Übungsserie 2

Zur Abgabe am 11. März: Aufgaben 2, 4, 5, 13, 14

Aufgabe 1. Seien X, Y topologische Räume, wobei X diskret ist. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig ist.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge, und seien d_1 und d_2 Metriken auf X. Angenommen es existieren reelle Zahlen $A_1 > 0$ und $A_2 > 0$ so, dass

$$d_1(x,y) \leq A_2 d_2(x,y) \qquad \text{und} \qquad d_2(x,y) \leq A_1 d_1(x,y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 die selbe Topologie auf X induzieren.

Aufgabe 3. Sei X ein diskreter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X endlich ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie: Eine folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.

Aufgabe 5. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge von X kompakt ist.

Aufgabe 6. Sei X ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass jede kompakte Teilmenge $C \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 7. Seien X und Y topologische Räume, wobei X kompakt und Y Hausdorff sei. Weiter sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 8. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $C \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $C \cap K$ abgeschlossen ist für jedes Kompaktum $K \subseteq X$.

Aufgabe 9. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge. Zu $x \in X$ definieren wir

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, und dass $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A = \{x \in X \mid f_A(x) = 0\}$ gilt.

Aufgabe 10. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und betrachte die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen $\mathcal{C}(X) = \{C \subseteq X \mid C \text{ nicht-leer, kompakt}\}$. Der *Hausdorff-Abstand* zweier kompakten Mengen ist definiert als

$$d_H(C_1, C_2) = \max\{\sup_{x \in C_1} f_{C_2}(x), \sup_{x \in C_2} f_{C_1}(x)\}$$

für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(X)$, wobei wir die Distanzfunktion aus Aufgabe 9 verwendet haben. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}(X), d_H)$ ein metrischer Raum ist. Berechnen Sie den Hausdorff-Abstand von $Q = [-1, 1]^2$ und $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 11 (Literatur)**.** Wenn (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist, dann lässt sich zeigen, dass der Raum aller kompakten Teilmengen mit dem Hausdorff-Abstand $(\mathcal{C}(X), d_H)$ ebenfalls kompakt ist (siehe [BH99, Chapter I.5, Lemma 5.31]).

Aufgabe 12. Sei X ein topologischer Raum und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullstellen $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ abgeschlossen in X ist. Überprüfen Sie, dass die Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist, wobei $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ den Raum der $n \times n$ Matrizen mit reellen Koeffizienten bezeichnet, versehen mit der Standardtopologie. Folgern Sie daraus, dass die Menge der singulären Matrizen $\{A \mid \det(A) = 0\}$ abgeschlossen in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 13. Wir betrachten die Gruppe der speziellen orthogonalen 2×2-Matrizen

$$\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det X = 1, X^T X = \mathbb{1}_2\}$$

und versehen sie mit der Teilraumtopologie induziert von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ kompakt ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad X \longmapsto X \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

ein Homöomorphismus ist, wobei $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Aufgabe 14. Die **Operatornorm** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\left\{\|Ax\|_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_2 \leq 1\right\}$$

definiert, wobei $\|\cdot\|_2$ für die Euklidische Norm steht. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ in der Tat eine Norm auf dem Vektorraum $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert. Zeigen Sie weiter, dass

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}.$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt.

Definition. Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, reellwertige Funktion auf einem metrischen Raum X. Für $x \in X$ ist die **Oszillation** oder **Schwankung** von f bei x durch

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \to 0}\Big(\sup f(B(x,\delta)) - \inf f(B(x,\delta))\Big)$$

definiert.

Aufgabe 15. Zeigen Sie, dass der Grenzwert in der Definition von $\omega(f, x)$ tatsächlich existiert. Was ist die Oszillation einer stetigen Funktion? Beweisen Sie anschliessend die folgende Proposition, und folgern Sie aus dem Fall $\eta = 0$, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmässig stetig ist.

Proposition. *Sei X eine kompakter metrischer Raum und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Angenommen es gibt $\eta \geq 0$, so dass $\omega(f, x) \leq \eta$ für alle $x \in X$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$*

$$\omega(f, x, \delta) < \eta + \varepsilon$$

gilt.

Literatur

[BH99] M. R. Bridson und A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer (1999).