Übungsserie 9

Zur Abgabe am 6. Mai: Aufgaben 3, 6, 7, 9, 11

Aufgabe 1. Sei $D = [0,2] \times [0,1]$. Berechnen Sie

$$\int_D (x^3 + 3x^2y + y^3)\, d(x,y).$$

Aufgabe 2. Es bezeichne $D \subseteq \mathbb{R}^2$ das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$ und (π,π). Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x\cos(x+y)\, d(x,y).$$

Aufgabe 3. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, y > 1, x+y < 3\}$. Berechnen Sie

$$\int_D \frac{1}{(x+y)^3}\, d(x,y).$$

Aufgabe 4. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x, x+y-2 < 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_D |(x-y)(x+y-2)|\, d(x,y).$$

Aufgabe 5. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$. Berechnen Sie

$$\int_D (x^3 + y^3)\, d(x,y).$$

Aufgabe 6. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x+y > 0\}$. Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes und der Polarkoordinaten aus Aufgabe 8 auf Serie 7 das Integral

$$\int_D \frac{x+y}{\sqrt{2}}\, d(x,y).$$

Aufgabe 7. Sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1, z^2 > x^2 + y^2, z > 0\}$. Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes und der Kugelkoordinaten aus Aufgabe 9 auf Serie 7 das Integral

$$\int_D z\, d(x,y,z).$$

Aufgabe 8. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die Teilmenge $a + \lambda B = \{a + \lambda b \mid b \in B\}$ Jordan-messbar ist mit Volumen

$$\mathrm{vol}(a + \lambda B) = |\lambda|^n \,\mathrm{vol}(B).$$

Aufgabe 9. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $B_1, \ldots, B_m \subseteq Q$ eine Zerlegung von Q in Jordan-messbare Mengen, d.h. $\bigcup_{i=1}^m B_i = Q$ und $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \varnothing$ für alle $i \neq j$.
Zeigen Sie: Eine beschränkte Funktion $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $i = 1, \ldots, m$ die Einschränkung $f|_{B_i}\colon B_i \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \int_{B_i} f(x)\,dx.$$

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine Funktion $F = (F_1, \ldots, F_m)\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heisst Riemann-integrierbar, falls jede Komponente $F_i\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir

$$\int_B F(x)\,dx = \left(\int_B F_1(x)\,dx, \ldots, \int_B F_m(x)\,dx\right).$$

Aufgabe 10. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass F genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn für jede lineare Abbildung $\lambda\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ die Komposition $\lambda \circ F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\lambda\left(\int_B F(x)\,dx\right) = \int_B \lambda(F(x))\,dx$$

gilt, falls $F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar ist.

Bemerkung. Aufgabe 7 zeigt, dass man die obige Definition von Riemann-integrierbarkeit für Abbildungen $F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ durch die in der Aufgabe gegebene äquivalente Charakterisierung ersetzen kann. Das Integral $v = \int_B F(x)\,dx \in \mathbb{R}^m$ wird dann definiert als der eindeutige Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\lambda(v) = \int_B \lambda(F(x))\,dx$$

für jede lineare Abbildung $\lambda\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$.
Der Vorteil dieser Definition ist, dass sie Koordinaten-frei ist. Insbesondere kann man sie direkt verallgemeinern zu einer Definition von Riemann-integrierbarkeit für Funktionen $F\colon B \longrightarrow V$, wobei V nur noch ein topologischer Vektorraum ist, welcher nicht mehr notwendigerweise endlich-dimensional ist![1]

[1]Natürlich muss man sich hier fragen, ob Elemente $v \in V$ immer noch eindeutig durch ihre Evaluierung auf allen möglichen (stetigen) linearen Abbildungen $\lambda\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimmt sind. Im Allgemeinen stimmt das nicht. Der Satz von Hahn-Banach garantiert dies jedoch für eine hinreichend grosse Klasse von topologischen Vektorräumen; insbesondere für alle normierten topologischen Vektorräume.

Aufgabe 11. Eine Teilmenge $J \subset \mathbb{R}^n$ heisst eine **Jordan-Nullmenge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Familie $Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, so dass

$$J \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} Q_k, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_k) < \varepsilon$$

gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) J ist eine Jordan-Nullmenge.
(2) J ist Jordan-messbar und $\mathrm{vol}(J) = 0$.
(3) $\overline{J}$ ist eine beschränkte Lebesgue-Nullmenge.

Aufgabe 12. Wir definieren die Funktion $h\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter definieren wir $f\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} h(x), & \text{falls } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Für jedes $x \in [0,1]$ betrachten wir die Funktion $f_x\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_x(y) = f(x,y)$, sowie $F_-(x) = \sup \mathcal{U}(f_x)$ und $F_+(x) = \inf \mathcal{O}(f_x)$.
Für jedes $y \in [0,1]$ betrachten wir weiter die Funktion $g_y\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g_y(x) = f(x,y)$, sowie $G_-(y) = \sup \mathcal{U}(g_y)$ und $G_+(y) = \inf \mathcal{O}(g_y)$.
Bestimmen Sie F_- und F_+ bzw. G_- und G_+. Wo sind diese Funktionen stetig? Ist f Riemann-integrierbar?

Aufgabe 13 (Challenge)**.** Sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, x^2 + z^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\}$. Zeichnen Sie D und berechnen Sie das Volumen.