Übungsserie 13

Zur Abgabe am -: Aufgaben -

Aufgabe 1. Die obere Hemisphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > 0\}$ von $\mathbb{S}^2$ sei orientiert durch das Normalenfeld $n\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit positiver z-Komponente und $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = (xy, z^2, 1).$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_S \operatorname{rot}(F)\, dn$ von $\operatorname{rot}(F)$ durch S auf zwei Arten:

a) direkt anhand der Definition von Flussintegralen;
b) unter Verwendung des Satzes von Stokes.

Aufgabe 2. Seien $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2(xz + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(yz - x)}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)$$

und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0), \\ \gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2) \\ \gamma_3(t) &= (3\cos(t) + 6, 3\sin(t), 3). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(F)$ von F und das Wegintegral $\int_{\gamma_1} F\, ds$ von F entlang γ_1. Ist F konservativ?
b) Erklären Sie, wie aus dem Satz von Stokes die Gleichung $\int_{\gamma_1} F\, ds = \int_{\gamma_2} F\, ds$ folgt.
c) Folgt aus dem Satz von Stokes auch, dass $\int_{\gamma_1} F\, ds = \int_{\gamma_3} F\, ds$ gilt?

Aufgabe 3. Die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x + z < 2\} \subset \mathbb{R}^3$ sei orientiert durch das Normalenfeld $n\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit negativer z-Komponente und $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = (2xy, -y^2 + \sin(x^3), 1).$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_S F\, dn$ von F durch S.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$u'''(t) - 2u''(t) + 4u'(t) = 0.$$

Aufgabe 5. Zu jedem Paar $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$ definieren wir die komplexwertige Funktion $P_{n,\alpha}(z) = x^n e^{\alpha x}$ auf $\mathbb{R}$. Diese Funktionen, und allgemeiner auch Linearkombinationen mit komplexen Koeffizienten solcher Funktionen heissen **Exponentialpolynome**.
Zeigen Sie, dass für paarweise verschiedene Paare $(n_1, \alpha_1), \ldots, (n_k, \alpha_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$ die zugehörigen Exponentialpolynome $\mathbb{C}$-linear unabhängig sind.

Aufgabe 6. a) Verwenden Sie die Substitution $v = u/t$ zur Bestimmung der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} t^2 u'(t) - tu(t) - u^2(t) = t^2, \\ \hfill u(1) = 1. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie durch Separation der Variablen die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + e^{u(t)} = 1, \\ \hfill u(0) = \log(2). \end{cases}$$

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + 2\sqrt{|u(t)|} = 2t, \\ \hfill u(0) = 0, \end{cases}$$

in keiner Umgebung von 0 punktweise konvergiert. Wie ist dies mit dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf vereinbar?

Aufgabe 8. Zeigen Sie: Für jede Funktion $g \in C([0,1])$ existiert eine Funktion $f \in C([0,1])$ mit

$$f(x) - \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt = g(x)$$

für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 9. Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $\langle F(t,x), \operatorname{grad}(f)(x)\rangle = 0$ für alle $(t,x) \in U$ gilt.
Zeigen Sie, dass für jede Trajektorie $u\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des Vektorfeldes, das heisst für jede Lösung eines Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u(t_0) = x_0, \text{wobei } (t_0, x_0) \in U, \text{ und} \\ u'(t) = F(t, u(t)) \qquad \forall t \in (a,b), \end{cases}$$

die Abbildung $f \circ u\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist. Was bedeutet dies geometrisch? Illustrieren Sie anhand einer Skizze im Fall $n = 2$.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass

$$S \cdot \exp(A) \cdot S^{-1} = \exp(S \cdot A \cdot S^{-1})$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und alle $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

für alle kommutierenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, d.h. $A \cdot B = B \cdot A$, gilt. Folgern Sie, dass das Bild von exp in der Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen liegt.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für alle Blockdiagonalmatrizen

$$\exp \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(B_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(B_k) \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $B_i \in \mathrm{Mat}_{d_i}(\mathbb{R})$, $d_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$, die einzelnen Diagonalblöcke bezeichne.

Aufgabe 13. Wir bezeichnen mit

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$$

den $\mathbb{R}$-Vektorraum der anti-symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass das Matrixexponential

$$\exp\colon \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$$

surjektiv ist.
Hinweis: Zu jedem $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ gibt es $B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, sodass $B \cdot A \cdot B^t$ Blockdiagonalform hat mit Blöcken der Form $\pm\mathbb{1}$ oder $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Verwenden Sie nun Aufgabe 10 und Aufgabe 12.

Aufgabe 14. Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = A \cdot u(t).$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Die Matrix A is nilpotent.
b) Jede Lösung u der Differentialgleichung ist ein Polynom.
c) Es gibt d linear unabhängige polynomiale Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 15. Bestimmen Sie den Lösungsraum der linearen Differentialgleichung

$$u'(t) = A \cdot u(t),$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R}).$$