Schnellübungen 5

Sie dürfen alle nichtelektronischen Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = x + y$. Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$ von f über den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$?

(a) 0, (b)$1-\sqrt{2}$, (c) 1, (d) $1+\sqrt{2}$.

Aufgabe 2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) Ist F konservativ, so gibt es eine offene Teilmenge $V \subseteq U$, auf der $F|_V$ nicht konservativ ist;
(b) F ist konservativ, wenn es die Integrabilitätsbedingung $\partial_j F_k(x) = \partial_k F_j(x)$ für alle $x \in U$ und alle $j,k \in \{1,\ldots,n\}$ erfüllt;
(c) F ist konservativ, wenn U einfach zusammenhängend ist;
(d) F erfüllt die Integrabilitätsbedingung, wenn es konservativ ist.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ?

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (-y^2, x^2)$;
(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$;
(c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$;
(d) $f_4\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (\sin(x)\sin(y), \cos(x)\cos(y))$.

Aufgabe 4. Sei das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und der Weg $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos(xy) - ye^{x+y}\sin(xy) \\ e^{x+y}\cos(xy) - xe^{x+y}\sin(xy) \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^{13} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sqrt[17]{t} \end{pmatrix}.$$

Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma F dt$ von F entlang γ?

(a) $e^{2+\pi}$, (b) $e^2\cos(1) - e^2\sin(1)$, (c) e, (d) e^π.

Aufgabe 5. Sei das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und der Weg $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + e^x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \log(t^{10}+1) \\ e^{t^{10}-1} \end{pmatrix}.$$

Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma F dt$ von F entlang γ?

(a) $\log(4) + 1$, (b) $e^4 - 1$, (c) $\log(2)^2 + 1$, (d) $\log(2) - 1$.