Schnellübungen 11

Sie dürfen alle nichtelektronischen Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x,y,z) \longmapsto (x,y,z)$. Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(F)(x,y,z) = \dots$

(a) $x+y+z$ (b) 3 (c) x (d) 0

Aufgabe 2. Seien $a, b > 0$ und sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$. Bestimmen Sie die Aussennormale $n_\gamma(t)$ an $\gamma(t)$.

(a) $n_\gamma(t) = (b\cos(t), a\sin(t))$ (b) $n_\gamma(t) = (-b\cos(t), -a\sin(t))$
(c) $n_\gamma(t) = (-a\sin(t), b\cos(t))$ (d) $n_\gamma(t) = (a\sin(t), -b\cos(t))$

Aufgabe 3. Für welche der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 0\}$ ein glatt berandeter Bereich?

(a) $f(x,y) = xy$ (b) $f(x,y) = x^2 - y^3$
(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Aufgabe 4. Seien $a > b > 0$ und $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Welcher der folgenden Wege $\gamma\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes von E?

(a) $\gamma(t) = (a\sin(\pi t^3), b\cos(\pi t^3))$ (b) $\gamma(t) = (a\sin(\pi t^3), -b\cos(\pi t^3))$
(c) $\gamma(t) = (a\sin(\pi t), b\cos(\pi t))$ (d) $\gamma(t) = (a\sin(\pi t), -b\cos(\pi t))$

Aufgabe 5. Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Welche der folgenden Wege $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bilden zusammen eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes von A?

(a) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $\gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$
(b) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), -2\sin(t))$, $\gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$
(c) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), -2\sin(t))$, $\gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$
(d) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $\gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$