Übungsserie 5

Zur Abgabe am 1. April: Aufgaben 2,4,5,9,11

Definition. Sei X ein topologischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Der **Träger** oder **Support** von f ist definiert als die abgeschlossene Teilmenge

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

von X. Für ein Element $y \in X$ gilt also $y \notin \operatorname{supp}(f)$ wenn und nur wenn es ein Umgebung von y gibt, auf der f identisch 0 ist.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir bezeichnen mit

$$C_c^k(U) := \{f\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^k(U),\ \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt}\}$$

den $\mathbb{R}$-Vektorraum der ***k*-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger**. Funktionen in $C^\infty(U)$ heissen glatte Funktionen, wonach Funktionen in $C_c^\infty(U)$ auch glatte Funktionen mit kompaktem Träger heissen.

Aufgabe 1. Vergewissern Sie sich, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & \text{für } x > 0; \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

glatt ist. Benutzen Sie diese Funktion um eine glatte Funktion $\delta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zu konstruieren, welche die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\delta(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
(2) δ hat kompakten Träger $\operatorname{supp}(\delta) \subseteq (-1, 1)$;
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

Eine solche Funktion $\delta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man **Glättungskern** oder auch **Mollifier**. Diese Terminologie wird in der nächsten Aufgabe weiter erläutert werden.

Definition. Seien $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Wir definieren die **Faltung** von f mit g als die Funktion $f * g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und $\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ein Glättungskern wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(1) $f * g$ ist wohldefiniert und stetig;
(2) $f * g = g * f$;
(3) Für $f \in C^k(\mathbb{R})$ ist auch $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ mit $(f * g)^{(j)} = f^{(j)} * g$ für alle $j = 0, \ldots, k$;
(4) $f * \delta \in C^\infty(U)$ ist glatt, und $(f * \delta)^{(k)} = f * \delta^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die letzte Eigenschaft erklärt woher der Glättungskern δ seinen Namen hat. Sei $0 < \epsilon \leq 1$. Wir definieren $\delta_\epsilon\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\delta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \cdot \delta\left(\varepsilon^{-1} x\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(5) Zeigen Sie, dass δ_ε ebenfalls ein Glättungskern mit Träger $\operatorname{supp}(\delta_\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist.
(6) Zeigen Sie, dass $\delta_\varepsilon * f$ gegen f in der Topologie kompakter Konvergenz konvergiert, wenn man ε gegen 0 gehen lässt.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit kompaktem Träger, sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$. Es existiert eine glatte Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass

$$\|f(x) - \widetilde{f}(x)\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad B(x, \delta) \cap \operatorname{supp}(f) = \varnothing \implies \widetilde{f}(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Benutzen Sie dafür die Resultate aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Weiter sei $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Seien $\varepsilon, \delta > 0$. Zeigen Sie mit dem Resultat aus Aufgabe 3, dass es einen glatten Weg $\eta\colon [0,1] \longrightarrow U$ gibt, mit

$$\|\gamma(t) - \eta(t)\| < \delta \text{ für alle } t \in [0,1] \qquad \text{und} \qquad \left| \int_\gamma F dt - \int_\eta F dt \right| < \varepsilon$$

Folgern Sie daraus: Ein stetiges Vektorfeld $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ wenn für alle *glatten* Wege γ_0 und γ_1 mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ die Gleichheit

$$\int_{\gamma_0} F dt = \int_{\gamma_1} F dt$$

gilt.

Aufgabe 5. Das vollständige elliptische Integral zweiter Art ist die durch das Parameterintegral

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2(t)} dt$$

gegebene Funktion $E : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass E der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)xE''(x) + (x^2 - 1)E'(x) - xE(x) = 0$$

genügt. Berechnen Sie einige Terme der Taylor Entwicklung von E um den Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die **Bessel-Funktion zweiter Gattung** ist durch das uneigentliche Integral

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin(t) - nt)x\sin(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\big(\exp(t) + (-1)^n\exp(-nt)\big)\exp(-x\sinh(t))dt$$

für $x \in (0,\infty)$ definiert. Es kann gezeigt werden, dass Y_n die Bessel Differentialgleichung ebenfalls löst. Es gilt

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0} J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} Y_n(x) = -\infty.$$

Dies zeigt, dass J_n und Y_n linear unabhängig sind.

(1) Zeigen Sie, dass die Bessel-Funktion Y_n zweiter Gattung wohldefiniert ist und beweisen Sie die Asymptotik in $(*)$.

(2) Nehmen Sie eine geeignete Verallgemeinerung der Differentiation unter dem Integral für das uneigentliche Integrale an, und beweisen Sie damit, dass Y_n eine Lösung der Bessel-Differentialgleichung ist.

(3) Für den Beweis der geeigneten Verallgemeinerung der Differentiation unter dem Integral betrachte man die reellwertige Funktion

$$f(x,t) = \big(\exp(t) + (-1)^n\exp(-nt)\big)\exp(-x\sinh(t))$$

auf $(0,\infty)\times[1,\infty)$ und

$$F(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{falls } s = 0 \\ \dfrac{f(x,s^{-1})}{s^2} & \text{falls } s > 0 \end{cases}$$

auf $(0,\infty)\times[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_1^{\infty} f(x,t)dt = \int_0^1 F(x,s)ds$$

gilt und dass F alle Voraussetzungen von Satz über das Vertauschen von Integral und Ableitung erfüllt.

Aufgabe 7. Eine **Schlaufe** in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe γ in U

$$\int_{\gamma} F dt = 0$$

gilt.

Aufgabe 8. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und sei $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld. Zeigen Sie, dass Potentiale von F sich um Konstanten unterscheiden.

Aufgabe 9. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass F genau dann die Integrabilitätsbedingung

$$\partial_j F_k(x) = \partial_k F_j(x)$$

für alle $x \in U$ und alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt, wenn

$$\langle DF(x)(v), w \rangle = \langle v, DF(x)(w) \rangle$$

für alle $x \in U$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 10. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y) = \big(\lambda x \exp(y), (y + 1 + x^2) \exp(y)\big)$$

konservativ? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von F.

Aufgabe 11. Sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| < \pi/2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + y \tan^2(x) + \cos(z) \\ \tan(x) \\ -x \sin(z) \end{pmatrix}.$$

Ist F konservativ? Falls ja, geben Sie ein Potential von F an.

Aufgabe 12. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das durch

$$F(x, y, z) = (x, y, \Phi(x, y, z))$$

gegebene Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ konservativ? Bestimmen Sie in diesen Fällen ein Potential.