Übungsserie 12

Zur Abgabe am 27. Mai: Aufgaben 3, 4, 8, 9, 12, 13

<u>Hinweis</u>: *Sollten Integrale zu kompliziert werden, um sie von Hand zu berechnen, benutzen Sie ein Computeralgebrasystem!*

Aufgabe 1. Parametrisieren Sie ein Möbiusband $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie den Flächeninhalt von S. Treffen Sie dabei geeignete Wahlen für den Verlauf der Mittellinie, die Bandbreite und die Drehung des Bandes um die Mittellinie.

Aufgabe 2. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ die Vereinigung der beiden abgeschlossenen Bälle mit Radius 1 um die Punkte $(0,0,0)$ und $(1,0,0)$. Parametrisieren Sie den Rand ∂B. Berechnen Sie anschliessend den Oberflächeninhalt von ∂B.

Aufgabe 3. Sei $S = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ und $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \operatorname{dist}(x,S) \leq 1\}$, wobei $\operatorname{dist}(x,S) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in S\}$ den minimalen Abstand von S zu $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Parametrisieren Sie ∂T und berechnen Sie anschliessend die Fläche.

Aufgabe 4. Das Kreuzprodukt $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass

$$\langle v, x \times y \rangle = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ v & x & y \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

für alle $v, x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt. Identifiziert man also $\mathbb{R}^3$ mit seinem Dualraum, so gilt $x \wedge y = x \times y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = (3x, y^3, -2z^2)$ und sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ der durch die Flächen $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 9\}$, $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ und $\{(x,y,5) \in \mathbb{R}^3\}$ berandete Bereich. Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_B \operatorname{div}(F)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial B} F\, dn.$$

Aufgabe 6. Seien $a, b, c > 0$, sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ und sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial B} F\, dn.$$

Aufgabe 7. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x,y,z) = (2xy, 3xy, ze^{x+y})$ und sei $B = [0,1]^3$. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial B} F\, dn.$$

Aufgabe 8. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$ und sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}$. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial B} F\, dn.$$

Aufgabe 9. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x) = (\|x\|, \|x\|, \|x\|)$ und sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial B} F\, dn.$$

Aufgabe 10. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = (x\cos^2(z), y\sin^2(z), z\sqrt{x^2+y^2})$ und sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial B} F\, dn.$$

Aufgabe 11. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{3} \int_{\partial B} x\, dn$$

gilt. Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 8 in Serie 11.

Aufgabe 12. Sei $F = (F_1, F_2, F_3) \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich. Wir definieren die Rotation von F als das Vektorfeld $\operatorname{rot}(F) \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial B} \operatorname{rot}(F)\, dn = 0.$$

Aufgabe 13. Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta f \, dx = 0,$$

wobei $\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$ den Laplace-Operator bezeichnet.