

Übungsserie 6

Zur Abgabe am 8. April: Aufgaben 1,2,5,6,7

Aufgabe 1. Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen von f und $\partial_y f$ für die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- (1) $f(x, y) = xy(x + y - 1)$;
- (2) $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$;
- (3) $f(x, y) = y^2(1 - x) - x^3$;
- (4) $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$.

An welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sind die Voraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen erfüllt, und wo nicht?

Gibt es eine abgeschlossene Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$, für die es keine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $A = f^{-1}(0)$?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $D_{(x_0, y_0, z_0)}u$ und $D_{(x_0, y_0, z_0)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob die Gleichung $y^2(1 - x) = x^3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach der Variablen x auflösbar ist.

Aufgabe 4. Sei $0 < \rho < 1$, sei $u_0 \in \mathbb{R}$ und sei $X = (C^0([-\rho, \rho]), \|\cdot\|_\infty)$ der vollständige normierte Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-\rho, \rho]$ versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten die Abbildung $T: X \rightarrow X$ gegeben durch

$$T(u)(x) = \int_0^x u(t) dt + u_0$$

für alle $u \in X$, $x \in [-\rho, \rho]$.

Zeigen Sie, dass T eine Kontraktion ist, und folgern Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt. Können Sie den Fixpunkt explizit angeben?

Aufgabe 5. Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen kam der Banachsche Fixpunktsatz zur Anwendung. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen letzteren Satzes notwendig sind, indem sie je ein Beispiel für die folgenden Phänomene angeben:

- (1) ein nicht-vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Lipschitz-Kontraktion $f: X \rightarrow X$ ohne Fixpunkt;
- (2) ein vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Funktion $f: X \rightarrow X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

Definition. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit

$$\text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{A: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \mid A \text{ multilinear}\}$$

den \mathbb{R} -Vektorraum aller multilinearen Abbildungen. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung

$$A: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

multilinear heisst, wenn sie

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + y, x_{i+1}, \dots, x_k) = \lambda A(x_1, \dots, x_k) + A(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

für alle $x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $i = 1, \dots, k$ erfüllt.

Eine multilineare Abbildung $A \in \text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heisst **symmetrisch**, wenn

$$A(x_1, \dots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_k$ und alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Eine multilineare Abbildung $A \in \text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heisst **alternierend**, wenn

$$A(x_1, \dots, x_k) = \text{sgn}(\sigma) A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_k$ und alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 6 (Multilineare Abbildungen). Sei $k, n \in \mathbb{N}$ und $\text{Abb}(\{1, \dots, n\}^k, \mathbb{R})$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller Abbildungen von $\{1, \dots, n\}^k$ nach \mathbb{R} (mit punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation).

- (1) Zeigen Sie, dass $\varphi: \text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Abb}(\{1, \dots, n\}^k, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$\varphi(A)(i_1, \dots, i_k) = A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Wir bezeichnen mit $\text{Symm}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Menge aller symmetrischen multilinearen Abbildungen und mit $\text{Alt}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Menge aller alternierenden multilinearen Abbildungen.

- (2) Zeigen Sie, dass $\text{Symm}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subseteq \text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\text{Alt}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subseteq \text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lineare Unterräume sind.
- (3) Bestimmen Sie Basen von $\text{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\text{Symm}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\text{Alt}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und somit die jeweiligen Dimensionen.

Aufgabe 7 (Zurückziehen von Vektorfeldern). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und sei $\varphi : V \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(1) Das Zurückziehen von Vektorfeldern

$$\varphi^* : \{\text{stetige Vektorfelder auf } U\} \rightarrow \{\text{stetige Vektorfelder auf } V\}$$

ist linear.

(2) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\psi : W \rightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann gilt $\psi^* \varphi^* F = (\varphi \circ \psi)^* F$ für jedes stetige Vektorfeld F auf U . Ausserdem gilt $\text{id}_U^* F = F$.

(3) Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \varphi^* F dt = \int_{\varphi \circ \gamma} F dt$$

für jedes stetige Vektorfeld F auf U .

(4) Ist F ein Vektorfeld von Klasse C^k auf U und $\varphi : V \rightarrow U$ von Klasse C^{k+1} , dann ist $\varphi^* F$ von Klasse C^k .

(5) Sei F ein Vektorfeld von Klasse C^1 auf U und $\varphi : V \rightarrow U$ von Klasse C^2 . Erfüllt F die Integrabilitätsbedingungen, dann erfüllt $\varphi^* F$ ebenfalls die Integrabilitätsbedingungen.

Aufgabe 8 (Lektüre). Es gibt neben dem in der Vorlesung gezeigten Beweises des Satz über implizite Funktionen auch elementare Beweise, welche keine Fixpunkttheorie verwenden. Lesen Sie hierzu [1].

LITERATUR

[1] Oswaldo Rio Branco de Oliveira, *The Implicit and the Inverse Function theorems: easy proofs*, arXiv:1212.2066