Inhalt der Prüfung: Alles aus dem ersten Semester, aber Fokus auf den Stoff aus dem zweiten Semester bis und mit Differentialgeometrie.

Hilfsmittel: Schreibzeug und Papier. Wörterbuch falls Ihre Muttersprache nicht Deutsch ist.

Zeit: 120 Minuten.

Korrektur: Selbstkorrektur, anhand Korrekturschlüssel. Korrigierte Prüfungen können an die Hilfsassistenten zur Zweitkorrektur abgegeben werden

Prüfung

Die Prüfung setzt sich aus zehn einfacheren Fragen, und vier etwas aufwändigeren Aufgaben zusammen. Bei den Lösungen der *Aufgaben* wird auch auf die Herleitung grossen Wert gelegt. Sie müssen dabei klar und verständlich erklären was Sie tun. Sinnvolle und nachvollziehbare Lösungsansätze werden bewertet.
Sie dürfen Resultate aus der Vorlesung zitieren.

Zeit: 120 Minuten.

Wichtig:

(1) Schreiben Sie ausschliesslich mit einem blauen oder schwarzen Füller oder Kugelschreiber (kein Bleistift, keine rote/grüne Farbe!).
(2) Schreiben Sie leserlich – was nicht eindeutig lesbar ist wird ignoriert.
(3) Geben Sie pro Aufgabe nur *eine* Lösung an. Sollten Sie mehrere Lösungsansätze haben, markieren Sie *deutlich*, welcher bewertet werden soll.

Name: ....

ETH-no: ....

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	A1	A2	A3	A4	$\sum$
/3	/3	/3	/3	/3	/3	/3	/3	/3	/3	/10	/10	/10	/15	75

Fragen

Frage 1 (3 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $f(x, y) = (\sin(x), x + \sin(y))$ gegebene Funktion. Berechnen Sie

$$Df(x_0)(v)$$

für den Punkt $x_0 = (0, 0)$ und den Vektor $v = (12, 11)$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Frage 2 (3 Punkte)**.** Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch das Parameterintegral

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \sin(\sin(x)t)dt$$

gegeben. Berechnen Sie die Ableitung $F'(0)$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Frage 3 (3 Punkte)**.** Definieren Sie, was eine *Norm* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und was die davon induzierte Metrik ist. Sie dürfen dabei die Begriffe *Vektorraum* und *Metrik* als bekannt voraussetzen.

Frage 4 (3 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Definieren Sie *gleichmässige Stetigkeit* für komplexwertige Funktionen auf U.

Frage 5 (3 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum. Was ist eine offene Teilmenge von X, bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie?

Frage 6 (3 Punkte)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller (x, y, z) mit $x^4 + y^4 + z^4 = 33$. Das ist eine Teilmannigfaltigkeit. Bestimmen Sie eine Basis des Tangentialraums von M am Punkt $p = (2, 1, 2)$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Frage 7 (3 Punkte)**.** Was besagt der Satz vom konstanten Rang?

Frage 8 (3 Punkte)**.** Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Ist f Riemann integrierbar? Falls ja, berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$. Falls nein, erklären Sie warum nicht.

Frage 9 (3 Punkte)**.** Berechnen Sie $\int_0^3 \log(5x+1)dx$. Eine Rechnung genügt.

Frage 10 (3 Punkte)**.** Sei F das durch $F(x,y) = (-y, xy)$ gegebene Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, und sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der Pfad $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Berechnen Sie $\int_\gamma F dt$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Aufgaben

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

stetig ist, und dass die Menge der Nullstellen von f der Abschluss von A ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $Df(x_0) = 0$. Angenommen es gibt Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$D^2 f(x_0)(v, v) < 0 \qquad \text{und} \qquad D^2 f(x_0)(w, w) > 0$$

gilt. Beweisen Sie, dass x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum von f ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die Menge $M = \{P \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rang}(P) = 1\}$ von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie!

(1) M ist eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$
(2) M ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$
(3) M ist eine kompakte Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$
(4) M ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$
(5) Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)**.** Es seien Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$A = \{(x, y) \mid x^2 = y\} \qquad \text{und} \qquad B = \{(x, y) \mid -(x-1)^2 = y\}$$

definiert. Finden Sie Punkte $a \in A$ und $b \in B$ mit minimaler Distanz.

Hinweis: Betrachten Sie dazu das Produkt $M = A \times B$ als Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$, und eine ein geeignete Funktion $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ deren Minimum auf M die gesuchte minimale Distanz ist.