Schnellübungen 4

Sie dürfen alle Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. An einer Stelle $x_0 \in U$ und zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $D^2 f(x_0)(v, w) = 0$.
In welchem Raum ist diese 0 zu verstehen?

(a) $0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, (b) $0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,
(c) $0 \in \mathbb{R}^m$, (d) $0 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 - y^2 - 8x - 4y + 20$. An welchem der folgenden Punkte ist die totale Ableitung von f Null?

(a) $(2, 4)$, (b) $(4, -2)$, (c) $(-4, 2)$, (d) $(-2, 4)$

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = e^{xyz}$. Was ist $\partial_z \partial_y \partial_x f(x, y, z)$?

(a) e^{xyz}
(b) $xyz\, e^{xyz}$
(c) $xy\, e^{xyz} + xz\, e^{xyz} + yz\, e^{xyz}$
(d) $e^{xyz} + 3xyz\, e^{xyz} + x^2 y^2 z^2\, e^{xyz}$

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \cos(x)\sin(y) - x^2 y$. Was ist die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0, 2\pi)$?

(a) $\begin{pmatrix} -4\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 4\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\pi \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4\pi \end{pmatrix}$

Aufgabe 5. Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$