

## Schnellübungen 3

Sie dürfen alle Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

**Aufgabe 1.** Sei  $X = ([0, 4] \times [0, 4]) \setminus ((1, 2) \times (1, 2)) \subset \mathbb{R}^2$ . Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $X$  ist zusammenhängend aber nicht einfach zusammenhängend.
- (b)  $X$  ist kompakt.
- (c)  $X$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ .
- (d)  $X$  ist einfach zusammenhängend.

**Aufgabe 2.** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängende Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a)  $U \cap V$  ist zusammenhängend.
- (b)  $U \setminus V$  ist zusammenhängend.
- (c)  $U \cup V$  ist zusammenhängend, wenn  $U \cap V \neq \emptyset$ .
- (d)  $(U \setminus V) \cup (V \setminus U)$  ist zusammenhängend.

**Aufgabe 3.** Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  ist einfach zusammenhängend?

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 2\}$
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x - 2y \leq 2, 1 \leq 3y \leq 2\}$

**Aufgabe 4.** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch  $f(x, y, z) = (x + z^2, 2y + x^2, 3z + y^2) - (1, 2, 3)$ . Die Jacobi-Matrix an der Stelle  $0 \in \mathbb{R}^3$  von  $f$  ist:

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$       (b)  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$       (c)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$       (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5.** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y, z) = x^2 + xy - z^3$ . Die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0 = (-1, 0, 1)$ , in Richtung  $v = (1, 1, 0)$  ist:

- (a)  $\partial_v f(x_0) = -3$       (b)  $\partial_v f(x_0) = 3$       (c)  $\partial_v f(x_0) = 10$       (d)  $\partial_v f(x_0) = -6$