Schnellübungen 9

Sie dürfen alle nichtelektronischen Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen ist Jordan-messbar?

(a) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (b) $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ (c) $[0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right]$ (d) $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq m} \bigcup_{l=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2l-1}{2^k}, \frac{2l}{2^k}\right]$

Aufgabe 2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Jordan-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?

(a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ist Jordan-messbar.
(b) $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ ist Jordan-messbar.
(c) $\bigcap_{i=1}^{m} B_i$ ist Jordan-messbar.
(d) $\mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} B_i)$ ist **nicht** Jordan-messbar.

Aufgabe 3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(2,1)$. Welches der folgenden Integrale berechnet $\mathrm{vol}(D)$?

(a) $\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^1 dy\, dx$ (b) $\int_0^2 \int_0^x dy\, dx$ (c) $\int_0^1 \int_x^1 dy\, dx$ (d) $\int_0^1 \int_0^x dy\, dx$

Aufgabe 4. Welches der folgenden Integrale unterscheidet sich von den anderen?

(a) $\int_{-1}^1 \int_{-1+|x|}^{1-|x|} dy\, dx$ (b) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dy\, dx$ (c) $4\int_0^1 \int_0^{1-x} dy\, dx$ (d) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\, dx$

Aufgabe 5. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$ und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welches der folgenden Integrale berechnet $\int_D f(x,y)\, d(x,y)$?

(a) $\int_{-3}^3 \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$ (b) $\int_{-2}^2 \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

(c) $4\int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$ (d) $4\int_0^3 \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$