Extra zu Serie 11

Beweis zum Divergenzsatz für Gebiete unter einem Graphen

Proposition 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen so, dass das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ in U enthalten ist, und sei $\varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial B} F dn$$

für den Bereich $B = \{(x,y) \in U \,|\, x \in [a,b],\ c \leq y \leq \varphi(x)\}$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass φ auf ganz $[a,b]$ stetig differenzierbar ist. In der Tat, falls φ nur stückweise stetig differenzierbar ist, so zerteilen wir das Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle, auf welchen φ stetig differenzierbar ist. Kennt man die Proposition für Graphen stetig differenzierbarer Funktionen, so ergibt sich durch Addition der entstehenden Gleichungen die gewünschte Formel.
Der Rand von B ist im Gegenuhrzeigersinn durch die Verkettung der folgenden vier Pfade parametrisiert.

$$\begin{array}{llll}
\gamma_u : [a,b] \longrightarrow U, & \gamma_u(t) = (t,c), & n_{\gamma_u}(t) = (0,-1) \\
\gamma_r : [c,\varphi(b)] \longrightarrow U, & \gamma_r(t) = (b,t), & n_{\gamma_r}(t) = (1,0) \\
\gamma_o : [a,b] \longrightarrow U, & \gamma_o(t) = (a+b-t, \varphi(a+b-t)), & n_{\gamma_o}(t) = (-\varphi'(a+b-t),1) \\
\gamma_l : [c,\varphi(a)] \longrightarrow U, & \gamma_l(t) = (a, c+\varphi(a)-t), & n_{\gamma_l}(t) = (-1,0)
\end{array}$$

Das Flussintegral schreibt sich entsprechend als Summe von vier Integralen

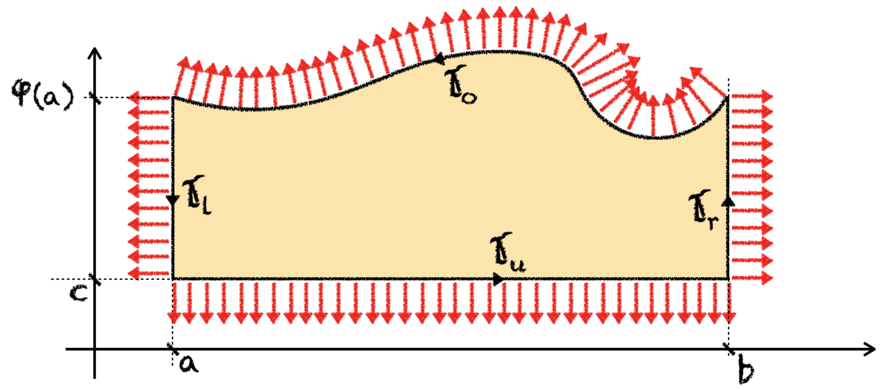
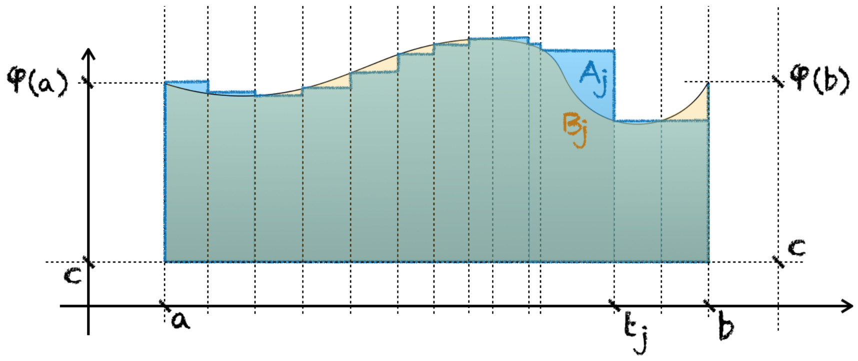


Abbildung 1. Parametrisierung im Gegenuhrzeigersinn des Randes von B mit Aussennormalen

$$\int_{\partial B} F dn = \underbrace{-\int_a^b F_2(t,c)dt}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} F_1(b,t)dt}_{\text{rechts}} + \underbrace{\int_a^b \langle F(t,\varphi(t)), (-\varphi'(t),1)\rangle\, dt}_{\text{oben}} - \underbrace{\int_c^{\varphi(a)} F_1(a,t)dt}_{\text{links}}$$

wobei wir im dritten und vierten Integral bereits eine lineare Substitution ausgeführt haben.



Sei $\varepsilon > 0$. Das Rechteck $Q = [a,b]\times[c,d]$ und das Intervall $[a,b]$ sind kompakt, das Vektorfeld F ist stetig differenzierbar und φ suückweise stetig differenzierbar. Wir können damit $M \geq 1$ und $\eta \in (0,\varepsilon)$ wählen, so dass

$$\|F(x)\| \leq M, \quad |\mathrm{div}(F)(x)| \leq M, \qquad \text{und} \qquad |\varphi'(t)| \leq M$$

für alle $x \in Q$ und $t \in [a,b]$, sowie

$$\|x-y\|_\infty < \eta \implies \|F(x)-F(y)\|_\infty < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $x, y \in Q$ gilt. Insbesondere ist φ Lipschitz-stetig auf $[a,b]$ mit Lipschitz-Konstante M. Schreiben wir $\delta = \eta M^{-1}$, so gilt

$$|s-t| < \delta \implies |\varphi(s)-\varphi(y)| < \eta \tag{2}$$

für alle $s,t \in [a,b]$. Sei $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Maschenweite kleiner als δ. Wir zerlegen B in Streifen $B_1,\ldots,B_N$, und nähern B durch eine Vereinigung von Rechtecken A an, in dem wir

$$\begin{aligned} B_j &= \{x=(x_1,x_2) \in U \mid x_1 \in [t_{j-1},t_j],\ c \leq x_2 \leq \varphi(x_1)\} \\ A_j &= [t_{j-1},t_j] \times [c,\varphi(t_{j-1})] \\ A &= \bigcup_{j=1}^{N} A_j \end{aligned}$$

für $j = 1,\ldots,N$ definieren. Wir haben die Zerlegung so gewählt, dass diese Streifen höchstens Breite δ haben.
Die Abschätzung $\mathrm{vol}\big((B_j \setminus A_j) \cup (A_j \setminus B_j)\big) \leq \varepsilon(t_j - t_{j-1})$ folgt nach Wahl von δ und der Zerlegung, womit wir

$$\left|\int_B \mathrm{div}(F)dx - \int_A \mathrm{div}(F)dx\right| \leq \sum_{j=1}^{N} M\varepsilon(t_j - t_{j-1}) = M(b-a)\varepsilon \tag{3}$$

erhalten. Wir wenden den Divergenzsatz für Rechtecke auf die Rechtecke A_j an und summieren über $j \in \{1,\ldots,N\}$. Dabei kürzen sich die Integrale über die gemeinsame Grenze von A_j und A_{j+1}, und wir können die Summe auch als Integral über den Rand ∂A von A auffassen. Es folgt

$$\int_A \mathrm{div}(F)dx = \sum_{j=1}^{J} \int_{A_j} \mathrm{div}(F)dx = \sum_{j=1}^{J} \int_{\partial A_j} F dn = \int_{\partial A} F dn \tag{4}$$

Das Integral über den Rand von A ist explizit

$$\int_{\partial A} F dn = \underbrace{-\int_a^b F_2(t,c)dt}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} F_1(b,t)dt}_{\text{rechts}} - \underbrace{\int_c^{\varphi(a)} F_1(a,t)dt}_{\text{links}}$$
$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_2(t,\varphi(t_{j-1})dt}_{\text{Treppe horizontal}} - \underbrace{\sum_{j=1}^N \int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} F_1(t_j,t)dt}_{\text{Treppe vertikal}}$$

Die mit „links“, „unten“ und „rechts“ beschrifteten Integrale stimmen mit drei entsprechenden Integralen in der Definition von $\int_{\partial B} F dn$ überein. Es bleibt also die verbleibenden Ausdrücke mit der Beschriftung „Treppe“ mit dem Integral

$$\int_a^b \langle F(t,\varphi(t)),(-\varphi'(t),1)\rangle\, dt = \int_a^b F_2(t,\varphi(t))dt - \int_a^b F_1(t,\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

zu vergleichen. Wir vergleichen zuerst die Summe für die horizontalen Teile der Treppe mit dem horizontalen Teil des Integrals oben, und erhalten

$$(5)\quad \left|\sum_{j=1}^J \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_2(t,\varphi(t_{j-1}))dt - \int_a^b F_2(t,\varphi(t))dt\right|$$
$$\le \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-1}}^{x_j} |F_2(t,\varphi(t_{j-1})) - F_2(t,\varphi(t))|\, dt \le \varepsilon(b-a)$$

wegen $|t_{j-1}t| < \delta$ für $t \in [t_{j-1},t_j]$, Wahl von δ mit (2) und Wahl von η mit (1). Für die Summe zu den vertikalen Teilen der Treppe verwenden wir wiederum (1) und erhalten

$$\left|\int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} F_1(t_j,t)dt - F_1(t_j,\varphi(t_j))\big(\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\big)\right|$$
$$= \left|\int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} \big(F_1(t_j,t) - F_1(t_j,\varphi(t_j))\big)dt\right|$$
$$\le \varepsilon\,|\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})| \le \varepsilon M(t_j - t_{j-1}).$$

Ebenso gilt auf Grund des Fundamentalsatzes der Differential und Integralrechnung und (1) die Abschätzung

$$\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} F_1(t,\varphi(t))\varphi'(t)dt - F_1(t_j,\varphi(t_j))\big(\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\big)\right|$$
$$= \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(F_1(t,\varphi(t)) - F_1(t_j,\varphi(t_j))\big)\varphi'(t)dt\right| \le \varepsilon M(t_j - t_{j-1})$$

Kombinieren wir diese beiden Abschätzungen und summieren über $j \in \{1,\dots,N\}$, so erhalten wir

$$\left|\sum_{j=1}^N \int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} f_1(t_j,t)dt - \int_a^b f_1(t,\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le 2\varepsilon M(b-a).$$

Zusammen mit (5) folgt

$$\left| \int_{\partial B} F dn - \int_{\partial A} F dn \right| \leq 2\varepsilon M(b-a) + \varepsilon(b-a) \leq 3\varepsilon M(b-a)$$

Mit Gleichung (4) und der Abschätzung (3) folgt

$$\left| \int_{\partial B} F dn - \int_{B} \operatorname{div}(F) dx \right| \leq 4\varepsilon M(b-a)$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war ergibt sich die Aussage der Proposition. □