Schnellübungen 2

Sie dürfen alle Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen ist kompakt als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$?

(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 1\}$

Aufgabe 2. Die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \in [0,1]\}$ von $\mathbb{C}$ ist...

(a) ...kompakt, aber nicht abgeschlossen.
(b) ...abgeschlossen, aber nicht kompakt.
(c) ...kompakt und abgeschlossen.
(d) ...nicht kompakt und nicht abgeschlossen.

Aufgabe 3. Sei X ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) Falls $U \subseteq X$ offen und nicht leer ist, so ist U nicht kompakt.
(b) Die leere Teilmenge $\varnothing \subseteq X$ ist kompakt.
(c) Falls $U \subseteq X$ nicht beschränkt ist, so ist U nicht kompakt.
(d) Jede nichtleere endliche Teilmenge $F \subseteq X$ ist kompakt.

Aufgabe 4. Die Menge $[0, 1)$ ist...

(a) ...offen.
(b) ...abgeschlossen.
(c) ...nicht offen und auch nicht abgeschlossen.
(d) Keine der Aussagen (a), (b) oder (c) ist sinnvoll ohne zusätzliche Angaben.

Aufgabe 5. Sei $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, mit $f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in [0,1]^2$.

(a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x,y) > \varepsilon$ für alle $(x,y) \in [0,1]^2$.
(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|x - y| < \delta \implies f(x,y) < \varepsilon$.
(c) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $(x,y) \in [0,1]^2$ mit $f(x,y) > \varepsilon$.
(d) Die Aussagen (a), (b), (c) sind alle falsch.