Prüfung - Korrekturschema

Frage 1 (3 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $f(x,y) = (\sin(x), x + \sin(y))$ gegebene Funktion. Berechnen Sie

$$Df(x_0)(v)$$

für den Punkt $x_0 = (0,0)$ und den Vektor $v = (12,11)$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Die Jacobi-Matrix von f am Punkt (x,y) ist

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 1 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

und also ist die Ableitung von f am Punkt $(0,0)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(0) & 0 \\ 1 & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man erhält

$$Df(x_0)(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

`1 Punkt für richtigen Ansatz (Jacobi-Matrix ausrechnen), 1 Punkt für korrekte Jacobische, allgemein oder bei` $(0,0)$`, 1 Punkt für korrekte Antwort.`

Frage 2 (3 Punkte)**.** Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch das Parameterintegral

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \sin(\sin(x)t)dt$$

gegeben. Berechnen Sie die Ableitung $F'(0)$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Die Funktion F ist als Parameterintegral einer glatten Funktion selbst eine glatte Funktion, und wir können Integral und Ableitung vertauschen (`1 Punkt dafür`). Es gilt also

$$F'(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\big(\sin(\sin(x)t)\big)dt = \int_0^{2\pi} t\cos(x)\cos(\sin(x)t)dt$$

(`1 Punkt für diese Rechnung`). Insbesondere erhalten wir für $x = 0$

$$F'(0) = \int_0^{2\pi} tdt = \left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

(`1 Punkt für korrekte Antwort`)

Frage 3 (3 Punkte)**.** Definieren Sie, was eine *Norm* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und was die davon induzierte Metrik ist. Sie dürfen dabei die Begriffe *Vektorraum* und *Metrik* als bekannt voraussetzen.

`2 Punkte für korrekte Axiome für Normen, 1 Punkt für induzierte Metrik`

Frage 4 (3 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Definieren Sie *gleichmässige Stetigkeit* für komplexwertige Funktionen auf U.

Eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst gleichmässig stetig, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in U$ gilt.
3 Punkte für korrekte, vollständige Definition. Falls nicht gesagt wird was f oder was ε ist, so 1 Punkt.

Frage 5 (3 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum. Was ist eine offene Teilmenge von X, bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie?

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist offen (bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie) falls für alle $x \in U$ ein $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq U$ existiert.
3 Punkte für korrekte, vollständige Definition. Falls nicht gesagt wird was U oder was x ist, so 1 Punkt.

Frage 6 (3 Punkte)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller (x, y, z) mit $x^4 + y^4 + z^4 = 33$. Das ist eine Teilmannigfaltigkeit. Bestimmen Sie eine Basis des Tangentialraums von M am Punkt $p = (2, 1, 2)$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Die Mannigfaltigkeit M ist die Menge der Nullstellen der durch $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 33$ gegebenen Funktion. Die Ableitung von F an der Stelle p ist durch die Jacobi Matrix (den Gradienten)

$$Df(p) = 4(8, 1, 8)$$

gegeben, als lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ also durch $Df(p) = (a, b, c) \longmapsto 4(8a + b + 8c)$. Da $Df(p)$ vollen Rang 1 hat, gilt $T_pM = \ker(Df(p))$. Eine Basis ist (beispielsweise) durch die Vektoren $(-1, 8, 0)$ und $(0, 8, -1)$ gegeben.
1 Punkt für richtigen Ansatz (F definieren, Ableitung ausrechnen, Kern betrachten), 1 Punkt für $Df(p)$ als Matrix oder lineare Abbildung, 1 Punkt für korrekte Basis.

Frage 7 (3 Punkte)**.** Was besagt der Satz vom konstanten Rang?

`3 Punkte für korrekte, vollständige Aussage mit allen Hypothesen. Falls Symbole` (U, f, F, x `etc.) ohne Erklärung verwendet werden, dann nur 1 Punkt.`

Frage 8 (3 Punkte)**.** Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der Menge $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Ist f Riemann integrierbar? Falls ja, berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$. Falls nein, erklären Sie warum nicht.

Die Funktion ist nicht Riemann integrierbar (`1 Punkt`). Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, muss eine Treppenfunktion o auf $[0,1]$ mit $f \leq o$ auf jedem offenen Intervall auf dem sie Konstant ist einen Wert ≥ 1 annehmen (`1 Punkt`). Da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, muss eine Treppenfunktion u auf $[0,1]$ mit $u \leq f$ auf jedem offenen Intervall auf dem sie Konstant ist einen Wert ≤ 0 annehmen. Daraus folgt

$$\int_0^1 udx \leq 0 \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 odx \geq 1$$

also $\int (o-u)dx \geq 1$, was zeigt, dass f nicht Riemann integrierbar ist. (`1 Punkt`)

Frage 9 (3 Punkte)**.** Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^3 \log(5x+1)dx$. Eine Rechnung genügt.

(`Korrektes Endresultat`

$$\frac{16\log(16)-15}{5}$$

`genügt für volle Punktezahl. 1 Punkt für Stammfunktion von Log, 1 Punkt für Substitution`)

Frage 10 (3 Punkte)**.** Sei F das durch $F(x,y) = (-y, xy)$ gegebene Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, und sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der Pfad $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Berechnen Sie $\int_\gamma Fdt$. Begründen Sie dabei was Sie tun, in vollständigen Sätzen.

Das Pfadintegral ist durch

$$\int_\gamma Fdt = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt$$

definiert (`1 Punkt`) Es gilt $F(\gamma(t)) = (-t, t^2)$ und $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ (`1 Punkt`), also

$$\int_\gamma Fdt = \int_0^1 \big\langle (-t,t^2),(2t,3t^2)\big\rangle \, dt = \int_0^1 (-2t^2+3t^4)dt = -\frac{2}{3}+\frac{3}{5} = -\frac{1}{15}$$

(`1 Punkt`).

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

stetig ist, und dass die Menge der Nullstellen von f der Abschluss von A ist.

Wir prüfen Stetigkeit von f an einem Punkt $x_0 \in X$ (`1 Punkt`). Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta \in (0, \varepsilon)$ beliebig (`1 Punkt`). Dann gilt für alle $y \in B(x_0, \delta)$

$$f(y) = \inf\{d(y,a) \mid a \in A\} \leq d(x_0, y) + \inf\{d(x_0, a) \mid a \in A\} \leq \delta + f(x_0) < \varepsilon + f(x_0)$$

und

$$f(x_0) = \inf\{d(x_0,a) \mid a \in A\} \leq d(x_0, y) + \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} \leq \delta + f(y) < \varepsilon + f(y)$$

wobei wir beide male die Dreiecksungleichung für die Metrik d verwendet haben (`2 Punkte`). Diese beiden Abschätzungen können wir zu

$$|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$$

zusammenfassen (`1 Punkt`). Wir haben $y \in B(x_0, \delta) \implies |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ gezeigt - das heisst f ist stetig bei x_0, und da $x_0 \in X$ beliebig war, ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion (`1 Punkt`).

Ein Element $x \in X$ liegt im Abschluss von A falls $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ für alle $r > 0$ gilt (`2 Punkte`). Es folgt

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \quad &\iff \quad \forall r > 0 \exists a \in A \text{ mit } 0 \leq d(x,a) < r \\ &\iff \quad \forall r > 0 : 0 \leq f(x) < r \\ &\iff \quad f(x) = 0 \end{aligned}$$

was zu zeigen war (`2 Punkte`).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $Df(x_0) = 0$. Angenommen es gibt Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$D^2 f(x_0)(v,v) < 0 \qquad \text{und} \qquad D^2 f(x_0)(w,w) > 0$$

gilt. Beweisen Sie, dass x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum von f ist.

Siehe Korrektur von Serie 4, Aufgabe 7

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die Menge $M = \{P \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rang}(P) = 1\}$ von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie!

(1) M ist eine TeilMannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$
(2) M ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$
(3) M ist eine kompakte Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$
(4) M ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$
(5) Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$.

`Nur für richtige wahr/falsch Antwort ohne minimale Begründung gibt es keine Punkte`

(1) ist wahr, das folgt aus dem Satz vom Konstanten Rang (`1 Punkt`). Der Gradient der Determinantenbbildung $f : x, y, z, w = xz - yw$ ist $(w, -z, -y, x))$ und verschwindet nur bei $(0, 0, 0, 0)$. Aber die Nullmatrix hat nicht Rang 1 (`1 Punkt`).

(2) ist falsch, die Nullmatrix ist im Abschluss von M aber nicht ein Element von M (`1 Punkt`). Etwa konvergiert die Folge von Matrizen $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ in M

$$\begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegen die Nullmatrix(`1 Punkt für dieses oder ein ähnlich präzises Argument`).

(3) ist falsch, da M nicht beschränkt/nicht abgeschlossen ist (`1 Punkt`).

(4) M ist zusammenhängend, da M sogar Wegzusammenhängend ist (`1 Punkt`). Einen Weg von einer Matrix von Rang 1 zu einer anderen kann man beispielsweise einfach als verkettung von Wegen konstruieren: Zunächst ist für eine vorgegebene Matrix $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ durch

$$\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow M \qquad \gamma_0(t) = \begin{pmatrix} x & ty \\ z & tw \end{pmatrix}$$

falls $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, oder aber durch

$$\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow M \qquad \gamma_0(t) = \begin{pmatrix} x + ty & ty \\ z + tw & tw \end{pmatrix}$$

falls $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein Pfad in M zu einer Matrix der Form $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$gegeben. Anschliessend ist durch

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M \qquad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ tz & 0 \end{pmatrix}$$

falls $x \neq 0$, oder aber durch

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M \qquad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} x+tz & 0 \\ tz & 0 \end{pmatrix}$$

falls $x = 0$ ein Pfad in M von P_1 zu einer Matrix der Form $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $x \neq 0$ gegeben. Schiesslich ist durch

$$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow M \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t+(1-t)x & 0 \\ t(1-t) & 0 \end{pmatrix}$$

ein Weg von P_2 nach $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Verketten wir die Wege γ_0, γ_1 und γ_2, so erhalten wir einen Weg von der beliebig gewählten Matrix $P_0 \in M$ nach $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dies zeigt (wieder durch Verketten von Wegen) dass M wegzusammenhängend ist. (`3 Punkte für vollständige Argumente. Bei Alternativen Lösungen sollen Punkte möglichst analog erteilt werden. Für unsaubere oder interpretationsbedürftige Formulierungen gibt es keine Punkte.`)

(4) ist wahr, da beide Mengen (M und $\mathbb{R}^2$) die selbe Kardinalität haben (`1 Punkt, ohne weitere Begründung`). Es wird nicht nach einem Homeomorphismus oder Diffeomorphismus gefragt.

Aufgabe 4 (15 Punkte)**.** Es seien Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$A = \{(x,y) \mid x^2 = y\} \qquad \text{und} \qquad B = \{(x,y) \mid -(x-1)^2 = y\}$$

definiert. Finden Sie Punkte $a \in A$ und $b \in B$ mit minimaler Distanz.

Wir betrachten $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = x^2, w = -(z-1)^2\}$. Die Menge M ist die Nullstellenmenge der Funktion $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ w + (z-1)^2 \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix von F ist

$$DF(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(z-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie hat für alle (x,y,z,w) vollen Rang 2, was zeigt, dass M eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist. Das hätte man auch einsehen können in dem man M als Graphen der glatten Funktion $(x,z) \longmapsto (x^2, -(z-1)^2)$ interpretiert. Eine Basis des Normalenraums von M an einem Punkt $p = (x,y,z,w)$ ist (beispielsweise) durch die Zeilenvektoren von $DF(p)$

$$u = (-2x, 1, 0, 0) \qquad \text{und} \qquad v = (0, 0, 2(z-1), 1)$$

gegeben (`4 Punkte für` F `und Normalenraum`). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z,w) = (x-z)^2 + (y-w)^2.$$

Interpretiert man $a = (x, y)$ als Punkt von A und $b = (z, w)$ als Punkt von b, so ist $f(x, y, z, w) = \|a - b\|^2$ die Distanz (zum Quadrat) die wir minimieren wollen. Wir suchen also Punkte $(a, b) = (x, y, z, w)$ auf M in denen die Funktion $f|_M$ ihr globales Minimum annimmt (`4 Punkte für` f `und Gradient`). Wir berechnen

$$\text{grad}(f) = \big(2(x - z), 2(y - w), -2(x - z), -2(y - w)\big)$$

Falls f an einem Punkt (x, y, z, w) ein lokales Extremum annimt, so ist $\text{grad}(f)$ an diesem Punkt ein Normalenvektor an M, das heisst es existieren Koeffizienten (Lagrange-multiplikatoren) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad}(f) = \lambda u + \mu v$$

an diesem Punkt. Explizit gilt:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ w &= -(z-1)^2 \\ -2x\lambda &= 2(x - z) \\ \lambda &= 2(y - w) \\ 2(z-1)\mu &= -2(x - z) \\ \mu &= -2(y - w) \end{aligned}$$

(`4 Punkte für das System, auch wenn kleine Rechenfehler`) Wir substituieren die in diesem Gleichungssystem direkt gegebenen Ausdrücke für λ, μ, y und w. Es bleiben zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -4x(x^2 + (z-1)^2) &= 2(x - z) \\ -4(z-1)(x^2 + (z-1)^2) &= -2(x - z) \end{aligned}$$

Aufsummiert ergibt das $-4(x + z - 1)(x^2 + (z - 1)^2) = 0$. Falls $x^2 + (z - 1)^2 = 0$ gilt, dann muss nach obigen Gleichungen auch $x = z$ gelten, was aber dann $2x^2 - 2x + 1 = 0$ zur Folge hat. Für reelle x ist das nicht möglich. Es bleibt also nur die Möglichkeit $x + z - 1 = 0$, also $z = 1 - x$. Dies in die erste der obigen Gleichungen eingesetzt liefert

$$4x^3 + 2x - 1 = 0$$

Dieses Polynom hat eine reelle Nullstelle $\rho \in \mathbb{R}$ (da ungerade, und Ableitung überall positiv). Die gesuchten Punkte $a = (x, y)$ und $b = (z, w)$ sind damit:

$$a = (\rho, \rho^2) \qquad \text{und} \qquad b = (1 - \rho, -\rho^2)$$

(`3 Punkte für korrekte Rechnungen`)