Übungsserie 7

Zur Abgabe am 15. April: Aufgaben 2, 4, 5, 8, 16

Aufgabe 1. Sei $n \geq 1$ und es bezeichne

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

die n-dimensionale Einheitssphäre. Benutzen Sie die glatte Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$ und den Satz über den konstanten Rang, um zu zeigen, dass $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Geht das auch für $n = 0$?

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$ und seien $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ Polynome in n Variablen. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f(x) = (P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen solch eine Abbildung **polynomial**. Zeigen Sie: Falls eine polynomiale Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = (Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x))$$

mit $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ existiert, dann ist die Abbildung $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(x) = \det(Df(x))$$

konstant. Geben Sie einige nichttriviale Beispiele für solche Funktionen f und g, mit Polynomen vom Grad > 1.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Matrix $I_m - B$ invertierbar ist mit

$$(1_m - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j.$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ ist dabei als Grenzwert der Folge $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j\right)_{n=0}^{\infty}$ aufzufassen; ein Teil der Aussage ist also, dass diese Folge unter den getroffenen Annahmen konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ offen ist und dass zu $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 4. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Existieren nichtleere, offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $f\colon U \longrightarrow V$, so gilt $m = n$.

Aufgabe 5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, für welche ein $\alpha > 0$ existiert mit

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \geq \alpha \|x - y\|_2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 6. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ so, dass $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

gilt. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von (x_0, y_0, z_0) gibt, so dass die Nullstellenmenge $N = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$ als Graph von Funktionen $X(y, z)$, $Y(x, z)$ und $Z(x, y)$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass

$$(\circ) \qquad \partial_y X(y, z) \cdot \partial_x Z(x, y) \cdot \partial_z Y(x, z) = -1$$

für alle $(x, y, z) \in N$ gilt.

Hinweis: Die Relation $(\circ)$ heisst **Tripelproduktregel** oder auch **zyklische Kettenregel**. Sie spielt unter anderem in der Thermodynamik eine Rolle, wo x, y und z für Temperatur, Druck und Volumen eines Gases stehen, und f für eine Zustandsgleichung.

Aufgabe 7 (Stereopgraphische Projektion)**.** Sei $n \geq 1$ und es bezeichne $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Einheitssphäre. Bestimmen Sie $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$, so dass

$$\lambda(x)(x - e_{n+1}) + e_{n+1} \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

gilt. Schreibe $U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} < 1\}$, und für $x \in U$ schreibe $P(x)$ für den eindeutigen Schnittpunkt von $\mathbb{S}^n$ mit der Geraden durch x und e_{n+1}. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : U \longrightarrow U \qquad \varphi(x) = \lambda(P(x)) \cdot (x - e_{n+1}) + e_{n+1}$$

ein Diffeomorphismus ist, und sich zu einer Bijektion $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ einschränkt.

Die stereographische Projektion kommt in der Kartographie zum Einsatz, ist aber etwa auch in der Kristallographie nützlich. Für $n = 2$ kann man Sie in einer eleganten Form mit komplexen Zahlen schreiben - siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`

Aufgabe 8 (Polarkoordinaten)**.** Die Abbildung $\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

nennt man auch **Polarkoordinaten**. Machen Sie sich mit den Eigenschaften dieser Abbildung vertraut, indem Sie Bilder der Abbildungen $r \longmapsto \Phi(r,\varphi_0)$ und $\varphi \longmapsto \Phi(r_0,\varphi)$ für einige feste $r_0 \in (0,\infty)$, $\varphi_0 \in (-\pi,\pi)$ skizzieren.
Zeigen Sie, dass $\det(D\Phi(r,\varphi)) = r$ gilt, und dass

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,0]\times\{0\})$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 9 (Kugelkoordinaten)**.** Die Abbildung $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

nennt man auch **Kugelkoordinaten**. Machen Sie sich mit den Eigenschaften dieser Abbildung vertraut, indem Sie Bilder der Abbildungen $r \longmapsto \Phi(r,\theta_0,\varphi_0)$, $\theta \longmapsto \Phi(r_0,\theta,\varphi_0)$ und $\varphi \longmapsto \Phi(r_0,\theta_0,\varphi)$ für einige feste $r_0 \in (0,\infty)$, $\theta_0 \in (0,\pi)$, $\varphi_0 \in (-\pi,\pi)$ skizzieren.
Zeigen Sie, dass $\det(D\Phi(r,\theta,\varphi)) = r^2\sin(\theta)$ gilt, und dass

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R})$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 10. Wir betrachten die 3-dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^3$ als Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$. Geben Sie eine glatte surjektive Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ an.

Aufgabe 11. Wir betrachten die Funktion $f_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_t(x,y) = e^{-(x-1)^2-y^2} + e^{-(x+1)^2-y^2} - t$$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge $N_t = f_t^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang erfüllt. Welche Dimension hat N_t für $t \in T$? Gibt es $t \in \mathbb{R}\setminus T$, sodass N_t dennoch eine Teilmannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 12. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^4+y^4+z^4-1 \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Erfüllt $N = f^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang? Ist N eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$? Falls ja, welche Dimension hat sie?

Aufgabe 13. Wir betrachten die Funktion $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_t(x,y,z) = (x-y)^2 + y^2 - t$$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge $N_t = f_t^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang erfüllt. Welche Dimension hat N_t für $t \in T$? Gibt es $t \in \mathbb{R} \setminus T$, sodass N_t dennoch eine Teilmannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 14. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = z^3 - \exp(xy)(x^3 - y^2).$$

Erfüllt $N = f^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang? Ist N eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$? Falls ja, welche Dimension hat sie?

Aufgabe 15. Wir betrachten $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_t(x,y,z) = (z - tx)\left(x^2 + y^2 - z^2 + 1\right)$$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge $N_t = f_t^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang erfüllt. Welche Dimension hat N_t für $t \in T$? Gibt es $t \in \mathbb{R} \setminus T$, sodass N_t dennoch eine Teilmannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 16. Seien $f, g_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2, \qquad \text{und} \qquad g_t(x,y,z) = x + y - z - t$$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge $N_t = f^{-1}(0) \cap g_t^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 17 (Challenge)**.** Sei $n \geq 1$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine polynomiale Abbildung wie in Aufgabe 2. Angenommen die Funktion $J : x \longmapsto \det(Df(x))$ sei konstant und nicht null. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und dass die zu f inverse Funktion wiederum polynomial ist.
Hinweis: Das ist wirklich schwierig! Überlegen Sie sich, welche vieleicht etwas einfacheren Spezialfälle man betrachten könnte, und versuchen Sie, das Problem in diesen Fällen zu lösen.

Aufgabe 18. Finden Sie eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die sowohl eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2, als auch eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.