Schnellübungen 10

Sie dürfen alle nichtelektronischen Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ hat kompakten Träger?

(a) $f(x,y) = \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,1)}(x,y)\cdot\frac{1}{xy}$, (b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$,
(c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, (d) $f(x,y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2}(x,y)\cdot\frac{1}{\sin(\pi(x+y))}$.

Aufgabe 2. Sei $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 4, 0 < y < x\}$ und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welches der folgenden Integrale berechnet $\int_D f(x,y)\,d(x,y)$?

(a) $\displaystyle\int_1^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr$, (b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi\,dr$,
(c) $\displaystyle\int_1^4\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr$, (d) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi\,dr$.

Aufgabe 3. Sei $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le e^\pi\}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,d(x,y) = \dots$

(a) $2\pi^2$, (b) π^2, (c) $2\pi\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, (d) $2\pi\left(1-e^{-\pi}\right)$.

Aufgabe 4. Seien $a,b,c>0$ und $E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1\right\}$ der Ellipsoid mit Hauptachsenlängen $2a$, $2b$, $2c$. Was ist sein Volumen $\operatorname{vol}(E)$?

(a) $\dfrac{32}{3}\pi abc$, (b) $\dfrac{\pi}{6abc}$, (c) $\dfrac{4\pi}{3abc}$, (d) $\dfrac{4}{3}\pi abc$.

Aufgabe 5. Sei $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1, x > \sqrt{y^2+z^2}\}$ und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welches der folgenden Integrale berechnet $\int_D f(x,y,z)\,d(x,y,z)$?

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))\cdot r^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta$,
(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))\cdot r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$,
(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)\sin(\theta))\cdot r^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta$,
(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)\sin(\theta))\cdot r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$.