Übungsserie 8

Zur Abgabe am 22. April: Aufgaben 2,3,6,8,11

Aufgabe 1. Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = (1, 1, \sqrt{3})$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(x) + \sin(y).$$

Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM des Graphen

$$M = \mathrm{Graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

von f bei $p = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}))$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

welche einen Torus $M = \operatorname{im} \Phi \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisiert.
Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM im Punkt $p = \Phi(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 5. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $\Gamma(TM)$ die Menge aller Schnitte des Tangentialbündels TM.
Zeigen Sie, dass $\Gamma(TM)$ mit einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur versehen werden kann. Finden Sie ausserdem einen Weg, wie man eine Abbildung $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit einem Schnitt $s \in \Gamma(TM)$ multiplizieren kann, sodass man wieder einen Schnitt $f \cdot s \in \Gamma(TM)$ erhält.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x-1)^2 - (y-2)^2.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f auf dem Quadrat $Q = [0,2] \times [0,2]$. Diskutieren Sie dabei zunächst separat Extrema auf dem Inneren von Q, auf den einzelnen Kanten ohne die jeweiligen Eckpunkte, und auf den Eckpunkten.

Aufgabe 7. Wir betrachten die kompakte Menge

$$K = \{(x, y) \in [-1,1]^2 \mid y^3 - x^2 = 0\},$$

und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 4y - 3x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf K.

Aufgabe 8. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf...

(a) ...dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
(b) ...der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 9. Wir betrachten den abgeschlossenen Ball

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + 16z^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf B.

Aufgabe 10. Sei $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann auch das Bild $A(N) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 12. Sei $X \subseteq [0, 1)$ die Menge aller reellen Zahlen in deren Dezimalbruchentwicklung keine der Ziffern $3, 4, 5, 6, 7$ vorkommt. Zeichnen Sie X und zeigen Sie, dass $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist. Ist X abzählbar? Zeichnen Sie $X \times X \subseteq \mathbb{R}^2$. Ist $X \times X$ eine Nullmenge?

Aufgabe 13 (Schreibstil)**.** Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion.
Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung

$$\left| \int_Q f(x)dx \right| \leq \int_Q |f(x)|\, dx$$

gilt, indem Sie den Beweis der entsprechenden Aussage für das eindimensionale Riemann-Integral anpassen (Satz 5.26 im Skript). Achten Sie darauf ausführlich und möglichst sauber zu argumentieren!

Aufgabe 14 (Recherche)**.** Was ist das Tarski-Paradox, und was hat das mit Volumen von Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ zu tun?

Aufgabe 15 (Geschichte)**.** Henri Lebesgue war Doktorand von Émile Borel an der École Normale Superieure in Paris. Beide haben sich für Mass- und Integrationstheorie interessiert, und viel zu deren Grundlagen und Entwicklung beigetragen. Über mehrere Jahre führten Borel und Lebesgue einen unschönen Disput darüber, wer denn nun Urheber der Masstheorie sei. Ein interessantes Zeitdokument dazu ist Lebesgues [L1918], wo unter anderem

M. Borel a affirmé que la définition de la mesure était cohérente. C'est moi qui l'ai démontré.

(Abschnitt V, ab Seite 243) zu lesen ist.
`http://archive.numdam.org/article/ASENS_1918_3_35__191_0.pdf`

Literatur

[L1918] H. Lebesgue, *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, Annales scientifiques de l'E.N.S. 3e série, tome **35** (1918), p. 191-250