Übungsserie 11

Zur Abgabe am 20. Mai: Aufgaben 3, 5, 6, 10, 12

Aufgabe 1. Der Begriff uneigentlicher Riemann-integrale aus dem ersten Semester ist *nicht* kompatibel mit dem Begriff mehrdimensionaler uneigentlicher Riemann-integrale. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist als eindimensionales Integral, in dem Sinn also, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ beide Grenzwerte in der Summe

$$\lim_{R\to\infty} \int_{x_0}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{x_0} f(x)dx$$

existieren. Zeigen Sie anschliessend, dass die Funktion f in der Theorie mehrdimensionaler uneigentlicher Integrale nicht integrierbar ist, in dem Sie eine Ausschöpfung $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ von $\mathbb{R}$ konstruieren, für die

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f(x)dx$$

divergiert.

Aufgabe 2 (Challenge)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass auch $|f| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle Ax, x\rangle)dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$$

Aufgabe 4. Für $x, y > 0$ ist die **Betafunktion** durch

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

gilt.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass das das Gravitationsfeld der Kugel $B = \overline{B(1,0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ an jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ dem einer Punktmasse in 0 entspricht, indem Sie das Potential

$$V(y) = \int_B -\|x-y\|^{-1}\,dx$$

berechnen, und überprüfen, dass dieses proportional zu $1/\|y\|$ ist.
Führen Sie dieselbe Rechnung für $y \in B$ durch. Welche zusätzlichen Schwierigkeiten ergeben sich?

Aufgabe 6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $B = \overline{B(x_0, r)} \subseteq U$ ein abgeschlossener Ball mit Radius $r > 0$. Folgern Sie aus dem Divergenzsatz für Bereiche unter Graphen, dass

$$\int_B \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial B} F dn$$

gilt. Schreiben Sie zuerst das rechte Integral mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung γ des Kreises ∂B. Zeigen Sie anschliessend, dass die Divergenz von F bei $x_0 \in U$ durch

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B(x_0,r)} F dn$$

gegeben ist.

Aufgabe 7. Finden Sie für die folgenden Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^2$ positiv orientierte Parametrisierungen des Randes von B, und berechnen Sie die entsprechende Aussennormale.

(1) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$;
(2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$;
(3) B ist das Innere des Polygons mit aufeinanderfolgenden Eckpunkten $(3,1)$, $(1,1)$, $(1,3)$, $(-1,3)$, $(-1,1)$, $(-3,1)$, $(-3,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,-3)$, $(1,-3)$, $(1,-1)$, $(3,-1)$.

Aufgabe 8. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich und $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes von B.
Verwenden Sie den Divergenzsatz, um zu zeigen, dass

$$\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \gamma(t), n_\gamma(t) \rangle \, dt,$$

gilt. Illustrieren Sie dies im Fall einer Kreisscheibe.
Hinweis: Betrachten Sie das glatte Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x) = x$.

Aufgabe 9. Wir betrachten den Bereichs B im Inneren der Kurve die entsteht, wenn wir einen Kreis mit Radius $\frac{r}{n}$ am inneren Kreis mit Radius r abrollen und dabei einen Punkt auf dem sich bewegenden Kreis verfolgen.
Verwenden Sie Aufgabe 8, um den Flächeninhalt $\operatorname{vol}(B)$ zu berechnen.

Aufgabe 10. Adaptieren Sie den Beweis zum Satz vom konstanten Rang, um das folgende Lemma aus der Vorlesung zu beweisen:

Sei $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion mit Null als regulärem Wert. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \geq 0\}$$

glatt berandet und $\partial B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) = 0\}$.

Aufgabe 11. Auf der Homepage finden Sie neben dieser Serie ein "Extra"-PDF. In dieser Datei finden Sie den Beweis zum Divergenzsatz für Gebiete unter dem Graphen einer Funktion.

Lesen Sie den Beweis im Detail. Bereiten Sie den Beweis für sich so auf, dass Sie Ihn in einem Vortrag von 25 Minuten erklären könnten.

Aufgabe 12. Wir betrachten das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ und eine offene Überdeckung durch zwei Intervalle (a_1, b_1), (a_2, b_2) mit $a_1 < 0 < a_2 < b_1 < 1 < b_2$.

Finden Sie **explizite** stetige Funktionen $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, sodass gilt:

- $\mathrm{supp}(\psi_0) \cap [0, 1] = \varnothing$,
- $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset (a_i, b_i)$ für $i = 1, 2$, und
- $\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 = 1$.

Eine solche Zerlegung nennt man eine (stetige) Partition der Eins. Verwenden Sie die Resultate zu Glättungskernen aus Serie 5, um **glatte** Funktionen $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ zu finden, welche die obigen Eigenschaften besitzen.

Aufgabe 13 (Recherche)**.** Suchen Sie nach dem Stichwort *Planimeter* auf Youtube, und schauen Sie sich an wie so ein Gerät benutzt wird. Wie funktioniert das? Vergleichen Sie mit Aufgabe 8. Könnten Sie so etwas im Prinzip konstruieren? Extrapreis für die Person, die ein funktionierendes Planimeter baut und in die Vorlesung bringt.