Übungsserie 10

Zur Abgabe am 13. Mai: Aufgaben 2, 6, 9, 13, 14

Aufgabe 1. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2 + \cos(x^2 + y^2)}\, dxdy.$$

Aufgabe 2. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D xy(x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Aufgabe 3. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\, dxdy.$$

Aufgabe 4. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Fortsetzung $f_!\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ von f durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ kompakten Träger hat. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Träger $\mathrm{supp}(f) \subseteq B$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 5. Sei J eine Jordan-Nullmenge (siehe Serie 9) und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und $\int_J f dx = 0$ erfüllt.

Aufgabe 6. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $L(A)$ Jordan-messbar ist, mit $\mathrm{vol}(L(A)) = |\det(L)| \cdot \mathrm{vol}(A)$.

Aufgabe 7. Die euklidischen Isometrien von $\mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, welche sich als

$$\varphi(x) = A \cdot x + b$$

mit $A \in O(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A^T \cdot A = I_n = A \cdot A^T\}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ schreiben lassen. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und jede euklidische Isometrie $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auch $\varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist und

$$\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \mathrm{vol}(A)$$

gilt. Insbesondere ist das Volumen invariant unter euklidischen Isometrien. Sind die euklidischen Isometrien genau die Abbildungen, welche das Volumen invariant lassen?

Aufgabe 8. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1\}.$$

Sie dürfen dabei das Volumen ω_n des n-dimensionalen Einheitsballes aus Aufgabe 10 als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$ heisst n-dimensionaler **Standardsimplex**. Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(\Delta_n)$ sowie das Integral

$$\int_{\Delta_n} e^{x_1+\cdots+x_n}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Aufgabe 10. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne ω_n das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

gilt. Berechnen Sie ω_{100} mit Computerhilfe auf 30 korrekte Nachkommastellen. WTF? Für welches n ist ω_n maximal?
<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie oder benutzen Sie ohne Beweis, dass das eindimensionale Integral

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n(x)\, dx$$

die Gleichung $I_n I_{n-1} = \frac{1}{n} I_1 I_0 = \frac{2\pi}{n}$ erfüllt, und benutzen Sie dies, um eine Rekursionsformel für ω_n herzuleiten.

Aufgabe 11. Die Menge $\mathbb{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ wird **Poincaré Halbebene** genannt. Für eine kompakte, Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{H}$ definieren wir den hyperbolischen Flächeninhalt als

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(A) = \int_A \frac{1}{y^2} d(x,y).$$

Zeigen Sie, dass die Diffeomorphismen $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ der Form

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc = 1$$

den hyperbolischen Flächeninhalt invariant lassen, d.h. für alle Jordan-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{H}$ gilt $\mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(\varphi(A)) = \mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(A)$.

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol}(D) > 0$. Der **Schwerpunkt** $\operatorname{bary}(D) \in \mathbb{R}^n$ **von** D ist definiert als

$$\operatorname{bary}(D) = \frac{1}{\operatorname{vol}(D)} \int_D (x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Hierbei verstehen wir vektorwertige Integration komponentenweise; siehe Serie 9.

Aufgabe 12. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Menge

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < (x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 9(z-3)^2 < 4\}.$$

Aufgabe 13. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol}(D) > 0$ und sei $\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von der Form $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

(1) Zeigen Sie, dass $\varphi(\operatorname{bary}(D)) = \operatorname{bary}(\varphi(D))$ gilt. Stimmt die Aussage immer noch, wenn wir nur $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ fordern?

(2) Folgern Sie aus (1), dass

$$\operatorname{bary}(D) \in \operatorname{Fix}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = x\},$$

falls $\varphi(D) = D$ gilt. Lösen Sie nun Aufgabe 12 erneut.

Aufgabe 14. Sei $X = \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt, Jordan-messbar und} \operatorname{vol}(K) > 0\}$, und es bezeichne $d_H \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ den Hausdorff-Abstand (siehe Serie 2 Aufgabe 10).
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\operatorname{bary} \colon (X, d_H) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **nicht** stetig ist.