# Übungsserie 3

Zur Abgabe am 18. März: Aufgaben 2,4,5,6,11

**Aufgabe 1.** Seien $X, Y$ topologische Räume, wobei $X$ zusammenhängend und $Y$ diskret ist. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ konstant ist.

**Aufgabe 2.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Beweisen Sie im Detail, dass die Relation

$$x_0 \sim x_1 \quad\Longleftrightarrow\quad \text{Es existiert ein Pfad von } x_0 \text{ nach } x_1.$$

auf der Menge $X$ eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 3.** Skizzieren Sie die folgenden topologischen Räume $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oder $X \subseteq \mathbb{C}$, und entscheiden Sie (ohne Beweis) welche davon zusammenhängend, und welche einfach zusammenhängend sind. Verlassen Sie sich dabei auf Ihre Intuition.

(1) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0\}$ für $n = 1, 2, 3$
(2) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } |z - n| = r\}$ für reelle $r > 0$.
(3) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } |z - n| < r\}$ für reelle $r > 0$.
(4) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^n + y^n = z^n\}$ für $n = 1, 2$.

**Aufgabe 4.** Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **konvex** falls für alle $x, y \in U$ und alle $t \in [0, 1]$ auch $tx + (1 - t)y$ ein Element von $U$ ist. Skizzieren Sie einige konvexe und nicht konvexe Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, und beweisen Sie, dass jede konvexe Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist.

**Aufgabe 5.** Skizzieren Sie den Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \mid t > 0\}$$

und zeigen Sie, dass $X$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 6.** Sei $X$ ein topologischer Raum, seien $x_0, x_1 \in X$, und $P(x_0, x_1)$ bezeichne die Menge aller Pfade in $X$ von $x_0$ nach $x_1$. Zeigen sie, dass die Relation

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \quad\Longleftrightarrow\quad \gamma_1 \text{ ist homotop zu } \gamma_0$$

auf der Menge $P(x_0, x_1)$ eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 7** (Recherche)**.** Finden Sie heraus was die **Fundamentalgruppe** eines topologischen Raums ist und geben Sie ein paar interessante Beispiele an. Was ist die Fundamentalgruppe des zweidimensionalen Torus?

**Aufgabe 8.** Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und es bezeichne $V = C(D, \mathbb{R})$ den Vektorraum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $U$. Für $f \in V$, eine kompakte Teilmenge $T \subseteq D$ und eine reelle Zahl $r > 0$ schreiben wir

$$B(f, T, r) = \{g \in V \mid |g(t) - f(t)| < r \text{ für alle } t \in T\}$$

Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subseteq V$ als *offen*, falls für jedes $f \in U$ eine kompakte Teilmenge $T \subseteq D$ und $r > 0$ existieren, mit $B(f, T, r) \subseteq U$. Zeigen Sie:

(1) Sei $f \in B(f_1, T_1, r_1) \cap B(f_2, T_2, r_2)$. Dann existiert eine kompakte Teilmenge $T \subseteq U$ und $r > 0$ mit $B(f, T, r) \subseteq B(f_1, T_1, r_1) \cap B(f_2, T_2, r_2)$.

(2) Zeigen Sie, dass die als offen bezeichneten Teilmengen von $V$ tatsächlich eine Topologie auf $V$ bilden, und $V$ damit zu einem topologischen Vektorraum wird. Diese Topologie nennen wir **Topologie der kompakten Konvergenz**.

*Hinweis:* Das ist eine lange Aufgabe, in der der gesamte Stoff über topologische Vektorräume revidiert wird. Ich empfehle Ihnen die Aufgabe im Team zu bearbeiten, und von allen verfügbaren Ressourcen Gebrauch zu machen. Eine optimale Lösung zu dieser Aufgabe ist ein gut strukturierter Text (Lemma, Proposition, Beweis, etc.) in dem die Topologie der kompakten Konvergenz korrekt eingeführt wird.

**Aufgabe 9.** Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und seien $f_1, \dots f_n \colon X \longrightarrow X$ Kontraktionen. Ferner bezeichne $(\mathcal{C}(X), d_H)$ den Raum aller nicht-leeren kompakten Teilmengen wie schon in Aufgabe 10 auf Serie 2.

(1) Zeigen Sie, dass es genau eine nicht-leere kompakte Teilmenge $S \subseteq X$ gibt, so dass

$$S = f_1(S) \cup \dots \cup f_n(S)$$

gilt. Verwenden Sie ohne Beweis die Tatsache, dass $(\mathcal{C}(X), d_H)$ vollständig ist.

(2) Betrachte nun $(\mathbb{R}^2, d)$ mit der Euklidischen Metrik und es seien die Kontraktionen $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= L \cdot ((x, y) - (1, 1)) + (1, 1), \\
f_2(x, y) &= L \cdot ((x, y) - (-1, 1)) + (-1, 1), \\
f_3(x, y) &= L \cdot ((x, y) - (-1, -1)) + (-1, -1), \\
f_4(x, y) &= L \cdot ((x, y) - (1, -1)) + (1, -1),
\end{aligned}$$

wobei $0 < L < 1$.

Finden Sie die Menge $S$ für $L = \frac{1}{2}$. Was ändert sich für $L = \frac{1}{4}$? Schreiben Sie ein Programm, welches Ihnen Approximationen für $S$ plottet.

**Aufgabe 10** (Challenge)**.** Konstruieren Sie einen kompakten topologischen Raum $X$, der nicht folgenkompakt ist wie folgt. Sei $X$ die Menge aller Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$. Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen* falls für jedes $f \in U$ eine endliche Teilmenge $E \subseteq [0,1]$ existiert, so, dass

$$B(f,E) = \{g \in X \mid f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in E\}$$

in $U$ enthalten ist. Zeigen Sie:

(1) Die eben eingeführten offenen Teilmengen von $X$ bilden tatsächlich eine Topologie.
(2) Bezüglich dieser Topologie ist $X$ kompakt und Hausdorff'sch.
(3) Bezüglich dieser Topologie ist $X$ nicht folgenkompakt. Betrachten Sie dazu die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch

$$f_n(x) = n\text{-te Ziffer in der Binärbruchentwicklung von } x.$$

Falls eine Zahl $x \in [0,1]$ zwei Binärbruchentwicklungen hat, so ziehen wir diejenige vor, die in $\ldots 0000 \ldots$ endet. Argumentieren Sie nun wie in Cantor's Diagonalargument: Angenommen $(f_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ sei eine konvergente Teilfolge. Definieren Sie $y \in [0,1]$ durch

$$n\text{-te Ziffer in der Binärbruchentwicklung von } y = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = n_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass $(f_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ nicht konvergiert in dem Sie $(f_{n_k}(y))_{k=0}^{\infty}$ untersuchen.

**Aufgabe 11.** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, aber $f$ nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 12.** Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und die totale Ableitung $Df(x_0, y_0)$ der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Mit Hilfe eines Computers, skizzieren Sie den Graphen von $f$ in $\mathbb{R}^3$, jeweils zusammen mit dem Graphen der affinen Funktion $(x,y) \longmapsto f(1,2) + Df(1,2)(x,y)$.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
(2) $f(x,y) = x^2 - y^2$
(3) $f(x,y) = \mathrm{Re}((x+iy)^7)$
(4) $f(x,y) = \cos(x)$
(5) $f(x,y) = y\cos(x) + x\sin(y)$