) bestimmt. Da sie jeweils ungleich Null ist, ist die Matrix invertierbar und ihr Rang gleich n.

Sei nun $n \geqslant 4$. Sowohl die Determinante als auch der Rang einer Matrix sind invariant unter elementaren Zeilenoperationen. Wir gehen vor wie folgt.

Zuerst subtrahieren wir jede Zeile von M_n von der folgenden. Die resultierende Matrix hat an der Stelle (i,j) für $i \geqslant 2$ den Eintrag $\frac{(i+j)(i+j-1)}{2} - \frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} = i+j-1$. Danach subtrahieren wir jede Zeile ausser der ersten von der folgenden. Die entstehende Matrix hat an der Stelle (i,j) für $i \geqslant 3$ den Eintrag $(i+j-1)-(i+j-2) = 1$. Schliesslich subtrahieren wir jede Zeile ausser den ersten beiden von der jeweils folgenden. In der resultierenden Matrix sind dann alle Zeilen ab der vierten Zeile identisch Null.

Wegen $n \geqslant 4$ ist also mindestens eine Zeile dieser Matrix identisch Null. Da die Determinante unter den genannten Zeilenumformungen invariant ist, gilt somit $\det(M_n) = 0$.

Ausserdem hat die resultierende Matrix nur 3 von Null verschiedene Zeilen. Da der Rang unter den genannten Zeilenumformungen invariant ist, gilt somit $\mathrm{Rang}(M_n) \leqslant 3$. Andererseits ist die linke obere 3×3-Untermatrix von M_n gleich M_3 mit $\det(M_3) \neq 0$. Somit sind die ersten drei Zeilen von M_n linear unabhängig und daher $\mathrm{Rang}(M_n) \geqslant 3$. Also gilt $\mathrm{Rang}(M_n) = 3$ für alle $n \geqslant 4$. Zusammenfassend ist daher $\mathrm{Rang}(M_n) = \min\{n, 3\}$ für alle $n \geqslant 1$.

4. Betrachte einen beliebigen Körper K. Eine quadratische Matrix A heisst *idempotent*, wenn $A^2 = A$ ist. Zeige:

(a) *(4 Punkte)* Jede idempotente Matrix ist diagonalisierbar mit Eigenwerten in der Menge $\{0,1\}$.

(b) *(5 Punkte)* Zwei idempotente $n \times n$-Matrizen sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie den gleichen Rang besitzen.

(c) *(3 Punkte)* Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer idempotenten $n \times n$-Matrix A und einem Vektor $b \in K^n \smallsetminus \{0\}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist. Beschreibe die Lösungsmenge in diesem Fall.

(d) *(3 Punkte)* Seien nun $K = \mathbb{Q}$ und $A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ explizit.

Lösung:

(a) Sei A eine idempotente $n \times n$-Matrix. Für jeden Vektor $v \in K^n$ gilt dann $v = Av + (I_n - A)v$ mit

$$\begin{aligned} A \cdot Av &= A^2 v = Av && \text{und} \\ A \cdot (I_n - A)v &= Av - A^2 v = Av - Av = 0. \end{aligned}$$

Also liegt Av im Eigenraum zum Eigenwert 1, und $(I_n - A)v$ im Eigenraum zum Eigenwert 0 von A. Diese beiden Eigenräume erzeugen somit den ganzen Vektorraum K^n; daher ist A diagonalisierbar mit Eigenwerten in $\{0,1\}$.

Aliter: Sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis des Kerns der linearen Abbildung $L_A\colon K^n \to K^n$, $v \mapsto Av$. Ergänze diese Basis durch $v_{m+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V. Dann bilden die Vektoren $Av_{m+1}, \ldots, Av_n$ eine Basis des Bilds von L_A. Ausserdem gilt $Av_i = 0$ für jedes $i \leqslant m$ und $A \cdot Av_i = A^2 v_i = Av_i$ für jedes $i > m$. Für letzteren gilt insbesondere $A \cdot (Av_i - v_i) = 0$ und somit $Av_i - v_i \in \mathrm{Kern}(L_A)$; also ist $Av_i - v_i$ eine Linearkombination der früheren Basisvektoren $v_1, \ldots, v_m$. Daher ist auch $v_1, \ldots, v_m, Av_{m+1}, \ldots, Av_n$ eine Basis von K^n. Dies ist nun eine Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten 0 oder 1, wie gewünscht.

Aliter (mit Lineare Algebra II): Nach Voraussetzung ist $f(A) = A^2 - A = O_n$ für das Polynom $f(X) := X^2 - X = (X-0)(X-1)$. Also ist das Minimalpolynom von A ein Teiler von f. Wie f zerfällt daher auch das Minimalpolynom in Linearfaktoren der Multiplizität 1 mit Nullstellen in der Menge $\{0, 1\}$. Somit ist A diagonalisierbar mit Eigenwerten in $\{0, 1\}$.

(b) Seien A und B zwei idempotente $n \times n$-Matrizen. Angenommen A und B sind zueinander konjugiert, das heisst, es existiert eine invertierbare Matrix S so dass $A = SBS^{-1}$ ist. Aus einem Satz aus der Vorlesung folgt dann $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

Umgekehrt sei angenommen A und B haben den gleichen Rang. Nach (a) ist A konjugiert zu einer Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen 0 und/oder 1. Nach Konjugation mit einer Permutationsmatrix können wir dabei annehmen, dass die ersten r Diagonaleinträge von D gleich 1 und die übrigen gleich 0 sind. Der Rang jeder Diagonalmatrix ist aber die Anzahl der von Null verschiedenen Diagonaleinträge; also gilt $\mathrm{Rang}(D) = r$. Da der Rang unter Konjugation invariant ist, gilt dann auch $\mathrm{Rang}(A) = r$.

Nach Voraussetzung ist nun auch $\mathrm{Rang}(B) = r$. Dieselbe Überlegung wie für die Matrix A zeigt nun, dass B zu derselben Matrix D konjugiert ist. Somit sind auch A und B zueinander konjugiert, wie zu zeigen war.

(c) Angenommen, es existiert eine Lösung x der Gleichung $Ax = b$. Dann ist $Ab = A^2x = Ax = b$; der Vektor $b \neq 0$ ist also ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Ist umgekehrt b ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1, so gilt $Ab = b$, also ist $x = b$ eine Lösung des Gleichungssystems. Dies zeigt die Äquivalenz der beiden Aussagen.

Wenn eine Lösung existiert, so ist somit $x = b$ eine partikuläre Lösung, und die allgemeine Lösung hat die Form $x = b + y$ für eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Ay = 0$. Die Lösungsmenge ist also $\{b + y \mid y \in \mathrm{Kern}(L_A)\}$.

(d) Durch direkte Rechnung ersehen wir $A^2 = A$ und $Ab = b$. Nach Teil (d) ist der Lösungsraum der Gleichung $Ax = b$ also gleich $\{b + y \mid y \in \mathrm{Kern}(L_A)\}$. Wir bestimmen $\mathrm{Kern}(L_A)$ mit dem Gauss-Verfahren, wobei jeweils Z_i die i-te Zeile bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{Z_2 := Z_2 + Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_3:=Z_3-2Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3:=Z_3-2Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1:=Z_1+2Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von L_A ist demnach gleich $\{(a, -a, a)^T \mid a \in \mathbb{Q}\}$. Die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$ ist also $\{(a, 2-a, a-1)^T \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

Aliter: Wir berechnen die Lösungsmenge direkt durch Anwenden des Gaussverfahrens auf die erweiterte Matrix $(A \mid b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_2:=Z_2+Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3:=Z_3-2Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3:=Z_3-2Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_1:=Z_1+2Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösungsmenge ist demnach gleich $\{(1+b, 1-b, b)^T \mid b \in \mathbb{Q}\}$.

5. Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen 2×2 oberen Dreiecksmatrizen und betrachte die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in V.$$

(a) *(3 Punkte)* Zeige, dass

$$\Phi\colon\ V \to V,\ A \mapsto SAS$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(b) *(3 Punkte)* Zeige, dass die Matrizen

$$b_1 := \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ b_2 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b_3 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

(c) *(4 Punkte)* Bestimme die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis in (b).

(d) *(5 Punkte)* Finde eine Basis von V, bezüglich welcher Φ trigonal ist.

Lösung:

(a) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. Daher ist auch SAS als Produkt dreier oberen Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix und somit in V. Deshalb ist Φ wohldefiniert. Für alle $A, B \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt ausserdem

$$\Phi(\lambda A + B) = S(\lambda A + B)S = \lambda SAS + SBS = \lambda\Phi(A) + \Phi(B).$$

Also ist Φ eine lineare Abbildung.

(b) Betrachte die Elementarmatrizen E_{11}, E_{12}, E_{22}. Wegen $E_{11} = ib_1 + 3b_2 - b_3$ und $E_{12} = ib_2 - b_1$ und $E_{22} = b_3 - b_2$ liegen diese alle im Erzeugnis $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$. Da die genannten Elementarmatrizen eine Basis von V bilden, folgt daraus $\langle b_1, b_2, b_3\rangle = V$. Also ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ ein Erzeugendensystem von V der Kardinalität $\dim(V) = 3 < \infty$ und somit eine Basis von V.

(c) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren unter der Abbildung Φ:

$$\Phi(b_1) = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = b_1 + 4E_{12} = -3b_1 + 4ib_2$$

$$\Phi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b_2 - 2iE_{12} = 2ib_1 + 3b_2$$

$$\Phi(b_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = b_3 - (2i+1)E_{12} = (2i+1)b_1 + (2-i)b_2 + b_3$$

Also ist die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der geordneten Basis (b_1, b_2, b_3) gleich

$$\begin{pmatrix} -3 & 2i & 2i+1 \\ 4i & 3 & 2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Weil die Darstellungsmatrix in (c) bereits eine Blockdreiecksmatrix ist, reicht es, den ersten Basisvektor b_1 durch eine geeignete Linearkombination von b_1 und b_2 zu ersetzen. Die linke obere 2×2-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 2i \\ 4i & 3 \end{smallmatrix}\right)$ hat das charakteristische Polynom $X^2 - 1$ und somit die Eigenwerte 1 und -1. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist der Spaltenvektor $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$. In der geordneten Basis (b_1, b_2, b_3) entspricht dieser der Matrix

$$b_1' \;:=\; ib_1 + 2b_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\in\; V.$$

Dann gilt $\Phi(b_1') = b_1'$ und $\Phi(b_2) = 2b_1' - b_2$ und $\Phi(b_3) = (2-i)b_1' + (i-2)b_2 + b_3$. In der Basis (b_1', b_2, b_3) ist die Darstellungsmatrix dann die Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2-i \\ 0 & -1 & i-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aliter: Wir gehen vor wie oben, bestimmen aber zusätzlich den Eigenvektor $\binom{i}{1} \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert -1 von $\left(\begin{smallmatrix}-3 & 2i\\ 4i & 3\end{smallmatrix}\right)$. In der geordneten Basis (b_1, b_2, b_3) entspricht dieser der Matrix

$$b_2' \;:=\; ib_1 + b_2 \;=\; \begin{pmatrix}0 & -i\\ 0 & 0\end{pmatrix} \;\in\; V.$$

Dann gilt $\Phi(b_1') = b_1'$ und $\Phi(b_2') = -b_2'$ und $\Phi(b_3) = (2-i)b_2' + b_3$. In der Basis (b_1', b_2', b_3) ist die Darstellungsmatrix dann die Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2-i\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

6. **(a)** *(3 Punkte)* Zeige durch Induktion die folgende Formel für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \;=\; (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) *(4 Punkte)* Seien V_1, V_2 Untervektorräume eines Vektorraumes W. Beweise die Formel

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

(c) *(5 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und seien V_1 und V_2 Unterräume von V mit der Eigenschaft

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) \;=\; \dim(V).$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $V_1 + V_2 = V$

(ii) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(iii) $V = V_1 \oplus V_2$.

(d) *(3 Punkte)* Sei nun K ein endlicher Körper der Kardinalität q. Bestimme die Anzahl der Unterräume von K^2.

Lösung:

(a) Wir führen Induktion nach n.

Induktionsverankerung: Für $n = 0$ ist die linke Seite der Gleichung die leere Summe, also 0 und die rechte Seite ist ebenfalls gleich 0, also ist die Gleichung erfüllt.

Induktionsschritt: Sei nun $n > 0$ und nimm an, dass die Gleichung für $n-1$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k^2 + (-1)^n n^2 \\ &\overset{IA}{=} (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)n}{2} + (-1)^n n^2 \\ &= (-1)^n\cdot\Big(n^2 - \frac{(n-1)n}{2}\Big) \\ &= (-1)^n\cdot\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Also ist die Gleichung durch Induktion für alle $n \geqslant 0$ bewiesen.

(b) Wähle eine Basis B_{12} von $V_1 \cap V_2$ und vervollständige diese Basis zu einer Basis B_1 von V_1 und zu einer Basis B_2 von V_2. Dann ist $B_1 \cap B_2 = B_{12}$ und $B_1 \cup B_2$ ist ein Erzeugendensystem von $V_1 + V_2$. Wir behaupten, dass $B_1 \cup B_2$ aber auch linear unabhängig und somit eine Basis von $V_1 + V_2$ ist. Sei dafür $(a_b)_{b\in B_1\cup B_2} \in K$ so dass $\sum_{b\in B_1\cup B_2} a_b b = 0$ ist. Wir trennen diese Summe auf und erhalten

$$\sum_{b\in B_1} a_b b = -\sum_{b\in B_2\smallsetminus B_{12}} a_b b.$$

Da die linke Seite in V_1 liegt, muss auch die rechte Seite in V_1 liegen. Die rechte Seite liegt aber in V_2, also muss sie in $V_1 \cap V_2$ liegen. Also existiert $(c_b)_{b\in B_{12}}$ so dass $\sum_{b\in B_{12}} c_b b = -\sum_{b\in B_2\smallsetminus B_{12}} a_b b$ ist. Weil B_2 linear unabhängig ist, folgt daraus insbesondere, dass $a_b = 0$ ist für alle $b \in B_2 \smallsetminus B_{12}$. Dann folgt mit der obigen Gleichung und der linearen Unabhängigkeit von B_1 auch, dass $a_b = 0$ ist für alle $b \in B_1$. Also ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $V_1 + V_2$. Daher gilt

$$\dim(V_1+V_2) = |B_1\cup B_2| = |B_1|+|B_2|-|B_{12}| = \dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2).$$

(c) Nach Definition der direkten Summe ist (iii) äquivalent zu (i)$\wedge$(ii). Es genügt daher zu zeigen, dass (i) und (ii) zueinander äquivalent sind. Betrachte dafür die Dimensionsformel für den Durchschnitt und die Summe zweier Unterräume

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) \;=\; \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2).$$

Nach Voraussetzung ist hier die linke Seite gleich $\dim(V)$. Also gilt

$$\begin{aligned}V_1 + V_2 = V &\iff \dim(V_1 + V_2) = \dim(V) \\ &\iff \dim(V_1 \cap V_2) = 0 \\ &\iff V_1 \cap V_2 = \{0\},\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(d) Jeder Vektor $v \neq 0$ in K^2 erzeugt einen 1-dimensionalen Unterraum von K^2, der aus $q-1$ Elementen und 0 besteht. Zwei verschiedene Unterräume schneiden sich nur im Nullpunkt. Sei N die Anzahl 1-dimensionaler Unterräume von K^2. Dann gilt also die Beziehung $N \cdot (q-1) + 1 = q^2$. Daher folgt $N = q + 1$. Zusammen mit dem Nullraum und dem ganzen Raum K^2 gibt es also genau $q + 3$ verschiedene Unterräume von K^2.