Übungsserie 4

Zur Abgabe am 25. März: Aufgaben 2,4,5,7,9

Aufgabe 1. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Differential $D(g \circ f) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf zwei Arten:

(1) indem Sie zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnen und ableiten;
(2) unter Verwendung der Kettenregel.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ ein Polynom in n Variablen. Wir sagen f sei **homogen vom Grad** d falls für eine weitere unabhängige Variable Y die Gleichung

$$f(YX_1, YX_2, \dots, YX_n) = Y^d f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

gilt. Zeigen Sie:

(1) Ein Polynom $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ ist genau dann homogen vom Grad d, wenn f eine Linearkombination von Monomen $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = d$ ist.
(2) Sei $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ homogen vom Grad d. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige symmetrische Multilinearform

$$\beta_f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, so, dass $f(x) = \beta_f(x, x, \dots, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.
(3) Formulieren sie präzise und beweisen Sie: Die Abbildung $f \longmapsto \beta_f$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - xy + 10y - 5$. Berechnen Sie die totalen Ableitungen $D^k f(0,0)$ für alle $k \geq 0$, sowie die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0)$. Bevor Sie versuchen $D^k f(0,0)$ zu berechnen, überlegen Sie sich, in welcher Form sie Ihre Antwort überhaupt angeben wollen!

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \exp(x+y)$. Berechnen Sie die totalen Ableitungen $D^k f(0,0)$ für $k = 1,2,3$, sowie die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0)$ bis zum Grad 3.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = xyz + 3e^x y$$

im Punkt $(0,1,3) \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie Ihre Antwort in Form eines Vektors der Länge 1 an.

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge. Eine Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls für alle $x, y \in U$ und $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie: Ist $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex, so ist jeder Punkt $x_0 \in U$ mit $Df(x_0) = 0$ ein globales Minimum.

Aufgabe 7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in U$ eim Punkt mit $Df(x_0) = 0$. Angenommen es gibt Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$D^2 f(x_0)(v,v) < 0 \qquad \text{und} \qquad D^2 f(x_0)(w,w) > 0$$

gilt. Was bedeutet dies für die Hesse Matrix von f bei x_0? Zeigen Sie, dass x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum von f ist.

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(x,y) = ax^2 + bx^4 + cy^2 + dy^4$ definierte Funktion. Für welche Wahl von reellen Parametern a, b, c, d ist die Hesse Matrix von f bei $(0,0)$ positiv oder negativ definit oder semidefinit, oder indefinit? Für welche Wahl von a, b, c, d nimmt f an der Stelle $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum an, und in welchen Fällen ist das lokale Extremum strikt?

Definition. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y heisst **Lipschitz-stetig**, falls es eine reelle Konstante $L > 0$ gibt, so, dass

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heisst **lokal Lipschitz-stetig**, falls für jedes $x_0 \in X$ ein $r > 0$ existiert, so dass $f|_{B(x_0,r)}$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 9. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f lokal Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass falls U konvex und die Ableitung beschränkt ist, dann ist f sogar Lipschitz-stetig.

Aufgabe 10. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Ein Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ heisst stückweise differenzierbar, falls es endlich viele Punkte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ von $[0,1]$ gibt, so dass für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ die Einschränkung $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ stetig differenzierbar ist.

(1) Zeigen Sie, dass es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ einen stückweise differenzierbaren Weg von x nach y gibt.

(2) Die Länge eines stückweise differenzierbaren Weges wie oben ist als

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{K} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(s)| ds$$

definiert. Überprüfen Sie, dass die Wegmetrik $d_{\text{Weg}}(x,y)$ für $x, y \in U$, welche durch

$$d_{\text{Weg}}(x,y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein stückweise differenzierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

definiert ist, tatsächlich eine Metrik ist.

(3) Zeigen Sie, dass die Wegmetrik die Standardtopologie auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ induziert.

(4) Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, wenn man U mit der Wegmetrik ausstattet.

(5) Finden Sie ein Beispiel einer zusammenhängenden Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer differenzierbaren Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung, die bezüglich der Euklidischen Metrik nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 11 (Challenge)**.** Es sei $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit reellen Koeffizienten. Das *Matrix Exponential* ist die Abbildung

$$\exp : V \longrightarrow V \qquad\qquad \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert und differenzierbar ist, und berechnen Sie die totale Ableitung $D\exp(X)(A)$ für alle $X \in V$ und $A \in V$ mit $AX = XA$. Können Sie die totale Ableitung auch berechnen falls $XA \neq AX$ gilt?