Schnellübungen 6

Sie dürfen alle nichtelektronischen Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Wir betrachten die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi(x,y) = (2x,y)$, und das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x,y) = (-y,x)$. Bestimmen Sie das zurückgezogene Vektorfeld $\varphi^*F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(a) $\varphi^*F(x,y) = 2(-y,x)$; (b) $\varphi^*F(x,y) = -\frac{1}{2}(y,x)$;
(c) $\varphi^*F(x,y) = (-2y,x)$; (d) $\varphi^*F(x,y) = (-\frac{1}{2}y,x)$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ gegeben durch $\varphi(x,y) = (-y,x)$, und das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2\{0\}$ gegeben durch $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Bestimmen Sie das zurückgezogene Vektorfeld $\varphi^*F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(a) $\varphi^*F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$; (b) $\varphi^*F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$;
(c) $\varphi^*F(x,y) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$; (d) $\varphi^*F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x - \sin(y)$. An welcher Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt f die Voraussetzungen $f(x_0,y_0) = 0$ und $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$ des Satzes über die impliziten Funktionen **nicht**?

(a) $(0,0)$; (b) $(\frac{1}{2},\frac{\pi}{6})$; (c) $(1,\frac{\pi}{2})$; (d) $(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\pi)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x - \cos(y)\cos(z)$. An welcher Stelle $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ erfüllt f die Voraussetzungen $f(x_0,y_0,z_0) = 0$ und $\partial_z f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ des Satzes über die impliziten Funktionen **nicht**?

(a) $(\frac{3}{4},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$; (b) $(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$; (c) $(\frac{1}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$; (d) $(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 5. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) = (x^2+z^2-1, y-1)$. An welcher Stelle $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ erfüllt f die Voraussetzungen $f(x_0,y_0,z_0) = 0$ und $(\partial_j f_i(x_0,y_0,z_0))_{i\in\{1,2\},j\in\{2,3\}}$ invertierbar des Satzes über die impliziten Funktionen **nicht**?

(a) $(1,1,0)$; (b) $(0,1,1)$; (c) $(\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2})$; (d) $(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{1}{2})$.