Übungsserie 1

Zur Abgabe am 4. März: Aufgaben 4,7,10,12,14

Aufgabe 1. Sei X eine endliche Menge, und τ eine Hausdorff'sche Topologie auf X. Zeigen Sie, dass τ die diskrete Topologie ist.

Aufgabe 2. Wie viele Topologien gibt es auf der Menge $\{1,2\}$? Und auf der Menge $\{1,2,3\}$?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand folgender Teilmengen Y von $\mathbb{R}$, für die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

(1) $Y = [0,1]$
(2) $Y = \mathbb{Q}$
(3) $Y = \varnothing$
(4) $Y = (0,1)$

Aufgabe 4. Sei τ_+ die folgende Familie derjenigen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$ die folgende Eigenschaft haben:

$$\forall u \in U \, \forall x \in \mathbb{R}: \quad u \leq x \implies x \in U$$

Zeigen Sie, dass τ_+ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Welche Funktionen $f : (\mathbb{R}, \tau_+) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_+)$ sind bezüglich dieser Topologie stetig?

Aufgabe 5. Sei X eine Menge. Sei τ die Familie aller Teilmengen $U \subseteq X$ mit der Eigenschaft dass $X \setminus U$ endlich ist, oder $U = \varnothing$ gilt. Überprüfen Sie, dass die so beschriebene Familie τ von Teilmengen von X eine Topologie ist. Sie heisst **koendliche Topologie**.

Aufgabe 6. Seien X und Y topologische Räume, und sei τ eine Topologie auf $X \times Y$ mit folgende Eigenschaften:

(1) Die Projektionen $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ und $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ sind stetig.
(2) Ist Z ein weiterer topologischer Raum und $f : Z \longrightarrow X \times Y$ eine Funktion, dann ist f genau dann stetig, wenn die Verknüpfungen $\pi_X \circ f$ und $\pi_Y \circ f$ stetig sind.

Zeigen Sie, dass τ die Produkttopologie ist.

Aufgabe 7. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und sei $r \geq 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

bezüglich der von d induzierten Topologie auf X abgeschlossen ist. Stimmt es, dass die Menge $\overline{B}(x, r)$ der Abschluss von $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ ist?

Aufgabe 8. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $\pi : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Wir definieren durch

$$\tau := \{U \subseteq Y \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

die sogenannte **Quotiententopologie** auf Y.

(1) Zeigen Sie, dass τ eine Topologie auf Y ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie genau die Topologie auf Y ist, so dass
  (a) die Abbildung $\pi : X \longrightarrow Y$ stetig ist; und
  (b) für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $f : Y \longrightarrow Z$ gilt, dass f genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi$ stetig ist.

Aufgabe 9. Wir betrachten das Quadrat $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ und definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ via

$$(x, y) \sim (x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - x'| = 1 \text{ und } y = y'.$$

Sei $Y = X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \longrightarrow Y, x \longmapsto [x]$ die kanonische Surjektion. Wir versehen nun Y mit der Quotiententopologie (siehe Aufgabe 8).

(1) Beschreiben Sie die offenen Umgebungen der Punkte $\pi(x, y)$ für $(x, y) \in (0, 1) \times [0, 1]$, sowie der Punkte $\pi(0, y)$ und $\pi(1, y)$ für $y \in [0, 1]$. Können Sie Y skizzieren?
(2) Was ändert sich, wenn wir die Äquivalenzrelation $\approx$ gegeben durch

$$(x, y) \approx (x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - x'| = 1 \text{ und } y = 1 - y'$$

anstelle von $\sim$ auf Q verwenden? Können Sie auch hier Y skizzieren?

Aufgabe 10. Seien X und Y topologische Räume und seien A_1 und $A_2 \subset X$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$. Seien $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ stetige Funktionen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : X \longrightarrow Y$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 11 (Zur Lektüre)**.** Man kann mit Hilfe einer speziellen Topologie auf $\mathbb{Z}$ zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wie dies genau funktioniert kann in [AZ14] nachgelesen werden.

Aufgabe 12. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass die Folgen

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots \qquad \text{und} \qquad \sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots$$

konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwert. Definieren Sie dafür zuerst eine geeignete Kontraktion auf einem metrischen Raum, gerade so, dass der Grenzwert dieser Folgen ein Fixpunkt ist.

Aufgabe 13 (Schreibstil)**.** Stellen Sie eine weitere Übung im Stil von 12 auf, zusammen mit einer Musterlösung. Interessante Vorschläge kommen (anonym, falls gewünscht) auf die Website.

Aufgabe 14. Wir betrachten einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und die affine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\varphi(v) = Av + b \qquad\qquad A = \tfrac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Es sei d die Metrik auf $\mathbb{R}^2$ die von der Norm

$$\left\| \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \right\| = |v_1| + 20|v_2|$$

induziert wird. Zeigen Sie, dass φ eine Lipschitz-Kontraktion ist, bezüglich der Metrik d. Was folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz? Ist φ auch eine Kontraktion bezüglich der euklidischen Metrik?

Literatur

[AZ14] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, Springer, (2014)