Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Analysis I und II

Vorlesungsskript 2018/2019

Manfred Einsiedler
Peter Jossen
Andreas Wieser

4. Juni 2019

Vorwort

Willkommen an der ETH Zürich, und zu Ihrem Studium dieses Vorlesungsskripts! Dieses Skript wurde erstmals im Studienjahr 2016/2017 von Manfred Einsiedler und Andreas Wieser für den Vorlesungszyklus Analysis I und II der Studiengänge Interdisziplinäre Naturwissenschaften Bachelor, Physik Bachelor und Mathematik Bachelor erstellt. Die vorliegende Version für das Studienjahr 2018/2019 wurde von Peter Jossen stark überarbeitet.

Die Analysis I/II und Lineare Algebra I/II Vorlesungen bilden gemeinsam das Fundament der Mathematik, wie sie an der ETH und auch an anderen Universitäten unterrichtet wird. Die allermeisten weiteren Mathematik- und Physikvorlesungen werden auf diesen vier Vorlesungen aufbauen und deren Themengebiete erweitern.

Wie wir sehen werden, enthalten die Analysis I/II-Vorlesungen viele Themen rund um die Differential- und Integralrechnung. Manche dieser Themen kennen Sie wahrscheinlich schon aus dem Gymnasium; wir werden trotzdem kein grosses Vorwissen voraussetzen, abgesehen von einem intuitiven Verständnis von Variablen und einer gewissen Übung für algebraische Umformungen. Auch werden Sie einen wichtigen Unterschied zum Unterricht im Gymnasium bemerken: obwohl wir versuchen werden, so viele Themen wie möglich mit Beispielen zu belegen, werden diese viel weniger im Mittelpunkt stehen, als Sie dies wahrscheinlich gewohnt sind. Ebenso steht das Einüben der erlernten Algorithmen und Rechenmethoden nicht im Fokus unserer Vorlesung und wird Ihnen im Selbststudium überlassen. Im Mittelpunkt steht vielmehr der Aufbau der mathematischen Theorie, die notwendig ist, um Themen wie Differentialgleichungen und mehrdimensionale Integralsätze zu erreichen und zu verstehen.

Danksagung

Wir möchten uns bei Menny Akka für viele Vorschläge von Beispielen für die ersten Kapitel des Skripts sowie bei Manuel Lüthi, Roland Prohaska und Philipp Wirth für zahlreiche Korrektur- und Verbesserungsvorschläge bedanken. Des Weiteren wollen wir uns bei Carina Heiss, Anh Huy Truong und Anian Altherr für die Erstellung der verschiedenen geogebra-Applets bedanken. Unser Dank gilt auch den Kommentaren der aller Studentinnen und Studenten, Hilfsassistentinnen und Hilfsassistenten der Analysis-Vorlesung, insbesondere Herrn Maciej Smela für die zahlreichen Korrekturen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Quadratur der Parabel . . . 1

1.2 Gutgemeinte Tipps zum Studium . . . 5

2 Logik und Mengenlehre **6**

2.1 Konventionen . . . 6

2.2 Logische Begriffe . . . 7

2.2.1 Aussagenlogik und die Boolesche Algebra . . . 7

2.2.2 Prädikatenlogik . . . 9

2.3 Mengenlehre und Abbildungen . . . 13

2.3.1 Naive Mengenlehre . . . 13

2.3.2 Kritik der naiven Mengenlehre . . . 19

2.3.3 Funktionen und Abbildungen . . . 20

2.3.4 Algebraische Strukturen . . . 27

2.3.5 Relationen . . . 28

2.3.6 Mächtigkeit . . . 33

2.3.7 Das Auswahlaxiom und das Zorn'sche Lemma . . . 37

3 Die reellen Zahlen **42**

3.1 Die Axiome der reellen Zahlen . . . 42

3.1.1 Angeordnete Körper . . . 42

3.1.2 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 47

3.1.3 Intervalle . . . 49

3.2 Komplexe Zahlen . . . 51

3.2.1 Definition der komplexen Zahlen . . . 51

3.2.2 Der Absolutbetrag auf den komplexen Zahlen . . . 54

3.3 Maximum und Supremum . . . 57

3.3.1 Existenz des Supremums . . . 57

3.3.2 Uneigentliche Werte . . . 59

3.4 Konsequenzen der Vollständigkeit . . . 62

3.4.1 Das Archimedische Prinzip . . . 62

3.4.2 Dezimalbruchentwicklung und Überabzählbarkeit . . . 63

3.4.3 Häufungspunkte einer Menge . . . 65

3.4.4 Das Intervallschachtelungsprinzip . . . 67
3.5 Modelle und Eindeutigkeit der Menge der reellen Zahlen . . . 69
3.5.1 Dezimalbrüche . . . 69
3.5.2 Dedekind-Schnitte . . . 69
3.5.3 Weitere Modelle . . . 73
3.5.4 Eindeutigkeit . . . 74

4 Reellwertige Funktionen in einer Variablen 76
4.1 Polynome und Polynomfunktionen . . . 76
4.1.1 Summen und Produktnotation . . . 76
4.1.2 Polynome . . . 79
4.1.3 Nullstellen und Interpolation . . . 81
4.2 Reellwertige Funktionen . . . 85
4.2.1 Beschränktheit und Monotonie . . . 85
4.2.2 Stetigkeit . . . 87
4.2.3 Der Zwischenwertsatz . . . 92
4.2.4 Der Satz über die Umkehrabbildung . . . 94
4.3 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen . . . 97
4.3.1 Beschränktheit und Extremwerte . . . 97
4.3.2 Gleichmässige Stetigkeit . . . 98

5 Das Riemann Integral 101
5.1 Treppenfunktionen und deren Integral . . . 101
5.1.1 Zerlegungen und Treppenfunktionen . . . 101
5.1.2 Das Integral einer Treppenfunktion . . . 102
5.2 Definition und erste Eigenschaften des Riemann-Integrals . . . 105
5.2.1 Integrierbarkeit reellwertiger Funktionen . . . 105
5.2.2 Linearität und Monotonie des Integrals . . . 107
5.3 Integrierbarkeitssätze . . . 112
5.3.1 Integrierbarkeit monotoner Funktionen . . . 112
5.3.2 Integration von Polynomfunktionen . . . 114
5.3.3 Integrierbarkeit stetiger Funktionen . . . 116

6 Folgen und Grenzwerte 118
6.1 Konvergenz von Folgen in einem metrischen Raum . . . 118
6.1.1 Konvergenz von Folgen . . . 118
6.1.2 Konvergente Teilfolgen und Häufungspunkte . . . 122
6.1.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit . . . 124
6.1.4 *Reelle Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen . . . 125
6.2 Folgen komplexer und reeller Zahlen . . . 128
6.2.1 Zusammenhang zur Stetigkeit . . . 128
6.2.2 Addition, Multiplikation und Ungleichungen . . . 129
6.2.3 Beschränkte Folgen reeller Zahlen . . . 132

6.2.4 Reelle Cauchy-Folgen . . . 136
6.2.5 Uneigentliche Grenzwerte . . . 137
6.2.6 Folgen komplexer Zahlen . . . 138
6.3 Die Exponentialfunktion . . . 140
6.3.1 Definition der Exponentialfunktion . . . 140
6.3.2 Funktionalgleichung, Stetigkeit und Monotonie . . . 141
6.3.3 Der natürliche Logarithmus . . . 143
6.4 Grenzwerte von Funktionen . . . 146
6.4.1 Grenzwert in der Umgebung eines Punktes . . . 146
6.4.2 Einseitige Grenzwerte . . . 149
6.4.3 Landau Notation . . . 153
6.5 Normen und Konvergenz auf Vektorräumen . . . 156
6.5.1 Normen und Skalarprodukte . . . 156
6.5.2 Folgenkonvergenz in normierten Vektorräumen . . . 160
6.5.3 Stetigkeit und Integrierbarkeit vektorwertiger Funktionen . . . 164

7 Reihen, Funktionenfolgen und Potenzreihen 167
7.1 Reihen komplexer Zahlen . . . 167
7.1.1 Reihen mit nicht-negativen Gliedern . . . 169
7.1.2 Bedingte Konvergenz . . . 172
7.1.3 Konvergenzkriterien von Leibnitz und Cauchy . . . 173
7.2 Absolute Konvergenz . . . 175
7.2.1 Kriterien für absolute Konvergenz . . . 175
7.2.2 Umordnen von Reihen . . . 176
7.2.3 Produkte . . . 177
7.3 Konvergenz von Funktionenfolgen . . . 180
7.3.1 Punktweise Konvergenz . . . 180
7.3.2 Gleichmässige Konvergenz . . . 182
7.4 Potenzreihen . . . 185
7.4.1 Konvergenzradius . . . 185
7.4.2 Der Abel'sche Grenzwertsatz . . . 188
7.4.3 Integration von Potenzreihen . . . 188
7.5 Trigonometrische Funktionen . . . 190
7.5.1 Die komplexe Exponentialabbildung . . . 190
7.5.2 Sinus und Kosinus . . . 192
7.5.3 Die Kreiszahl . . . 194
7.5.4 Polarkoordinaten und Multiplikation komplexer Zahlen . . . 196
7.5.5 Der komplexe Logarithmus . . . 198
7.5.6 Weitere Trigonometrische Funktionen . . . 199

8 Differentialrechnung **201**
8.1 Die Ableitung . . . 201
8.1.1 Definition und geometrische Interpretation . . . 201
8.1.2 Ableitungsregeln . . . 204
8.2 Zentrale Sätze der Differentialrechnung . . . 211
8.2.1 Lokale Extremwerte . . . 211
8.2.2 Der Mittelwertsatz . . . 212
8.2.3 Korollare des Mittelwertsatzes und Kurvendiskussion . . . 214
8.2.4 Die Regel von l'Hôpital . . . 218
8.3 Ableitung trigonometrischer Funktionen . . . 222
8.3.1 Sinus und Arcussinus . . . 222
8.3.2 Tangens und Arcustangens . . . 223
8.3.3 Hyperbolische Funktionen . . . 226
8.4 Erste Differentialgleichungen . . . 228
8.4.1 Stammfunktionen . . . 228
8.4.2 Grobe Klassifikation von Differentialgleichungen . . . 229
8.4.3 Lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung . . . 231

9 Die Ableitung und das Riemann Integral **236**
9.1 Der Fundamentalsatz . . . 236
9.1.1 Der Fundamentalsatz und Korollare . . . 236
9.1.2 Ableiten und Integrieren von Potenzreihen . . . 239
9.2 Integrationsmethoden . . . 243
9.2.1 Partielle Integration . . . 243
9.2.2 Substitution . . . 244
9.2.3 Leibniz-Notation . . . 247
9.2.4 Integration rationaler Funktionen . . . 248
9.2.5 Bestimmte Integrale mit uneigentlichen Integrationsgrenzen . . . 251
9.2.6 Die Gamma-Funktion . . . 255
9.3 Taylorreihen . . . 258
9.3.1 Taylor Approximation . . . 258
9.3.2 Analytische Funktionen . . . 261
9.3.3 Das Newton-Verfahren . . . 263
9.3.4 Numerische Integration . . . 265
9.4 Anwendungen . . . 269
9.4.1 Flächeninhalte . . . 269
9.4.2 Bogenlänge . . . 270
9.4.3 Wegintegrale von Vektorfeldern . . . 272
9.4.4 Volumen und Oberflächen von Rotationskörpern . . . 274

10 Topologische Grundbegriffe **276**
10.1 Topologische Räume . . . 276
10.1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen . . . 276
10.1.2 Folgenkonvergenz in topologischen Räumen . . . 279
10.1.3 Die Produkttopologie . . . 279
10.2 Topologie auf metrischen Räumen . . . 281
10.2.1 Die von einer Metrik induzierte Topologie . . . 281
10.2.2 Charakterisierung von Stetigkeit . . . 283
10.2.3 Der Banach'sche Fixpunktsatz . . . 285
10.3 Kompaktheit . . . 287
10.3.1 Kompakte topologische Räume . . . 287
10.3.2 Kompakte metrische Räume . . . 288
10.3.3 Der Satz von Heine-Borel . . . 294
10.4 Topologische Vektorräume . . . 298
10.4.1 Topologische Vektorräume . . . 298
10.4.2 Die Topologie der punktweisen Konvergenz . . . 300
10.4.3 Die Topologie kompakten Konvergenz . . . 302
10.5 Zusammenhang . . . 304
10.5.1 Topologischer Zusammenhang . . . 304
10.5.2 Wegzusammenhang . . . 305
10.5.3 Einfach zusammenhängende Räume . . . 307
10.5.4 Definitionsbereiche in der Analysis . . . 308

11 Mehrdimensionale Differentialrechnung **309**
11.1 Die Ableitung . . . 309
11.1.1 Definitionen . . . 309
11.1.2 Die Kettenregel . . . 314
11.1.3 Der Mittelwertsatz . . . 316
11.2 Höhere Ableitungen und Taylor-Approximation . . . 319
11.2.1 Definition und Eigenschaften der höheren Ableitungen . . . 319
11.2.2 Mehrdimensionale Taylor-Approximation . . . 322
11.2.3 Extremwerte . . . 323
11.3 Parameterintegrale . . . 326
11.3.1 Vertauschen von Ableitung und Integration . . . 326
11.3.2 Die Bessel-Differentialgleichung . . . 329
11.4 Wegintegrale . . . 332
11.4.1 Skalare Wegintegrale . . . 332
11.4.2 Wegintegrale von Vektorfeldern . . . 333
11.4.3 Konservative Vektorfelder . . . 335
11.4.4 Integrabilitätsbedingungen . . . 337

12 Anfänge der Differentialgeometrie **346**
12.1 Sätze zur impliziten Funktion und zur inversen Abbildung 346
12.1.1 Satz der impliziten Funktion 346
12.1.2 Satz zur inversen Abbildung 352
12.1.3 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten 353
12.2 Teilmannigfaltigkeiten des Euklidschen Raumes 355
12.2.1 Definition und Beispiele 355
12.2.2 Niveaumengen als Teilmannigfaltigkeiten 358
12.2.3 Tangentialraum und Tangentialbündel 359
12.3 Extremwertprobleme 363
12.3.1 Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren 363
12.3.2 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen 365

13 Mehrdimensionale Integralrechnung **368**
13.1 Das Riemann-Integral für Quader 368
13.1.1 Definition und erste Eigenschaften 368
13.1.2 Nullmengen 372
13.1.3 Das Lebesgue Kriterium 375
13.1.4 Riemann-Integrierbarkeit und Stetigkeit 377
13.2 Das Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen 380
13.2.1 Jordan Messbarkeit 380
13.2.2 Der Satz von Fubini 384
13.3 Mehrdimensionale Substitutionsregel 389
13.3.1 Die Substitutionsregel und erstste Beispiele 389
13.3.2 Lineare Substitution 392
13.3.3 Beweis der Substitutionsregel 394
13.4 Uneigentliche Mehrfachintegrale 399
13.4.1 Ausschöpfungen und uneigentliche Integrale 399
13.4.2 Substitution für uneigentliche Riemann-Integrale 401

14 Globale Integralsätze **406**
14.1 Der Divergenzsatz und der Satz von Green in der Ebene 406
14.1.1 Der Divergenzsatz für Bereiche unter einem Graphen 406
14.1.2 Glatt berandete Bereiche 413
14.1.3 Zerlegung der Eins 414
14.1.4 Der Divergenzsatz für Bereiche in der Ebene 417
14.1.5 Rotation und der Satz von Green 421
14.2 Oberflächenintegrale 425
14.2.1 Flächen und Karten 425
14.2.2 Oberflächenintegrale 428
14.3 Der Divergenzsatz im dreidimensionalen Raum 431
14.3.1 Der Divergenzsatz für Bereiche unter Graphen 431

14.3.2 Der Divergenzsatz auf glatt berandeten Bereichen 432
14.4 Der Satz von Stokes im dreidimensionalen Raum 434
14.4.1 Glatt berandete Flächen 434
14.4.2 Der Satz von Stokes 434
14.5 *Differenzialformen und de Rham Kohomologie 441

15 Gewöhnliche Differentialgleichungen 442
15.1 Differentialgleichungsysteme 442
15.1.1 Lineare Differentialgleichungen 442
15.1.2 Allgemeine Differentialgleichungsysteme erster Ordnung 447
15.1.3 Trennung der Variablen 450
15.1.4 Beispiele autonomer Differentialgleichungssysteme 451
15.2 Der Satz von Picard-Lindelöf 455
15.2.1 Der Satz von Picard-Lindelöf 455
15.2.2 Beispiele 459

Kapitel 1

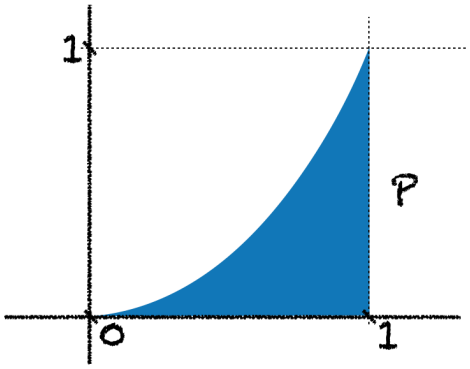
Einleitung

1.1 Quadratur der Parabel

Als Beispiel, wie wir hier denken und vorgehen wollen, aber auch als Einleitung in die Integralrechnung, werden wir uns in diesem Abschnitt mit dem Bereich

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\} \tag{1.1}$$

unter der Parabel zwischen 0 und 1 beschäftigen und dessen Flächeninhalt berechnen. Dieser Flächeninhalt wurde als erster krummlinig begrenzter Bereich schon von Archimedes (ca. 287–ca. 212 v.Chr.) im 3. Jahrhundert v.Chr. bestimmt. Wir wollen für die Flächenberechnung davon ausgehen, dass wir wissen, was die Symbole in der Definition in Gleichung (1.1) bedeuten und dass P gerade den Bereich in folgender Figur beschreibt. Insbesondere nehmen wir vorläufig an, dass wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bereits kennen.



Natürlich ist die Berechnung des Flächeninhalts von P keine Herausforderung wenn wir Integrale und die dazugehörigen Rechenregeln verwenden. Wir wollen die Integralrechnung jedoch nicht als bekannt voraussetzen.

Genau genommen müssen wir uns vor der Berechnung folgende fundamentale Frage stellen:

Was ist eigentlich ein Flächeninhalt?

Wenn wir diese Frage nicht genau beantworten können, dann können wir eigentlich nicht wissen, was es bedeutet, den Flächeninhalt von P zu berechnen. Deswegen relativieren wir unser Ziel in folgender Weise:

Proposition 1.1. — *Angenommen es gibt einen Begriff eines Flächeninhalts für Bereiche in $\mathbb{R}^2$, der folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. *Der Flächeninhalt des Rechtecks $[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ ist gleich $(b-a)(d-c)$, wobei a,b,c,d reelle Zahlen sind mit $a \leq b, c \leq d$.*
2. *Falls G ein Bereich in $\mathbb{R}^2$ ist und F ein in G enthaltener Bereich ist, dann ist der Flächeninhalt von F kleiner oder gleich dem Flächeninhalt von G.*
3. *Für Bereiche F, G in $\mathbb{R}^2$ ohne gemeinsame Punkte ist der Flächeninhalt des vereinigten Bereiches $F \cup G$ die Summe der Flächeninhalte von F und G.*

Dann ist der Flächeninhalt von P wie in Gleichung (1.1) *(falls überhaupt definiert) gleich $\frac{1}{3}$.*

In anderen Worten: wir haben die Frage, ob es einen Begriff des Flächeninhalts gibt und für welche Bereiche dieser definiert ist, offengelassen, wollen aber zeigen, dass $\frac{1}{3}$ der einzige vernünftige Wert für den Flächeninhalt von P ist.

Für den Beweis von Proposition 1.1 benötigen wir ein Lemma (auch Hilfssatz genannt):

Lemma 1.2. — *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{1.2}$$

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist die linke Seite von Gleichung (1.2) gleich 1 und die rechte Seite gleich $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$. Also stimmt Gleichung (1.2) für $n = 1$. *Dieser Beweisschritt wird Induktionsanfang genannt.*

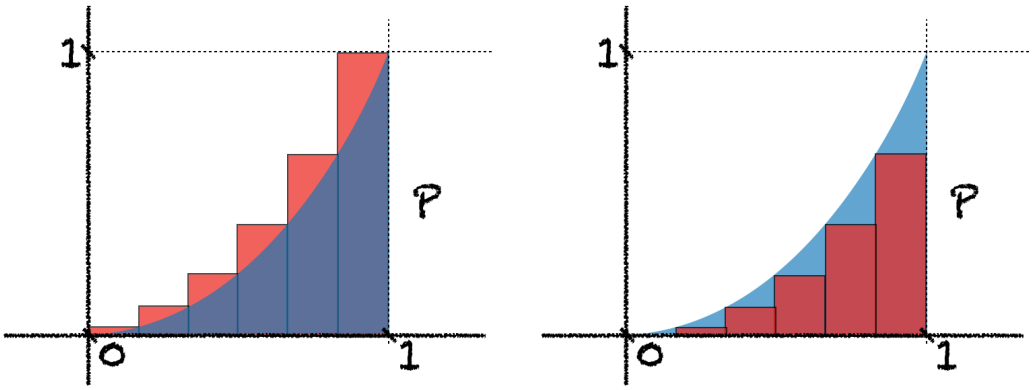
Angenommen wir wissen bereits, dass Gleichung (1.2) für die natürliche Zahl n gilt. Wir wollen nun zeigen, dass daraus folgt, dass Gleichung (1.2) auch für $n+1$ gilt. Die linke Seite von Gleichung (1.2) ist, für $(n+1)$ anstelle von n, gegeben durch

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + (n+1)^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{6} + 1$$

wobei wir Gleichung (1.2) für die Zahl n verwendet haben. Die rechte Seite von Gleichung (1.2) ist, für $(n+1)$ anstelle von n, gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{6} + 1\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die linke und die rechte Seite von Gleichung (1.2) auch für $n+1$ übereinstimmen. *Dieser Beweisschritt wird Induktionsschritt genannt.*



Figur 1.1: Annäherung von P mit $n = 6$ Rechtecken.

Es folgt, dass Gleichung (1.2) wegen dem Induktionsanfang für $n = 1$ stimmt und daher auch für $n = 2$ wegen dem Induktionsschritt und weiter für $n = 3$ wieder wegen dem Induktionsschritt. Fährt man so weiter, erhält man (1.2) für jede natürliche Zahl. *Wir sagen, dass Gleichung* (1.2) *mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 1$ *folgt. Des Weiteren deuten wir das Ende des Beweises mit einem kleinen Quadrat an.* □

Beweis von Proposition 1.1. Wir nehmen an, dass es einen Begriff des Flächeninhalts mit den Eigenschaften in der Proposition gibt und dieser für P definiert ist. Angenommen I ist der Flächeninhalt von P. Wir überdecken P für eine gegebene natürliche Zahl $n \geq 1$ mit Rechtecken wie in Figur 1.1 links.

Wir erhalten aus den angenommenen Eigenschaften des Flächeninhalts und Lemma 1.2, dass folgende Ungleichung gilt.

$$\begin{aligned} I \leq \frac{1}{n}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2} &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Die Geradenstücke bei denen sich die Rechtecke berühren haben Flächeninhalt 0, und wir dürfen sie ignorieren. Verwenden wir hingegen Rechtecke wie in Figur 1.1 rechts erhalten wir ebenso

$$\begin{aligned} I \geq \frac{1}{n}\frac{0}{n^2} + \frac{1}{n}\frac{1^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{(n-1)^2}{n^2} &= \frac{1}{n^3}(1^2 + \cdots + (n-1)^2) \\ = \frac{1}{n^3}(1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 - n^2) &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2\right) \\ &\geq \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - n^2\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$-\frac{1}{n} \leq I - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{n}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Die einzige Zahl, die kleiner als $\frac{1}{n}$ und grösser als $-\frac{1}{n}$ ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$, ist die 0. Daher gilt $I = \frac{1}{3}$ und die Proposition folgt. □

Wir haben in obigem Beweis die folgende Tatsache benötigt:

Satz 1.3. — *Wenn $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen n erfüllt, dann ist $x = 0$.*

Das ist anschaulich klar. Einen formellen Beweis des Archimedischen Prinzips können wir an dieser Stelle jedoch nicht aufstellen, dazu fehlt uns eine strenge Definition der reellen Zahlen. Wie schon erwähnt, haben wir die Frage, ob es einen Flächeninhalt für Bereiche im $\mathbb{R}^2$ gibt, nicht beantwortet. Wir haben auch nicht genau beschrieben, was denn eigentlich Bereiche im $\mathbb{R}^2$ sind; wir sind aber implizit davon ausgegangen, dass Bereiche jene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind, denen wir einen Flächeninhalt zuordnen können. Diese grundlegenden Fragen werden mit den Begriffen des Riemann-Integrals und der Jordan-messbaren Mengen beantwortet.

Historisch Interessierten empfehlen wir auch den Podcast der BBC über Archimedes, wobei man bei der zwanzigsten Minute einsteigen kann, wenn man wenig Zeit hat. Die Idee des Beweises wird im folgenden Applet illustriert.

Applet 1.4 (Abschätzung eines Flächeninhaltes)**.** *Wir verwenden jeweils bis zu 1000 Rechtecke um den Flächeninhalt von unten und von oben abzuschätzen. Im Beweis unten werden wir aber unbegrenzt viele Rechtecke verwenden und können damit den Flächeninhalt ohne jegliche Unschärfe genau bestimmen.*

1.2 Gutgemeinte Tipps zum Studium

„Aller Anfang ist schwer.“

Wie schon erwähnt, werden Sie einen grossen Unterschied zwischen der Schulmathematik und der Mathematik an Universitäten bemerken. Letztere verwendet auch ihre eigene Sprache, die Sie erst erlernen müssen. Je schneller Sie diese Aufgabe auf sich nehmen, desto mehr werden Sie von den Vorlesungen mitnehmen. Dies bringt uns gleich zum nächsten Tipp.

„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik“
(überliefertes Zitat von Euklid zu dem ägyptischen König Ptolemäus I)

Man kann Mathematik nicht durch Zusehen erlernen; genauso wenig wie Sie Tennis oder Skifahren erlernen können, in dem Sie sich alle verfügbaren Turniere oder Weltmeisterschaften im Fernsehen anschauen. Vielmehr sollten Sie Mathematik wie eine Sprache erlernen und eine Sprache bringt man sich bei, in dem man sie benützt. Besprechen Sie mit Kollegen die Themen der Vorlesungen. Erklären Sie sich gegenseitig die Beweise aus der Vorlesung oder die Lösung der Übungsbeispiele. Vor allem aber sollten Sie so viele Übungen wie nur möglich lösen; nur so können Sie sich sicher sein, dass Sie die Themen gemeistert haben.

Es ist in Ordnung wenn Sie in kleinen Gruppen an den Übungen arbeiten. Dies hat sogar den Vorteil, dass durch die Diskussionen in der Gruppe die Objekte der Vorlesungen lebendiger werden. Sie sollten jedoch sicherstellen, dass Sie die Lösungen komplett verstehen, erklären können, und ähnliche Probleme anschliessend selbstständig lösen können.

“Wer fragt, ist ein Narr für eine Minute.
Wer nicht fragt, ist ein Narr sein Leben lang.”
(Konfuzius)

Stellen Sie so viele Fragen wie nur möglich und stellen Sie sie dann, wenn sie auftauchen. Wahrscheinlich haben viele Ihrer Kollegen die gleiche Frage, oder haben das Problem noch gar nicht bemerkt. Dem Dozierenden oder dem Hilfsassistenten wird so ermöglicht, gleichzeitig bei vielen ein Problem zu beheben und Probleme bei den Studierenden zu erkennen, wo sie oder er dachte, dass keine vorhanden seien. Des Weiteren will das gute Formulieren von Fragen geübt sein; das erste Studienjahr ist der ideale Zeitpunkt dies zu tun.

Zuletzt möchten wir erwähnen, dass zahlreiche Foren und Blogs sehr hilfreiche Ratschläge liefern, wie man richtig ins Studium einzusteigen hat und wie man Mathematik zu lernen hat. Ein Beispiel eines Blogs mit guten Tipps ist der Blog von Terence Tao. (Terence Tao ist Fields-Medaillenträger und einer der bedeutendsten lebenden Mathematiker.) Eine Frage, die Terry Tao behandelt, ist

„Does one have to be a genius to do maths?“

Genauso wie in anderen Gebieten (zum Beispiel im Sport – siehe zum Beispiel das Buch „Was heisst schon Talent?“ von M. Syed) ist die klare Antwort *Nein*. Im Zuge seiner Erklärung verweist Terry Tao auch auf diesen Artikel. Die Lektüre dieses Artikels möchten wir Ihnen sehr empfehlen – zumindest bis zum ersten Erscheinen des Wortes „muscle“.

Kapitel 2

Logik und Mengenlehre

2.1 Konventionen

Logik und Mengenlehre bilden das Fundament aller Mathematik. Wir werden im Anschnitt 2.2 über Logik sprechen, und im Abschnitt 2.3 über Mengenlehre. Dabei setzen wir gewisse Begriffe als selbstverständlich voraus. Zum Beispiel werden wir nicht versuchen zu erklären was eine „mathematische Aussage“ überhaupt ist. Genausowenig werden wir versuchen zu erklären was es bedeutet dass eine Aussage „wahr“ oder „falsch“ ist. Wir vom allgemeinen Verständnis aus, dass zum Beispiel

$$\textit{Es existiert eine natürliche Zahl } n \textit{ so dass } n^2 + 2 = (n-2)^3 \textit{ gilt.}$$

eine Aussage ist, die wahr oder falsch sein kann, aber nicht beides. Wir werden nicht erklären was es für eine natürliche Zahl bedeutet „zu existieren“, und auch nicht was die Symbole $1, 2, 3, 4, +, -, =$ bedeuten, sondern gehen ebenfalls davon aus dass die **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\},$$

sowie die grundlegenden Rechenoperationen die man damit ausführen kann, bekannt sind. Wir zählen die 0 zu den natürlichen Zahlen. Das ist eine Konvention – man findet in der Literatur auch oft die Konvention dass das Symbol $\mathbb{N}$ für die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ steht, und dass die 0 nicht als natürliche Zahl bezeichnet wird. Wir schreiben

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

für die Menge der **ganzen Zahlen**.

2.2 Logische Begriffe

Logischen Begriffe und die dazugehörende Theorie der Logik haben sich seit der Antike stark geändert, doch seit der Begriffsschrift von Frege (1848-1925) im Jahre 1879 nicht mehr so stark. Da ein Verständnis dieser „logischen Sprache“ für die Mathematik notwendig ist, besprechen wir diese hier. Für historisch Interessierte verweisen wir auf den Podcast der BBC.

Mathematische Aussagen sind, wenn ein klar definierter Rahmen gegeben ist und der Wert für etwaige Variablen bekannt ist, entweder wahr oder falsch. Diese strenge Sichtweise ist notwendig, damit wir von Bekanntem ausgehend wahre Aussagen (Sätze, Lemmata und Propositionen zum Beispiel) folgern können, auf die wiederum Verlass ist, das heisst, ohne dass man Spezialfälle ausschliessen muss.

2.2.1 Aussagenlogik und die Boolesche Algebra

Da eine mathematische Aussage nur zwei „Werte“ annehmen kann, wahr (w) und falsch (f), können wir gewissermassen „Rechenoperationen“ für solche Aussagen definieren. Dies wurde erstmals von George Boole im Jahre 1847 formal ausgeführt (siehe [Boo1847]) und stellt sowohl für die Grundlagen der Mathematik als auch für die Informatik und Elektrotechnik einen historisch bedeutsamen Schritt dar. Im Folgenden werden mathematische Aussagen mit Grossbuchstaben $A, B, \ldots$ dargestellt.

2.1. — Die einfachste Operation ist die **Negation einer Aussage**: Sei A eine Aussage. Die Negation von A ist die Aussage „A gilt nicht“, die wir kurz mit „Nicht A“ bezeichnen und als „$\neg A$“ schreiben. Die Aussage „$\neg A$“ hat den Wert f, falls A den Wert w hat und den Wert w, falls A den Wert f hat. Wir stellen dies in einer **Wahrheitstabelle** wie folgt dar:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Wir verwenden das Symbol „=“ für die Gleichheit und können es gebrauchen, um Aussagen wie „$x = y$“ zu bilden. Des Weiteren schreiben wir „$x \neq y$“ für die Negation „$\neg(x = y)$“ der Gleichheit.

2.2. — Seien A und B Aussagen. Die **Und-Operation** angewandt auf A und B ist die Aussage „sowohl A als auch B gelten“, kurz „A und B“ und symbolisch geschrieben „$A \wedge B$“. Die **Oder-Operation** angewandt auf die beiden Aussagen A, B ergibt die Aussage „A gilt oder B gilt“, kurz „A oder B“ und symbolisch geschrieben „$A \vee B$“. Man sollte bemerken, dass das „Oder“ in der Logik als Teilgebiet der Mathematik das einschliessende „Oder“ ist, welches auch zutrifft, falls beide Aussagen zutreffen. Dies unterscheidet sich teilweise vom umgangssprachlichen Gebrauch des Wortes „oder“, das oft auch exklusiv gemeint ist als „entweder … oder“. Die Aussage „entweder A oder B“ kann über die drei Grundoperationen Negation, Und

und Oder definiert werden, siehe Übung 2.5. Die zugehörige Wahrheitstabelle ist

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Die Algebraisierung der Logik hat den Vorteil, dass wir mittels Klammern eindeutig darstellen können, wie Verknüpfungen von logischen Aussagen zu verstehen sind. In der Umgangssprache gibt es keine Klammern und Aussagen der Form

„*Sokrates hat einen Hund und*
ein Hund ist das beste Haustier oder
eine Katze ist das beste Haustier.“

sind zweideutig.

2.3. — Wir können Verknüpfungen, wenn nötig mit Klammern, verwenden, um neue logische Operationen zu definieren. Beispielsweise ist die logische **Implikation** „$A \implies B$“ als die Aussage „$(\neg A) \vee B$“ definiert. „$A \implies B$“ wird als „A impliziert B“ ausgesprochen und auch in diesem Sinne verwendet. Denn falls A wahr ist und „$A \implies B$“ wahr ist, dann muss auch B wahr sein. Jegliche Kausalität oder auch der konkrete Zusammenhang zwischen den beiden Aussagen wird ignoriert. Die Aussage „$A \implies B$“ ist immer richtig, falls die Aussage A falsch ist. Zum Beispiel die Aussage

$$„(0 = 1) \implies (\text{die Welt ist eckig})“$$

wahr. Die **logische Äquivalenz** der Aussagen A und B wird als „$A \iff B$“ geschrieben, als „A genau dann wenn B“ oder als „A ist äquivalent zu B“ ausgesprochen, und durch die Aussage „$(A \implies B) \wedge (B \implies A)$“ definiert.

Wir werden anstelle der Symbole „$\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$“ meist die Worte „nicht, und, oder, impliziert, ist äquivalent zu“ verwenden, wobei „oder“ immer einschliessend zu verstehen ist. Da wir keine Prioritätsregel (wie die bekannte Punkt- vor Strichrechnung) festgelegt haben, müssen wir stets Klammern verwenden um Zweideutigkeiten zu vermeiden. Eine allgemein übliche Prioritätsregel die wir im Gegensatz dazu verwenden ist, dass die Operation $\neg$ immer Vorrang hat. Wir erlauben uns also zum Beispiel „$(\neg A) \vee B$“ auch als „$\neg A \vee B$“ zu schreiben.

2.4. — Die Aussage „$A \vee (\neg A)$“ ist eine sogenannte **Tautologie**, denn sie trifft unabhängig vom Wahrheitswert von A stets zu. In der Tat, wenn A wahr ist, dann ist „$A \vee (\neg A)$“ wahr, und wenn A falsch ist, dann ist „$\neg A$“ wahr und also „$A \vee (\neg A)$“ auch wahr. Seien A, B Aussagen. Eine nützliche Tautologie ist die Aussage

$$„(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)“ \tag{2.1}$$

Um zu überprüfen, dass es sich bei (2.1) tatsächlich um eine Tautologie handelt, verwenden wir zuerst die Definition der logischen Implikation und sehen, dass die linke Seite „$\neg A \vee B$“ ist. Die rechte Seite wiederum ist „$\neg(\neg B) \vee \neg A$“, was zu „$B \vee \neg A$“ und damit auch zu „$\neg A \vee B$“ äquivalent ist. Die Tautologie (2.1) wird oft in Beweisen verwendet: Angenommen wir wollen zeigen, dass die Aussage A die Aussage B impliziert. Dann ist es manchmal einfacher und wegen (2.1) stets ausreichend zu zeigen, dass falls B nicht zutrifft auch A nicht zutrifft. Dies wird **Kontraposition** genannt.

Übung 2.5. — Seien A und B Aussagen.

1. Bestimmen Sie die Wahrheitstabellen zu „$A \implies B$“, zu „$\neg A \implies \neg B$“, und zu „$A \iff B$“. Finden Sie Beispiele mathematischer und nicht-mathematischer Art, die den Unterschied zwischen „$A \implies B$“ und „$\neg A \implies \neg B$“ illustrieren.

2. Definieren Sie die logische Operation des **auschliessenden Oder** „A XOR B“ mittels der obigen Operationen. Die Aussage „A XOR B“ soll zutreffen, wenn A oder B zutrifft, aber nicht beide zutreffen.

3. Überprüfen Sie, dass die Aussagen „$A \iff (\neg(\neg A))$“ und „$(A \wedge B) \iff (\neg(\neg A \vee \neg B))$“ Tautologien sind.

Übung 2.6 (Ritter und Knappen - aus [Smu1978]). — Auf der Insel der Ritter und Knappen ist jeder Einwohner entweder ein Ritter oder ein Knappe. Jeder Einwohner kennt seinen Status, und den Status von allen anderen Einwohnern. Es ist wichtig zu wissen, dass Ritter immer die Wahrheit sagen, und dass Knappen immer lügen. Sie werden auf Einwohner der Insel treffen und Ihre Aufgabe ist bei jedem zu entscheiden, ob er ein Ritter oder ein Knappe ist.

1. Sie treffen Johannes und Willhelm auf der Insel. Johannes sagt „Willhelm und ich sind Ritter.“ Willhelm sagt „Das ist eine Lüge, Johannes ist ein Knappe!“ Was sind sie?

2. Sie treffen Gildas, Ergard und Telones auf der Insel. Gildas sagt „Seien Sie vorsichtig, wir sind nicht alle drei Ritter.“ Ergard sagt: „Wir sind auch nicht alle drei Knappen.“ Telones sagt „Hören Sie nicht auf sie, ich bin der einzige Ritter.“ Was sind sie?

3. Sie treffen Heinrich und Arthur auf der Insel. Heinrich murmelt irgend etwas Unverständliches. Arthur sagt „Er sagte, er sei ein Knappe. Das ist er sicher - vertrauen Sie ihm nicht!“ Was sind sie?

2.2.2 Prädikatenlogik

Die logischen Begriffe, die wir oben vorgestellt haben, sind zwar grundlegend für alles weitere, aber nicht genügend komplex um interessante Aussagen zu bilden. Oft werden Aussagen formuliert, die für Elemente einer bestimmten Menge X wahr oder falsch sein können. Zum Beispiel könnte x für eine natürliche Zahl stehen. Dann ist „$x = x^2$“ eine Aussage über x,

die wahr oder falsch sein kann. Für derartige Aussagen „$A(x)$“ über Elemente x einer Menge X gibt es nun zwei weitere fundamentale Operationen, sogenannte **Quantoren**, um weitere Aussagen zu bilden.

2.7. — Der **Allquantor**, geschrieben $\forall$, wird verwendet um eine Aussage über alle Elemente von X zu treffen. Genauer steht die Aussage „$\forall x \in X : A(x)$“ für die Aussage „Für alle x in X gilt die Aussage $A(x)$“. Diese Aussage kann wahr oder falsch sein. Zum Beispiel ist die Aussage

$$„\forall n \in \mathbb{N} : n = n^2“$$

falsch, aber die Aussage

$$„\forall n \in \mathbb{N} : (n = n^2 \implies n = 0 \vee n = 1)“$$

ist richtig, da wir $\mathbb{N}$ als die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ definieren. Ist X die Menge, die keine Elemente enthält - die sogenannte „leere Menge“, dann ist „$\forall x \in X : A(x)$“ immer wahr, unabhängig davon, welche Aussage $A(x)$ ist.

2.8. — Der **Existenzquantor**, geschrieben $\exists$, wird verwendet um auszudrücken, dass es ein $x \in X$ mit einer gewissen Eigenschaft gibt. Genauer steht „$\exists x \in X : A(x)$“ für „Es gibt ein $x \in X$, für das die Aussage $A(x)$ gilt“. Zum Beispiel ist die Aussage

$$„\exists n \in \mathbb{N} : n = n^2“$$

richtig, da $n = 1$ eine natürliche Zahl ist, die $1^2 = 1$ erfüllt. Weiters ist auch die Aussage

$$„\exists n \in \mathbb{N} : (n = n^2 \implies n = 1)“$$

richtig, was man ähnlich wie zuvor sieht oder alternativ wie folgt: $n = 5$ erfüllt dass $5 \neq 25 = 5^2$, womit die Implikation „$5 = 5^2 \implies 5 = 1$“ wahr ist.

2.9. — Ein dritter Quantor, der häufig verwendet wird, ist der **Quantor der eindeutigen Existenz**, geschrieben $\exists!$. Dieser lässt sich mit Hilfe der beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$ wie folgt definieren: Die Aussage „$\exists! x \in X : A(x)$“ wird durch

$$„(\exists x \in X : A(x)) \wedge (\forall x, y \in X : (A(x) \wedge A(y) \implies x = y))“$$

definiert. Sie bedeutet, dass es ein x in X gibt, das die Aussage $A(x)$ erfüllt und dass dieses x durch die Aussage eindeutig bestimmt ist. Es gibt also kein weiteres Element $y \in X$, welches nicht gleich x ist und $A(y)$ erfüllt.

Übung 2.10. — Beschreiben Sie ein möglichst interessantes Beispiel für eine Aussage über Elemente einer Menge, die von genau einem Element erfüllt wird.

2.11. — Sei X eine Menge und $A(x)$ eine Aussage über Elemente von X. Nach dem Satz „Es gibt ein eindeutig bestimmtes x_0 in X, das $A(x_0)$ erfüllt.“ wird oft dieses x_0 in weiteren Argumenten verwendet. Da x_0 eindeutig festgelegt ist, ist dies akzeptabel. Manchmal wird aber auch nach dem Satz „Es gibt ein x in X, das $A(x)$ erfüllt.“ so ein x in der Argumentation benötigt. Hier sollte man erwähnen, dass so ein x gewählt wird. Des Weiteren sollte man, wenn nötig, sicher stellen, dass das darauf Folgende nicht, oder nur auf unwesentliche Weise, von der Wahl von x abhängt.

2.12. — Kombinieren wir die Quantoren $\forall$ und $\exists$ so treten sehr schnell für den allgemeinen Sprachgebrauch vielleicht subtile aber für die Logik und die Mathematik fundamentale Eigenheiten der Quantoren zu Tage: Seien X, Y Mengen und für jedes $x \in X$ und $y \in Y$ sei $A(x, y)$ eine Aussage. Dann haben die Aussagen

$$„\forall x \in X\ \exists y \in Y : A(x, y)“ \qquad \text{und} \qquad „\exists y \in Y\ \forall x \in X : A(x, y)“$$

sehr verschiedene Bedeutungen. Gegeben eine Aussage „$A(x, y)$“ über zwei Elemente einer Menge X werden wir, anstelle von der Aussage „$\forall x \in X\ \forall y \in X : A(x, y)$“ auch „$\forall x, y \in X : A(x, y)$“ und anstelle von „$\exists x \in X\ \exists y \in X : A(x, y)$“ auch „$\exists x, y \in X : A(x, y)$“ schreiben. Das das sinnvoll ist prüfen wir in Übung 2.15 nach.

Beispiel 2.13. — Angenommen X stehe für die Menge der Studienanfänger an der ETH, und Y für die Menge der Vorlesungen für Studienanfänger. Zu $x \in X$ und $y \in Y$ sei $A(x, y)$ die Aussage „Student x besucht die Vorlesung y“. Dann ist „ $\forall x \in X\ \exists y \in Y : A(x, y)$“ hoffentlich wahr - jeder Student besucht zumindest eine Vorlesung. Die Aussage „ $\exists y \in Y\ \forall x \in X : A(x, y)$“ ist jedoch falsch, denn es gibt keine Vorlesung die von allen Studienanfängern besucht wird.

Beispiel 2.14. — Sei $Y = X$ eine beliebige Menge. Die Aussage „ $\forall x \in X\ \exists y \in Y : x = y$“ ist dann sicher richtig, da wir für jedes $x \in X$ einfach $y = x$ wählen können. Die Aussage „ $\exists y \in X\ \forall x \in X : x = y$“ hingegen ist nur für sehr spezielle Mengen richtig, welche?

Übung 2.15. — Seien X, Y zwei Mengen und für jedes $x \in X$ und $y \in Y$ sei „$A(x, y)$“ eine Aussage. Überzeugen Sie sich oder noch besser eine Mitstudentin/einen Mitstudenten davon, dass

$$„(\forall x \in X\ \forall y \in Y : A(x, y)) \iff (\forall y \in Y\ \forall x \in X : A(x, y))“$$
$$„(\exists x \in X\ \exists y \in Y : A(x, y)) \iff (\exists y \in Y\ \exists x \in X : A(x, y))“$$

wahre Aussagen sind.

2.16. — Als letztes besprechen wir noch die Negation von Quantoren. Die Negation des

Allquantors ist ein Existenzquantor und die Negation des Existenzquantors ein Allquantor. Genauer ausgedrückt gelten für eine beliebige Aussage „$A(x)$“ über Elemente einer Menge X die folgenden Aussagen:

$$\text{„}\neg(\forall x \in X : A(x)) \iff \exists x \in X : \neg A(x)\text{“}$$
$$\text{„}\neg(\exists x \in X : A(x)) \iff \forall x \in X : \neg A(x)\text{“}$$

Beispielsweise ist die Negation von „Alle Politiker lügen manchmal“ die Aussage „Es gibt einen Politiker, der niemals lügt“.

Übung 2.17. — Sei X eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Bilden Sie die Negation folgender Aussagen und versuchen Sie die Negation so weit wie möglich nach „rechts“ zu verschieben:

1. „$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : |x - y| < \varepsilon$“
2. „$\forall y \in X\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in X : |x - y| < \varepsilon \implies x = y$“
3. „$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \exists y \in X : (y \neq x) \wedge |x - y| < \varepsilon$“

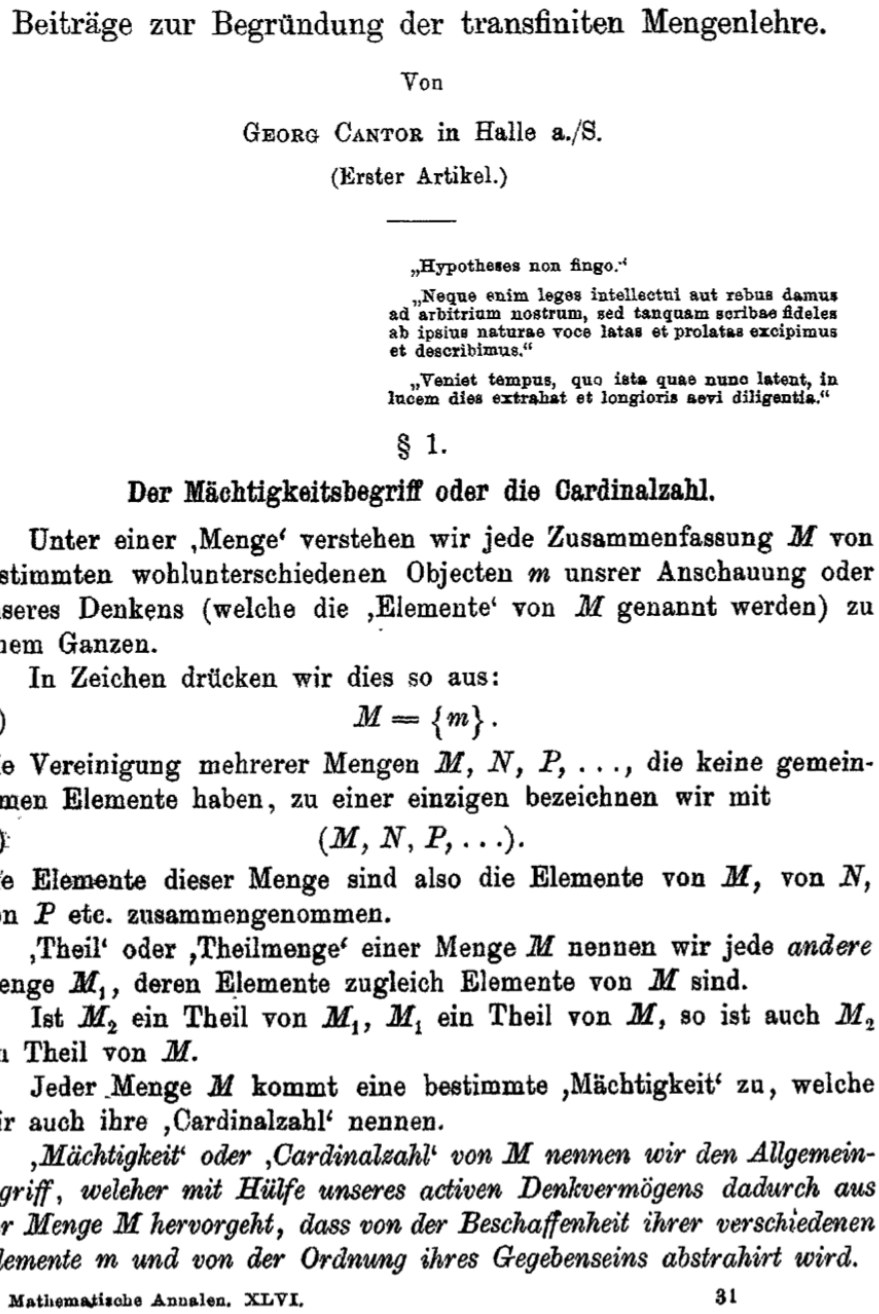
Hier ist „$\forall \varepsilon > 0 : A(\varepsilon)$“ eine gebräuchliche Kurzform für „$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \implies A(\varepsilon)$“ oder anders ausgedrückt für „$\forall \varepsilon \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} : A(\varepsilon)$“. Die Aussage „$\exists \varepsilon > 0 : A(\varepsilon)$“ steht für „$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \wedge A(\varepsilon)$“ oder äquivalenterweise für „$\exists \varepsilon \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} : A(\varepsilon)$“. Sie können für die Negation von „$|x - y| < \varepsilon$“ auch einfach „$\neg(|x - y| < \varepsilon)$“ schreiben, doch ist dies auf Grund üblicher Definitionen und Eigenschaften von $\mathbb{R}$ äquivalent zu „$|x - y| \geq \varepsilon$“.

Übung 2.18. — Zum Spass: Betrachten Sie den Satz „*Everybody Loves My Baby, but My Baby Don't Love Nobody but Me*“ (Jazz Standard von Spencer Williams und Jack Palmer, haupsächlich bekannt durch die Interpretation von Louis Armstrong, 1924) vom streng logischen Standpunkt. Handelt er von einem Liebespaar?

2.3 Mengenlehre und Abbildungen

2.3.1 Naive Mengenlehre

Wir führen in diesem Abschnitt die Grundbegriffe der naiven Mengenlehre ein. Georg Cantor, den man als Begründer der Mengenlehre ansehen kann, beschrieb 1895 Mengen wie folgt:



Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo."

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

(1) $$M = \{m\}.$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil' oder ‚Theilmenge' einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit' zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl' nennen.

‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Mathematische Annalen. XLVI. 31

Figur 2.1: Erste Seite von Cantor's Arbeit [Can1895].

Der Grund, warum die naive Mengenlehre *naiv* genannt wird, ist, dass sie Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts durch die *axiomatische* Mengenlehre, etwa die ZFC-Mengenlehre ersetzt wurde. Hier steht ZF für Zermelo-Fraenkel und C für „Axiom of Choice". Eine Weiterentwicklung davon ist die NBG-Megenlehre – NBG für von Neumann, Bernays und Gödel. Wir

bedienen uns der naiven Mengenlehre, da wir die Zeit nicht aufbringen können, die axiomatische Mengenlehre ausreichend zu besprechen und da wir auf jeden Fall nur „vernünftige“ Mengenkonstruktionen verwenden werden. Dies ist vom streng logischen Standpunkt sinnlos, ist aber ein notwendiger Kompromiss. Wir werden also weder definieren was eine Menge ist, noch was wir unter Elementen verstehen, oder unter einer Zusammenfassung. Die zentralen Annahmen der naiven Mengenlehre sind die folgenden Postulate (1), (2) und (4). Das Postulat (3) das wir hier zusätzlich aufstellen gehört üblicherweise nicht dazu, sondern ist eine Konsequenz des sogenannten *Regularitätsaxioms* in der Zermelo-Frenkel Mengenlehre.

(1) Eine **Menge** besteht aus beliebigen unterscheidbaren Elementen.

(2) Eine Menge ist unverwechselbar durch ihre **Elemente** bestimmt.

(3) Eine Menge ist nicht Element ihrer selbst.

(4) Jede Aussage A über Elemente einer Menge X definiert die Menge der Elemente in X für die die Aussage A wahr ist, notiert $\{x \in X \mid A \text{ gilt für } x\}$.

2.19. — Wir schreiben „$x \in X$“, falls x ein Element der Menge X ist. Je nach Zusammenhang nennen wir die Elemente mitunter auch Punkte, Zahlen oder Vektoren. Falls x kein Element der Menge X ist, also $\neg(x \in X)$, so schreiben wir auch $x \notin X$. Manchmal beschreiben wir eine Menge durch eine konkrete Auflistung ihrer Elemente, also etwa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Oft benutzen wir auch die Form im Postulat (4), etwa

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m\}$$

um die Menge der geraden Zahlen zu beschreiben. Die **leere Menge**, geschrieben als $\varnothing$ oder auch $\{\}$, ist die Menge, die keine Elemente enthält. Elemente von Mengen können auch selbst wiederum Mengen sein. Mengen von Mengen werden aus rein sprachlichen Gründen gelegentlich auch **Familien** von Mengen genannt. Seltener braucht man auch die Bezeichnung **Kollektion** oder **Ansammlung**.

Definition 2.20. — Seien P und Q Mengen. Wir sagen, dass P **Teilmenge** von Q ist, und schreiben $P \subset Q$, falls für alle $x \in P$ auch $x \in Q$ gilt. Wir sagen, dass P eine **echte Teilmenge** von Q ist und schreiben $P \subsetneq Q$, falls P eine Teilmenge von Q, aber nicht gleich Q ist. Wir schreiben $P \not\subset Q$, falls P keine Teilmenge von Q ist.

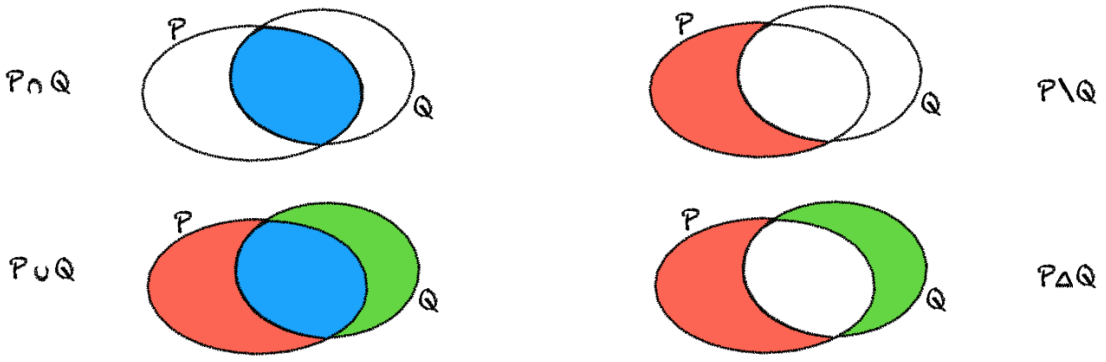
2.21. — Äquivalente Formulierungen für „P ist eine Teilmenge von Q“ sind „P ist in Q **enthalten**“ und „Q ist eine **Obermenge** von P“, was wir auch als „$Q \supset P$“ schreiben. Die Bedeutung der Aussage „Q ist eine **echte Obermenge** von P“, geschrieben $Q \supsetneq P$, ergibt sich nun implizit. Wegen der zweiten Annahme der naiven Mengenlehre sind zwei Mengen P und Q genau dann gleich, wenn sowohl $P \subset Q$ als auch $Q \subset P$ gilt. Insbesondere könnte $\{x, y\} = \{z\}$ gelten, falls $x = y = z$ ist. Es gibt für Elemente einer Menge keine „Vielfachheiten“. Im Folgenden führen wir geläufige Konstruktionen von Mengen aus gegebenen Mengen ein.

Übung 2.22. — Seien P und Q Mengen. Formulieren Sie die Aussagen „P ist eine echte Teilmenge von Q“ und „P ist keine Teilmenge von Q“ in Prädikatenlogik.

Definition 2.23. — Seien P und Q Mengen. Der **Durchschnitt** $P \cap Q$, die **Vereinigung** $P \cup Q$, das **relative Komplement** $P \setminus Q$ und die **symmetrische Differenz** $P \triangle Q$ sind durch

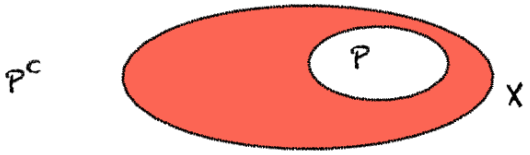
$$\begin{aligned} P \cap Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \in Q\} \\ P \cup Q &= \{x \mid x \in P \vee x \in Q\} \\ P \setminus Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\} \\ P \triangle Q &= (P \cup Q) \setminus (P \cap Q) = \{x \mid x \in P \text{ XOR } x \in Q\} \end{aligned}$$

definiert. Dies ist alles in den Bildern 2.2 veranschaulicht. Skizzen dieser Art nennen sich **Venndiagramme**.



Figur 2.2: Mengenoperationen

2.24. — Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer gegebenen Grundmenge X sind, dann ist das **Komplement** P^c von P definiert durch $P^c = X \setminus P$.



Figur 2.3: Das Komplement $P^c = X \setminus P$ von P in X.

Übung 2.25. — Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie die folgenden Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge C &\iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\ (A \wedge B) \vee C &\iff (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{aligned}$$

Seien P, Q, R Mengen. Zeigen Sie die folgenden Distributivgesetze:

$$(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$$
$$(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R)$$

Können Sie auch Kommutativ- und Assoziativgesetze formulieren?

Definition 2.26. — Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen, also eine Menge deren Elemente selbst Mengen sind. Dann definieren wir die **Vereinigung** respektive den **Durchschnitt** der Mengen in $\mathcal{A}$ als

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\} \ , \qquad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

Falls $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$, dann schreiben wir auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \ , \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$

für die Vereinigung, und den Durchschnitt der Mengen in $\mathcal{A}$.

Übung 2.27. — Seien P, Q Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie den folgenden Spezialfall der De Morgan'schen Gesetze:

$$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c, \qquad (P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c.$$

Illustrieren Sie Ihr Vorgehen mit einem Venn-Diagramm. Allgemeiner, sei $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie die allgemeine Form der De Morgan'schen Gesetze:

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c \ , \qquad \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c$$

Übung 2.28. — Lesen Sie den Abschnitt 1.1 falls Sie das noch nicht getan haben. Was ist die Menge

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\},$$

wobei n wie in Definition 2.26 über alle natürlichen Zahlen läuft, und wie nennen wir dies?

Definition 2.29. — Zwei Mengen A, B heissen **disjunkt**, falls $A \cap B = \varnothing$ gilt. Für eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Mengen, sagen wir, dass die Mengen in $\mathcal{A}$ **paarweise disjunkt** sind, falls für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \neq A_2$ gilt $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Definition 2.30. — Sei X eine Menge. Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X ist die Menge aller Teilmengen von X, das heisst $\mathcal{P}(X) = \{Q \mid Q \text{ ist eine Menge und } Q \subset X\}$.

Übung 2.31. — Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\varnothing)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.

2.32. — Wir wenden uns nun ein paar oft benutzten Konventionen zu, die das Auflisten von Elementen oder Objekten betrifft. Wenn wir schreiben „Seien x_1, x_2, x_3 Elemente von X“, dann heisst das

$$(x_1 \in X) \wedge (x_2 \in X) \wedge (x_3 \in X)$$

und hat nichts mit den Zahlen $1, 2, 3$ zu tun. Je zwei der Elemente x_1, x_2, x_3 können gleich oder voneinander verschieden sein. Wir haben die Zahlen $1, 2, 3$ dazu benutzt, Elemente von X aufzulisten. Anstatt x_1, x_2, x_3 hätten wir genausogut Symbole x, y, z oder x, x', x'' hernehmen können. Die Indexschreibweise hat den Vorteil, dass wir auch viele Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{26}$ betrachten können, ohne gleich das ganze Alphabet dafür zu verschwenden. Eine Liste von Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus X nennen wir ein n–**tupel**. Wir schreiben solche Listen oder eben n–tupel als

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad \text{oder} \qquad (x_i)_{i=1}^n$$

mit runden Klammern. Man darf Listen nicht mit Mengen verwechseln – wie gesagt können je zwei Einträge in so einer Liste gleich oder voneinander verschieden sein. Die Ordnung spielt eine Rolle: Zwei n-tupel sind gleich,

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

falls $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$ gilt. Ein 2–tupel nennt man **geordnetes Paar**, ein 3–tupel nennt man **Tripel**, ein 4–tupel **Quadrupel**. Wir können auch unendlich viele Elemente von X auflisten. Wenn wir schreiben „Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Elemente von X“, dann heisst das $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$. So eine unendliche Liste schreiben wir als $(x_n)_{n=0}^\infty$ oder als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und nennen sie **Folge** von Elementen aus X. Zum Beispiel ist

$$(x_n)_{n=0}^\infty = (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, \ldots)$$

eine Folge von natürlichen Zahlen, mit $x_n = 0$ falls n gerade ist, und $x_n = (n+1)/2$ falls n ungerade ist. Dass wir die natürlichen Zahlen zur Indexierung benutzen ist im Grunde unwesentlich. Sei I eine beliebige Menge. Wenn wir schreiben „Seien $(x_i)_{i\in I}$ Elemente von X“, dann heisst das

$$\forall i \in I : x_i \in X.$$

Wir bezeichnen I in diesem Zusammenhang als **Indexmenge**. Wir nennen die Auswahl von Elementen $(x_i)_{i\in I}$ auch ein I–**tupel**.

Definition 2.33. — Für zwei Mengen X und Y ist das **kartesische Produkt** $X \times Y$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) wobei $x \in X$ und $y \in Y$. In Symbolen,

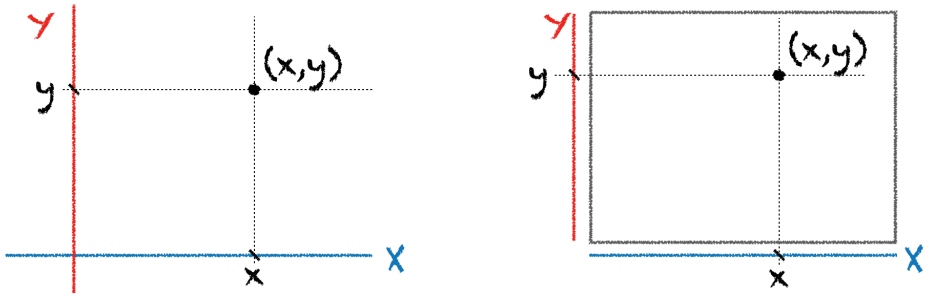
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Allgemeiner, sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei X_i eine Menge. Das **Produkt** der Familie von Mengen $\{X_i \mid i \in I\}$ definieren wir als

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : x_i \in X_i\}$$

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und eine Menge X definieren wir X^n als das n-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst. Das heisst, $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$ und so weiter.

2.34. — Graphisch, meist schematisch, wird das kartesische Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X, Y wie in folgendem Bild dargestellt.



Figur 2.4: Zwei Darstellungen von $X \times Y$.

Wenn wir ein Produkt von drei Mengen X, Y und Z betrachten wollen, dann haben wir im Prinzip drei Möglichkeiten:

$$(X \times Y) \times Z, \quad X \times (Y \times Z) \quad \text{und} \quad X \times Y \times Z$$

Elemente in der ersten Konstruktion sind geordnete Paare der Form $((x, y), z)$ mit $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$, Elemente in der zweiten Konstruktion sind analog dazu Paare der Form $(x, (y, z))$. Elemente der dritten Konstruktion sind Tripel (x, y, z). Wir werden diesen feinen Unterschied oft ignorieren, und die drei Konstruktionen als gleich ansehen.

Beispiel 2.35. — Wir betrachten die Mengen $X = \{0, 1\}$ und $Y = \{a, b, c\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\} \quad \text{und} \\ X^2 &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

Falls $X = \{a, b, c, \ldots, z\}$ die Menge der Buchstaben im Alphabet ist, so kann man X^n mit der Menge aller möglichen (potenziell sinnfreien) Wörter der Länge n identifizieren. Die Menge der deutschen Wörter der Länge n bildet eine echte Teilmenge von X^n unter dieser Identifikation.

Übung 2.36. — Die Menge der von einer digitalen Uhr angezeigten Uhrzeiten lässt sich als kartesisches Produkt zweier Mengen auffassen. Wie?

Übung 2.37 (Schnitte von Rechtecken). — Seien X, Y Mengen und A, A' Teilmengen von X, B, B' Teilmengen von Y. Zeigen Sie die Formel

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Überzeugen Sie sich auch davon, dass es keine ähnliche Formel für die Vereinigung gibt. Was hat das mit Rechtecken zu tun?

2.3.2 Kritik der naiven Mengenlehre

Die naive Mengenlehre führt bald einmal zu unauflösbaren Widersprüchen, wenn man es darauf anlegt. Ein klassisches Beispiel für so einen Widerspruch ist das **Russell-Paradox**.

Beispiel 2.38 (Russell 1903, [Rus1903]). — Sei R die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, also

$$R = \{X \mid X \text{ ist eine Menge und } X \notin X\}.$$

Stellt man nun die Frage, ob R selbst zu R gehören kann, so erhält man „$R \in R \iff R \notin R$“. Dies kann aber nicht gelten und ist also ein Widerspruch innerhalb der naiven Mengenlehre.

Dieses Beispiel ist eine Version des sogenannten Lügner-Paradoxons: „Dieser Satz ist falsch.“ oder „Ich lüge immer.“ (siehe auch Link). Es entsteht dadurch, dass wir ohne vernünftige Einschränkungen das Bilden beliebiger Mengen erlauben.

Wie bereits angemerkt zählt das Postulat dass eine Menge nicht Element ihrer selbst ist üblicherweise nicht zur naiven Mengenlehre. Dieses Postulat löst das Russel-Paradox keineswegs auf. Vielmehr besagt es in unserem Setup dass R einfach die Menge aller Mengen ist, aber wegen $R \notin R$ ist R nicht die Menge *aller* Mengen. Wir sind gezwungen daraus zu schliessen, dass es so etwas wie eine Menge aller Mengen nicht geben kann. Das ist in der axiomatischen Mengenlehre tatsächlich so, weil man hier präziser formuliert was für Mengen man überhaupt bilden kann.

Übung 2.39 (Der Barbier aus Sevilla). — Bart, der Barbier in dem Dorf Sevilla, rasiert alle Männer von Sevilla, die sich nicht selbst rasieren. Sonst rasiert Bart aber niemanden. Rasiert Bart sich selbst?

Übung 2.40. — Als Menge der deutschen Worte legen wir alle Worte in der 27. Auflage des Duden (etwa 150’000 Wörter) fest. Wir betrachten die die Teilmenge

$$X := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und man kann } n \text{ in weniger als zwanzig deutschen Worten beschreiben}\}$$

der natürlichen Zahlen. Diese Menge ist endlich, da die Anzahl deutscher Worte endlich ist. Was ist die kleinste Zahl k die nicht ein Element von X ist? Die kleinste natürliche Zahl die

man nicht in weniger als zwanzig deutschen Worten beschreiben kann. Aber haben wir im letzten Satz nicht gerade k in weniger als zwanzig Worten beschrieben?

Ein weiteres Problem in der naiven Mengenlehre ist das Formen von geordneten Paaren. Wir haben zwar umschrieben, aber nicht wirklich definiert, was ein **geordnetes Paar** ist. Eine elementare Idee wie man geordnete Paare (x, y) konstruieren könnte wäre, (x, y) als die Menge $\{x, \{y\}\}$ oder $\{x, \{x, y\}\}$ zu definieren.

Übung 2.41. — Zeigen Sie: $\{x, \{y\}\} = \{y, \{x\}\} \implies x = y$.

Übung 2.42. — Das Regularitätsaxiom der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre ist Folgendes.

$$X \neq \varnothing \implies \big(\exists y \in X : (y \cap X = \varnothing)\big)$$

Folgern Sie aus diesem Axiom dass insbesondere $X \notin X$ gilt. Zeigen Sie dass unter Annahme des Regularitätsaxioms $\{x, \{x, y\}\} = \{a, \{a, b\}\} \implies ((x = a) \wedge (y = b))$ gilt.

2.3.3 Funktionen und Abbildungen

Der Begriff der Funktion ist in der Mathematik unentbehrlich. In Worten ausgedrückt ist eine **Funktion** f von einer Menge X nach einer Menge Y eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y = f(x) \in Y$ zuweist. Wir schreiben $f : X \to Y$ für eine Funktion von X nach Y und sprechen manchmal auch von einer **Abbildung** oder einer **Transformation**. Diese Umschreibung ist natürlich nicht eine strenge mengentheoretische Definition.

Definition 2.43. — Seien X und Y Mengen. Eine **Funktion** von X nach Y ist eine Teilmenge F des kartesischem Produkts $X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$ gibt:

$$\forall x \in X \; \exists! y \in Y : (x, y) \in F.$$

Wir bezeichnen die Menge X als **Definitionsbereich** und die Menge Y als **Wertebereich** oder auch als **Zielbereich**.

2.44. — Funktionen von X nach Y werden in der Praxis nicht als Teilmengen von $X \times Y$ behandelt, sondern immer als Zuordnungen: Ist $F \subseteq X \times Y$ eine Funktion so wie in der Definition, und ist $x \in X$, dann schreiben wir $y = f(x)$ für das eindeutige Element $y \in Y$ für das $(x, y) \in F$ gilt. Wir ordnen also $x \in X$ das Element $y = f(x) \in Y$ zu, und stellen uns so Funktionen als Zuordnungen vor. Die Menge F ist in dieser Schreibweise durch

$$F = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

gegeben, und wird als **Graph** von f bezeichnet. Im Zusammenhang einer Funktion $f : X \to Y$ wird ein Element x des Definitionsbereichs auch **Argument** genannt, und ein von der Funktion angenommenes Element $y = f(x) \in Y$ wird auch **Wert** der Funktion genannt. Ist $f : X \to Y$ eine Funktion, so schreibt man auch

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

wobei $f(x)$ eine konkrete Formel sein könnte. Beispielsweise wäre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto x^2$ eine vollständig definierte Funktion in dieser Notation. Wir sprechen „$\mapsto$“ als „wird abgebildet auf“ aus. Eine Formel wie zum Beispiel $y = x^2$ ohne Angabe des Definitionsbereichs und des Wertebereichs ist keine vollständige Definition einer Funktion. Zwei Funktionen $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ gelten als gleich, falls $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X_1$ gilt.

2.45. — Sei X eine Menge und sei A eine Teilmenge von X. Die Funktion $\iota_A : A \to X$ die durch $\iota_A(a) = a$ für alle $a \in A$ gegeben ist nennt man **Inklusionsabbildung** von A nach X. Die Inklusionsabbildung $\iota_X : X \to X$ wird **Identität** von X genannt, und als $\mathrm{id}_X : X \to X$ geschrieben. Die Funktion $\mathbb{1}_A : X \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin A \\ 1 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

wird die **charakteristische Funktion** von A genannt. Für zwei Mengen X und Y wird die **Menge aller Abbildungen** von X nach Y als Y^X geschrieben, formaler

$$Y^X = \{f \mid f : X \to Y \text{ ist eine Funktion}\}.$$

Grund für die Notation ist unter anderem die folgende Behauptung, die man mittels Induktion beweisen kann: Falls X und Y endliche Mengen sind mit m, respektive n Elementen für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so hat Y^X genau n^m Elemente.

Definition 2.46. — Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Dann ist die **Verknüpfung** von f mit g die Funktion

$$g \circ f : X \to Z$$

die durch $g \circ f(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$ definiert ist.

2.47. — Seien $f : W \to X$, $g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ Funktionen. Dann können wir sowohl die Funktion $h \circ (g \circ f) : W \to Z$ als auch die Funktion $(h \circ g) \circ f : W \to Z$ betrachten. Die

Klammern sind jedoch irrelevant, denn es gilt

$$h \circ (g \circ f)(w) = h(g \circ f(w)) = h(g(f(w)) = h \circ g(f(w)) = (h \circ g) \circ f(w)$$

für alle $w \in W$. Wie sagen die Verknüpfung von Funktionen sei **assoziativ**. Deswegen schreiben wir einfach $h \circ g \circ f : W \to Z$.

2.48. — Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und sei A eine Teilmenge von X. Die Verknüpfung $f \circ \iota_A$ von f mit der Inklusion $\iota_A : A \to X$ nennt man **Einschränkung** von f auf A. Man notiert diese Funktion als

$$f|_A : A \to Y.$$

Es gilt $f|_A(a) = f(a)$ für alle $a \in A$. Dennoch betrachten wir $f|_A$ und f als verschiedene Funktionen, da ihr Definitionsbereich nicht derselbe ist - ausgenommen natürlich man hätte $A = X$ und also $\iota_A = \mathrm{id}_X$.

Übung 2.49. — Geben Sie ein Beispiel für eine Menge X und Funktionen $f : X \to X$ und $g : X \to X$ derart, dass $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

2.50. — Eine Funktion, für die Wertebereich gleich dem Definitionsbereich ist, lässt sich auch mit sich selbst verknüpfen. Sei also $f : X \to X$ eine Funktion von einer Menge X auf sich selbst. Wir definieren die **Iterationen der Funktion** f durch $f^{\circ 1} = f$, $f^{\circ 2} = f \circ f$, $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$, und rekursiv auch

$$f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Wir sprechen $f^{\circ n}$ auch als „f hoch n“ aus und setzen des Weiteren $f^{\circ 0} = \mathrm{id}_X$.

Übung 2.51. — Beschreiben Sie in jeder der folgenden drei Situationen alle Iterationen der Funktion $f : X \to X$ explizit.

1. $X = \{1, 2, 3\}$ und $f : X \to X$ ist die Funktion definiert durch $f(1) = 2,\ f(2) = 3$ und $f(3) = 1$.
2. $X = \mathbb{Z}$, und $f : X \to X$ ist die Funktion definiert durch $f(x) = 3x$.
3. $X = \mathbb{Z}$, und $f : X \to X$ ist die Funktion definiert durch $f(x) = x^2$.

Definition 2.52. — Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir nennen f

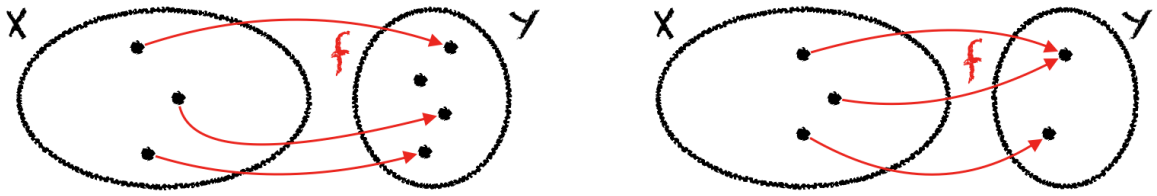
1. **injektiv** oder eine **Injektion** falls $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt.
2. **surjektiv** oder eine **Surjektion** falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert.

3. **bijektiv** oder eine **Bijektion**, eine sie surjektiv und injektiv ist. Ist f bijektiv, so wird die Funktion $g : Y \to X$ die durch

$$g(y) = \text{das eindeutige } x \in X \text{ mit } f(x) = y$$

definiert ist **Umkehrfunktion** von f, oder zu f **inverse Funktion** genannt.

2.53. — Eine Funktion $f : X \to Y$ ist also nicht injektiv, falls zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in X$ existieren mit $f(x_1) = f(x_2)$, und nicht surjektiv, falls es ein $y \in Y$ gibt, so dass $f(x) \neq y$ für alle $x \in X$ gilt. In nachfolgender Graphik ist links ist eine injektive Funktion die nicht surjektiv ist dargestellt, rechts eine surjektive Funktion die nicht injektiv ist.



Die Existenz einer Umkehrfunktion ist charakterisierend für bijektive Funktionen: Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Funktion $g : Y \to X$ gibt, mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Für eine Abbildung $f : X \to X$ auf einer endlichen Menge X sind Injektivität und Surjektivität äquivalent. Für unendliche Mengen ergeben sich jedoch weitere Möglichkeiten, die auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen.

Applet 2.54 (Funktionen auf Mengen mit höchstens drei Elementen)**.** *In diesem Applet kann man verschiedene Funktionen f von einer Menge X mit höchstens drei Elementen nach einer Menge Y mit höchstens drei Elementen definieren. Hierbei kommt es zu verschiedenen Eigenschaften der Funktion.*

Beispiel 2.55. — Ist die Funktion $x \mapsto x^2$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Diese Frage ist sinnlos, da weder Definitionsbereich noch Wertebereich festgelegt wurden. Bezeichnet $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, so gilt Folgendes.

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv, denn falls x, y zwei nicht-negative Zahlen mit $x < y$ sind, so gilt auch $x^2 < y^2$. Genauso folgt aus $x > y$, dass $x^2 > y^2$ ist. Sie ist jedoch nicht surjektiv: -1 ist nicht Element des Bildes von f, da Quadrate von reellen Zahlen nicht negativ sind.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$ ist surjektiv (es existiert eine Wurzel), sie ist aber nicht injektiv, denn $f(1) = 1 = (-1)^2 = f(-1)$.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

Wir werden diese Aussagen beweisen sobald wir reelle Zahlen definiert haben.

Beispiel 2.56 (Hilberts Hotel). — Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = n + 1$ ist zwar injektiv aber nicht surjektiv, denn $f(n) = n + 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies kann man sich zur Veranschaulichung wie folgt vorstellen: Angenommen ein Hotel – das sogenannte **Hilbert Hotel** – ist voll belegt und hat für jede natürliche Zahl n ein Hotelzimmer mit der Türnummer n entlang eines wirklich sehr langen Ganges, der Reihe nach nummeriert. Dann kann man trotzdem noch einen Gast unterbringen. Dazu muss die Rezeption bloss dem Gast im ersten Zimmer einen Brief mit folgender Botschaft aushändigen:

> „*Wir bedauern, Ihnen mitzuteilen, dass wir Ihnen ein neues Zimmer zuweisen müssen. Bitte übergeben Sie diesen Brief dem Gast im nächsten Zimmer und übernehmen Sie dieses Zimmer, sobald es frei ist.*“

Daraufhin wird das erste Zimmer frei sein, wo dann der neue Gast untergebracht werden kann. Ebenso bekommen alle alten Gäste jeweils ein neues Zimmer. Genauso gibt es auch surjektive Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nicht injektiv sind, zum Beispiel die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die durch $g(0) = 0$ und $g(n) = n - 1$ für alle $n \geq 1$ gegeben ist. Das Gedankenspiel von Hilberts Hotel lässt sich durchaus erweiteren. Wir verweisen dazu auf die nächste Übung und diesen Kurzfilm, der folgende Übung auflöst und erweitert.

Übung 2.57 (Hilberts Omnibus). — Wir setzen das Gedankenspiel von Hilberts Hotel fort: Stellen Sie sich vor, dass ein sehr langer, voll besetzter Bus mit Gästen vor Hilberts vollem Hotel auffährt, der für jede natürliche Zahl einen entsprechend nummerierten Sitzplatz aufweist. Wie können Sie die neuen Gäste alle im Hotel unterbringen? Welche Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ können Sie verwenden, um im Hotel Platz zu beschaffen?

Lemma 2.58. — *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.*

1. *Falls f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.*
2. *Falls $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.*
3. *Falls f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.*
4. *Falls $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.*
5. *Falls f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Beweis. (1): Angenommen f und g sind injektiv und $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ für zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$. Wegen $g \circ f(x_1) = g(f(x_1))$ und $g \circ f(x_2) = g(f(x_2))$ muss $f(x_1) = f(x_2)$ gelten, da g injektiv ist. Da f injektiv ist, gilt $x_1 = x_2$. Dies zeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist.

(2): Angenommen $g \circ f$ ist injektiv und $f(x_1) = f(x_1)$ für zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$. Wegen $f(x_1) = f(x_1)$ gilt auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, und da $g \circ f$ injektiv ist folgt daraus $x_1 = x_2$.

(3): Angenommen f und g sind surjektiv und $z \in Z$ ist ein beliebiges Element. Da g surjektiv ist, können wir ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$ wählen. Da auch f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ und damit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Also existiert für jedes Element $z \in Z$ ein Element $x \in X$ mit $g \circ f(x) = z$ und daher ist $g \circ f$ surjektiv.

(4): Angenommen $g \circ f$ ist surjektiv und $z \in Z$. Surjektivität bedeutet, dass es ein $x \in X$ mit $g(f(x)) = z$ gibt. Setzen wir $y = f(x)$, so gilt $g(y) = z$, und daher ist g surjektiv.

(5): Angenommen f und g sind bijektiv. Der erste Teil von (5) folgt direkt, denn nach (1) ist $g \circ f$ injektiv und nach (3) surjektiv. Wir überprüfen nun die behauptete Formel. Sei $z \in Z$. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(g^{-1}(z))$ ein Element ist, das unter $g \circ f$ auf z abgebildet wird. Tatsächlich gilt wegen $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$ und $g(g^{-1}(z)) = z$ für alle $z \in Z$ auch

$$g \circ f(f^{-1}(g^{-1}(z)) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z$$

und (5) ist bewiesen. □

Definition 2.59. — Für eine Funktion $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $A \subset X$ schreiben wir

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$$

und nennen diese Teilmenge von Y das **Bild** von A unter bezüglich der Funktion f. Für eine Teilmenge $B \subset Y$ schreiben wir

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B : f(x) = y\}$$

und nennen diese Teilmenge von X das **Urbild** von B unter bezüglich der Funktion f.

2.60. — Wir verwenden manchmal auch die Notation $\{f(a) \mid a \in A\}$ für die Bildmenge $f(A)$. In „$f^{-1}(B)$“ soll das Symbol f^{-1} nicht mit einer Umkehrfunktion verwechselt werden. Die Schreibweise kann etwas verwirrend sein, ist jedoch nicht völlig unsinnig: Falls f bijektiv ist und also eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, so ist $f^{-1}(B)$ auch das Bild von B bezüglich f^{-1}. Es gilt immer $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $f^{-1}(Y) = X$, und eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv wenn $f(X) = Y$ gilt.

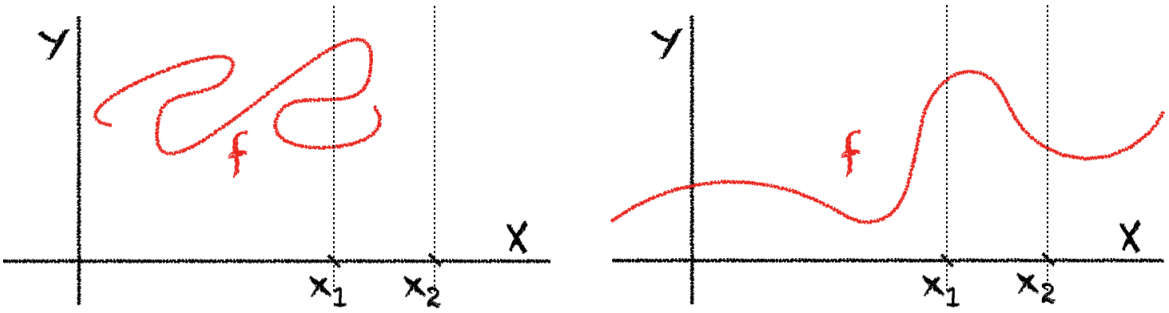
Übung 2.61. — Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind, und welche falsch.
Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Seien A, A_1, A_2 Teilmengen von X, und B, B_1, B_2 Teilmengen von Y.

(1)	$f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$	(4)	$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
(2)	$f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$	(5)	$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
(3)	$f^{-1}(f(A)) = A$	(6)	$f(f^{-1}(B)) = B$

Welche der falschen Aussagen sind wahr wenn man zusätzlich annimmt dass es sich bei f um eine injektive Funktion handelt?

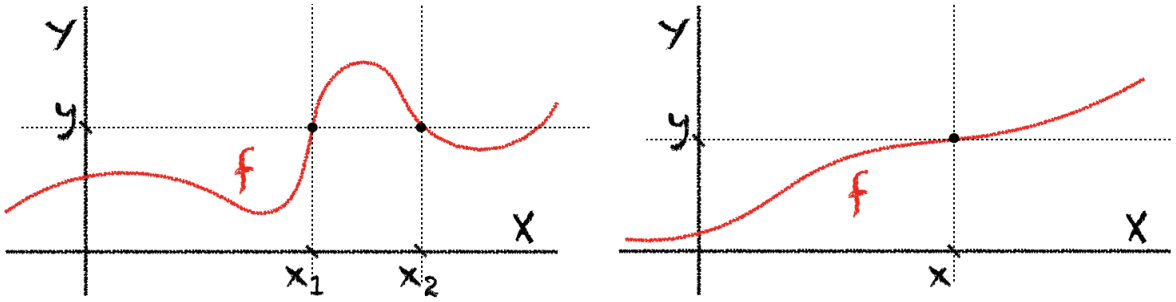
2.62. — Der Graph einer Funktion $f : X \to Y$, also die Teilmenge $\{(x, y) \mid f(x) = y\}$ von

$X \times Y$ über die die Funktion f eigentlich definiert ist, kann man von einem geometrischen Gesichtspunkt her betrachten. In den folgenden Illustrationen zeichnen wir schematisch kartesische Produkte als ebene Koordinatensysteme. Standardmässig nimmt man bei der Darstellung des Graphen einer Funktion den Definitionbereich als die Horizontale und den Wertebereich als die Vertikale.



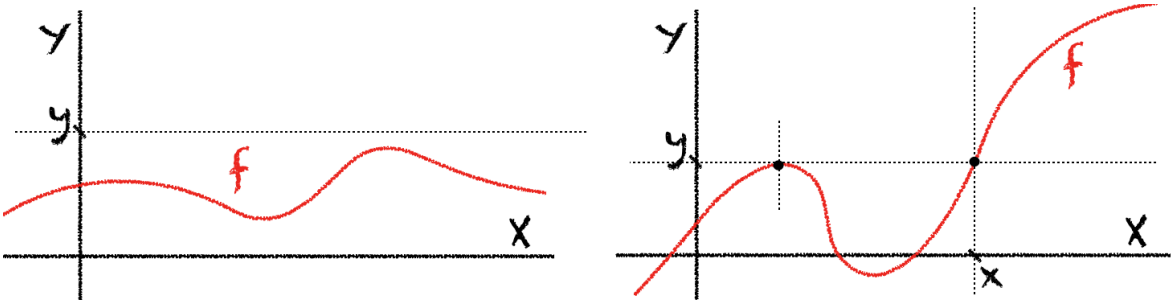
Figur 2.5: Links keine Funktion, rechts eine Funktion

Die in Figur 2.5 links dargestellte Teilmenge von $X \times Y$ ist nicht der Graph einer Funktion von X nach Y, denn die vertikale Gerade durch x_1 schneidet die Teilmenge f in drei Punkten, und die vertikale Gerade durch x_2 schneidet f nicht. Rechts sieht man den Graphen einer Funktion: Jede Vertikale Gerade schneidet die Menge f in genau einem Punkt. Auch die Eigenschaften aus Definition 2.52 lassen sich im Graphen erkennen. Unter anderem ist ersichtlich, ob eine Funktion injektiv ist oder nicht.



Figur 2.6: Links nicht injektiv, rechts injektiv

Figur 2.6 links zeigt den Graphen einer nicht injektiven Funktion, denn es gilt $x_1 \neq x_2$ aber $f(x_1) = y = f(x_2)$. Die Horizontale Gerade durch y schneidet den Graphen in mehr als einem Punkt. Figur 2.6 rechts zeigt den Graphen einer einer injektiven Funktion, denn jede horizontale gerade schneidet den Graphen in höchstens einem Punkt. Ähnlich lässt sich am Graphen erkennen, ob eine Funktion surjektiv ist oder nicht.



Figur 2.7: Links nicht surjektiv, rechts surjektiv

Figur 2.7 links ist der Graph einer nicht surjektiven Funktion. Der Punkt y in Y wird unter der Funktion von keinem Element in X angenommen, da die horizontale Gerade durch y den Graphen nicht schneidet. Figur 2.7 rechts zeigt den Graphen einer surjektiven Funktion. Jede horizontale Linie, wie zum Beispiel jene durch y, schneidet den Graphen in mindestens einem Punkt.

Applet 2.63 (Bilder und Urbilder)**.** *Wir betrachten eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I in $\mathbb{R}$ definiert ist. Je nach Einstellung des Applets wird entweder das Bild $f(A)$ eines Teilintervalls $A = [x_1, x_2] \subseteq I$ oder das Urbild $f^{-1}([y_1, y_2])$ eines Intervalls $[y_1, y_2] \subseteq \mathbb{R}$ dargestellt.*

2.3.4 Algebraische Strukturen

Moderne mathematische Theorien sind auf algebraischen Strukturen aufgebaut: Gruppen, Ringe, Moduln, Körper, Vektorräume in der Algebra; metrische Räume, Banachräume, Hilberträume in der Analysis; Graphen in der Kombinatorik; topologische Räume, Mannigfaltigkeiten, Varietäten, Schemata in der Geometrie. Die Grundidee hinter einer Kategorie algebraischer Strukturen ist aber immer die selbe. Eine Struktur ist definiert als eine Menge, zusammen mit mehr oder weniger komplizierten zusätzlichen Daten, die eine Liste von Eigenschaften erfüllen. Wir wollen dies am einfachen Beispiel des kommutativen Monoids illustrieren.

Definition 2.64. — Ein **kommutatives Monoid** ist ein Tripel (M, m_0, f) bestehend aus einer Menge M, einem Element $m_0 \in M$ und einer Abbildung $f : M \times M \to M$ die folgende Eigenschaften erfüllen.

1. $f(x, m_0) = f(m_0, x) = x$ für alle $x \in M$
2. $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ für alle $x, y, z \in M$
3. $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in M$

Wir nennen die Funktion f **Addition** und m_0 **neutrales Element** oder **Null**, und schreiben üblicherweise $x + y$ anstelle von $f(x, y)$ und 0 anstelle von m_0.

Beispiele für kommutative Monoiden gibt es viele. Zum Beispiel die Menge der rationalen Zahlen mit 0 als neutrales Element und der üblichen Addition bilden ein kommutatives Monoid, aber auch die Menge $M = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $m_0 = 1$ als neutrales Element und der Multiplikation $f(x, y) = xy$ als Addition. Ist X eine Menge, so bildet $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit $\varnothing$ als neutrales Element und der Vereinigung als Addition ein kommutatives Monoid. Diese Reichhaltigkeit an Beispielen motiviert, Monoiden im Allgemeinen zu studieren. Alle Eigenschaften die wir von einem allgemeinen Monoid zeigen können, und alle Folgekonstruktionen die wir zu einem allgemeinen Monoid einführen lassen sich dann auf die speziellen Beispiele anwenden.

Solche algebraischen Strukturen werden laufend neue definiert. Die nützlichsten dieser Strukturen haben etablierte Namen, und ihre Definition gehört zur mathematischen Allgemeinbildung. Andere solcher Strukturen sind vielleicht nur in einem Teilgebiet der Mathematik von Nutzen, und dementsprechend nur den Experten geläufig. Es kommt durchaus vor, dass in einem Forschungsartikel eine Struktur definiert wird die ausserhalb dieser Arbeit keine Bedeutung hat. In so einem Fall ist das Einführen einer Struktur hilfreich, wenn man sich auf ganz bestimmte Aspekte von Objekten konzentrieren will, und andere, für die Beweisführung irrelevante Aspekte dieser Objekte ausblenden möchte.

2.3.5 Relationen

Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff der Relation ein. Zwei Arten von Relationen sind besonders bedeutend: die Äquivalenzrelationen, und die Ordnungsrelationen. Äquivalenzrelationen sind oft durch eine Gleichheit in gewissen Aspekten definiert und sollten als eine lasche Form von einer Gleichheit angesehen werden. Ordnungsrelationen formalisieren die Idee der Vergleichens von Grössen.

Definition 2.65. — Seien X eine Menge. Eine **Relation** auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset X \times X$. Wir schreiben auch $x\mathcal{R}y$ falls $(x, y) \in \mathcal{R}$ und verwenden oft Symbole wie $<, \ll, \leq, \cong, \equiv, \sim$ für Relationen. Wenn $\sim$ eine Relation ist, dann schreiben wir auch „$x \not\sim y$“ für „$\neg(x \sim y)$“. Eine Relation $\sim$ heisst:

1. Reflexiv: Falls $\forall x \in X : x \sim x$.
2. Transitiv: Falls $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \implies x \sim z$.
3. Symmetrisch: Falls $\forall x, y \in X : x \sim y \implies y \sim x$.
4. Antisymmetrisch: Falls $\forall x, y \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim x)) \implies x = y$.

Eine Relation heisst **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Eine Relation heisst **Ordnungsrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Beispiel 2.66. — Das einfachste Beispiel einer Äquivalenzrelation auf einer beliebigen Menge X ist die Gleichheit, also die Relation $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$. Ein weiteres allgemeines Beispiel ist die triviale Relation $\mathcal{R} = X^2$, bezüglich der je zwei Elemente in X äquivalent sind. Wir betrachten ein interessanteres Beispiel aus der ebenen (euklidschen) Geometrie. Sei X die Menge der Geraden in der Ebene. Zu zwei Geraden G_1, G_2 schreiben wir

$$G_1 \sim G_2 \iff G_1 \text{ und } G_2 \text{ sind parallel.}$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf X. Die übliche kleiner-oder-gleich Relation $\leq$ auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist ein Beispiel für eine Ordnungsrelation. Ist X eine Menge, so können wir auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ die Ordnungsrelation $\subseteq$ betrachten. Es kann sein

dass für Teilmengen A und B von X weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$ gilt. In diesem Fall sind die Elemente A und B von $\mathcal{P}(X)$ nicht vergleichbar.

Übung 2.67. — Sei X eine Menge und sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim_A$ auf X gegeben durch

$$x \sim_A y :\iff (x, y \in A) \vee (x = y)$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 2.68. — Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir definieren eine Relation $\sim_f$ auf X durch

$$x_1 \sim_f x_2 :\iff f(x_1) = f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$. Zeigen Sie, dass $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 2.69. — Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Überprüfen Sie, dass die Relation $\equiv$ auf der Menge $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$a \equiv b \iff a - b \text{ ist teilbar durch } n$$

eine Äquivalenzrelation ist, und erstellen Sie eine Liste aller Äquivalenzklassen. Die Quotientenmenge wird üblicherweise als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ notiert, gelesen $\mathbb{Z}$ *modulo* n. Zeigen Sie dass auf der Quotientenmenge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine binäre Operation $+$ existiert, die für Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ durch

$$[a] + [b] = [a + b]$$

gegeben ist. Ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit dieser Operation und $[0]$ als neutrales Element ein kommutatives Monoid?

Übung 2.70. — In dieser Aufgabe behaupten wir fälschlicherweise, dass jede symmetrische und transitive Relation $\sim$ auf einer Menge X auch reflexiv, und damit eine Äquivalenzrelation ist. Finden Sie den Fehler in folgendem „Beweis“:

> Sei $x \in X$ ein Element. Sei $y \in X$, so dass $x \sim y$. Wegen Symmetrie der Relation gilt also auch $y \sim x$. Folglich gilt unter Verwendung der Transitivität der Relation $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \implies x \sim x$, was zu zeigen war.

Finden Sie ein Beispiel einer Relation, die symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

Übung 2.71. — Finden Sie eine Relation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die von den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (a) nur die Symmetrie, (b) nur die Transitivität, und (c) die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie erfüllt.

Definition 2.72. — Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann wird für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x genannt. Weiter heisst die Menge aller Äquivalenzklassen

$$X/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

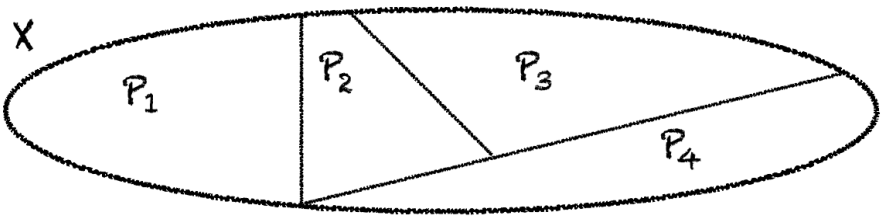
der **Quotient** oder die **Quotientenmenge** von X modulo $\sim$. Ein Element $x \in X$ wird auch **Repräsentant** seiner Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ genannt.

Anschaulich gesprochen geben wir äquivalente Elemente von X in ein und denselben Topf und nicht äquivalente Elemente in verschiedene Töpfe. In diesem Bild besteht die Äquivalenzklasse eines Elements aus allen Elementen, die im gleichen Topf sind. Der Quotient modulo $\sim$ wiederum ist die Menge der Töpfe.

Definition 2.73. — Sei X eine Menge. Eine **Partition** von X ist eine Familie $\mathcal{P}$ von nicht leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von X, so dass

$$X = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$$

gilt. Mit anderen Worten: Mengen $P \in \mathcal{P}$ sind nicht leer, und jedes Element von X ist Element von genau einem $P \in \mathcal{P}$.



Figur 2.8: Schemenhafte Darstellung einer Partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_4\}$ einer Menge X.

2.74. — Sei X eine nicht leere Menge. Äquivalenzrelationen auf X und Partitionen von X entsprechen einander im folgenden Sinne: Für eine gegebene Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ist die Menge

$$\mathcal{P} = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

eine Partition von X. Umgekehrt definiert für eine gegebene Partition $\mathcal{P}$ von X

$$x \sim y \iff \exists P \in \mathcal{P} : x \in P \wedge y \in P$$

für $x, y \in X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Des Weiteren sind die Konstruktion der Partition aus der Äquivalenzrelation und die Konstruktion der Äquivalenzrelation aus der Partition zueinander invers, wir erhalten also damit kanonische Bijektionen zwischen der Menge aller Äquivalenzrelationen auf X und der Menge aller Partitionen von X.

Applet 2.75 (Eine Äquivalenzrelation). *Links wird eine Menge X partitioniert, was einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf X entspricht. Rechts betrachten wir die Menge der Äquivalenzklassen, also den Quotienten von X bzüglich $\sim$. Die Menge links könnte eine abstrakte Menge darstellen oder den Einheitskreis. Im letzteren Fall muss klar definiert sein, zu welcher Menge die Punkte der Kanten, bei denen der Kreis unterteilt wird, gehören. Wir haben dies im Beispiel mit Farben angedeutet.*

Beispiel 2.76. — Wir konstruieren die rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen mit Hilfe einer Äquivalenzrelation. Wir nehmen an, dass wir bereits die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ mit allen üblichen Eigenschaften kennen und wollen damit die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definieren. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiert durch

$$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \iff m_1 n_2 = n_1 m_2$$

für $(m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Diese Definition rührt daher, dass wir rationale Zahlen als Brüche von ganzen Zahlen auffassen möchten. Dabei müssen wir allerdings solche identifizieren, die nach Kürzen gleich sind; zum Beispiel sollte gelten $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Allerdings wollen wir hier davon ausgehen, dass wir die rationalen Zahlen noch nicht kennen, weswegen wir anstatt Gleichungen der Form $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ Gleichungen der Form $m_1 n_2 = n_1 m_2$ mit Ausdrücken innerhalb von $\mathbb{Z}$ betrachten. Nun überprüfen wir, dass obige Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Seien dazu $(m_1, m_2), (n_1, n_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

- Reflexivität: $(m_1, m_2) \sim (m_1, m_2)$, denn $m_1 m_2 = m_1 m_2$.
- Symmetrie: Angenommen es gilt $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$. Dann ist per Definition also $m_1 n_2 = n_1 m_2$, was $n_1 m_2 = m_1 n_2$ und daher auch $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ impliziert.
- Transitivität: $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ und $(n_1, n_2) \sim (q_1, q_2)$ ergibt $m_1 n_2 = n_1 m_2$ und $n_1 q_2 = q_1 n_2$. Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit q_2 und der zweiten Gleichung mit m_2 erhalten wir

  $$m_1 n_2 q_2 = n_1 m_2 q_2 = q_1 n_2 m_2.$$

  Da n_2 nicht Null ist, können wir in obiger Gleichung n_2 wegkürzen, was eine der Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ ist, und $\mathbb{Q}$ nicht verwendet. Damit ergibt sich $m_1 q_2 = q_1 m_2$ und also $(m_1, m_2) \sim (q_1, q_2)$.

Den Quotienten $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/_\sim$ kann man nun als Definition der Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ ansehen. Für eine Äquivalenzklasse $[(m_1, m_2)]_\sim \in \mathbb{Q}$ schreibt man wie üblich $\frac{m_1}{m_2}$. Damit gilt nun die Gleichung

$$\frac{q m_1}{q m_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

für $m_1 \in \mathbb{Z}$ und $q, m_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. In der Tat bezeichnen nach Definition beide Seiten Äquivalenzklassen und die Gleichung gilt genau wenn

$$(qm_1, qm_2) \sim (m_1, m_2)$$

oder äquivalenterweise $qm_1m_2 = m_1qm_2$ erfüllt ist. Da letzteres gilt, erfüllen damit die so definierten rationalen Zahlen die üblichen Erweiterungs- und Kürzungsregeln. Des Weiteren lässt sich $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auffassen. In der Tat ist die Abbildung

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \qquad m \mapsto \frac{m}{1}$$

injektiv, denn die Gleichung $\frac{m}{1} = \frac{n}{1}$ ist für $m, n \in \mathbb{Z}$ genau dann erfüllt, wenn $m = n$ ist. Wir identifizieren $\mathbb{Z}$ mit dem Bild obiger Abbildung und schreiben insbesondere $\frac{m}{1} = m$ für $m \in \mathbb{Z}$.

2.77. — Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Häufig will man eine Funktion auf $X/_\sim$ unter Verwendung der Elemente von X, also der Repräsentanten der Äquivalenzklassen, definieren. Zum Beispiel möchten wir in obigem Beispiel in der Lage sein, zusätzliche Abbildungen $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ zu definieren nämlich die Addition und die Multiplikation. Wenn Y eine weitere Menge und $f : X \to Y$ eine Funktion ist, wollen wir möglicherweise durch $[x]_\sim \mapsto f(x)$ eine Funktion

$$\bar{f} : X/_\sim \to Y$$

definieren. Dies ist aber nur dann sinnvoll, wenn $x_1 \sim x_2$ für $x_1, x_2 \in X$ auch $f(x_1) = f(x_2)$ impliziert. In diesem Fall ist $\bar{f}([x]_\sim)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten x der Äquivalenzklasse $[x]_\sim$. Also definiert dies in der Tat eine Funktion $\bar{f}$, die jedem Element $[x]_\sim$ des Definitionsbereichs $X/_\sim$ das eindeutig bestimmte Element $\bar{f}([x]_\sim)$ zuordnet. Zur Betonung dieser Eigenschaft sagen wir in diesem Fall, dass $\bar{f}$ **wohldefiniert** ist.

Übung 2.78. — Wir definieren nun zusätzliche Strukturen auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \mapsto \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

und

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \mapsto \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

wohldefiniert sind. Überprüfen Sie des Weiteren die Rechenregeln

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1, \quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

für $m, n, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Sie dürfen in dieser Aufgabe zwar alle üblichen Rechenregeln und Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ verwenden, aber nicht jene von $\mathbb{Q}$, da wir letztere ja definieren wollen.

2.3.6 Mächtigkeit

Wir besprechen nun einen fundamentalen Begriff der Mengenlehre, den man sich intuitiv als Grössenvergleich von Mengen vorstellen sollte.

Definition 2.79. — Seien X und Y zwei Mengen. Wir sagen dass X und Y **gleichmächtig** sind, geschrieben $X \sim Y$, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt. Wir sagen dass Y **mächtiger** als X ist, und schreiben $X \lesssim Y$, falls es eine Injektion $f : X \to Y$ gibt. Wir sagen in dem Fall auch X sei **schmächtiger** als Y.

2.80. — Sei $\mathcal{X}$ eine Familie von Mengen. Der Begriff der Gleichmächtigkeit erfüllt auf $\mathcal{X}$ die Reflexivität, die Symmetrie und auch die Transitivität. Also definiert Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{X}$. Die Eigenschaften der Relation „ist mächtiger als“ sind weniger klar. Endliche Mengen $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ bestehend aus m beziehungsweise n Elementen sind genau dann gleichmächtig, wenn $m = n$ gilt, und Y ist mächtiger als X genau dann wenn $m \geq n$ gilt. Letztere Aussage können wir nicht streng beweisen, da wir nicht wirklich definiert haben was natürliche Zahlen sind. Der Begriff der Mächtigkeit ist aber vor allem für Mengen mit unendlich vielen Elementen interessant. Grund dafür ist, dass es verschieden grosse unendliche Mengen gibt, wie der folgende Satz von Cantor bestätigt.

Übung 2.81. — Sei $\mathcal{X}$ eine Familie von Mengen. Zeigen Sie im Detail, dass Gleichmächtigkeit „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{X}$ ist. Untersuchen Sie anschliessend die Relation $\lesssim$ auf $\mathcal{X}/_\sim$ auf ihre Eigenschaften. Wie hilft der Satz 2.86 weiter?

Satz 2.82 (Cantors Diagonalargument). — *Sei X eine Menge. Dann ist ist die $\mathcal{P}(X)$ mächtiger als X und nicht gleichmächtig zu X.*

Beweis. Die Funktion $i : X \to \mathcal{P}(X)$ gegeben durch $i(x) = \{x\}$ ist injektiv. Also ist $\mathcal{P}(X)$ mächtiger als X. Es bleibt zu zeigen dass es keine Bijektion von X nach $\mathcal{P}(X)$ gibt. Um dies zu zeigen nehmen wir an, dass es doch eine Bijektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$ gibt und führen dies zu einem Widerspruch. Dazu definieren wir die Menge

$$A = \{x \in X \; x \notin f(x)\}$$

aller Elemente x in X, für die x kein Element der Teilmenge $f(x) \subset X$ ist. Da nach Annahme $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine Bijektion ist und per Definition $A \in \mathcal{P}(X)$ ist, muss es ein $a \in X$ geben, so dass $A = f(a)$. Daraus folgt gemeinsam mit der Definition von A, dass

$$a \in A \iff a \notin f(a) \iff a \notin A$$

Dies ist aber absurd und daher existiert kein $a \in X$ mit $f(a) = A$. Dies ist ein Widerspruch zur Surjektivität von f; also kann es keine Bijektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$ geben. $\square$

Übung 2.83. — Sei n eine natürliche Zahl und sei X eine Menge mit genau n verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ gilt. Verwenden Sie dazu vollständige Induktion und schliessen Sie daraus Satz 2.82 für den Fall, dass X eine endliche Menge ist.

Übung 2.84. — Sei X eine Menge und sei Y die Menge der Funktionen $X \to \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass Y und $\mathcal{P}(X)$ gleichmächtig sind.

Übung 2.85. — Betrachten Sie den Spezialfall $X = \mathbb{N}$ in Theorem 2.82 und nehmen Sie an, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$, also $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ für Teilmengen $A_n \subset \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl n. Für jedes solche n lässt sich die Menge A_n als die Folge in $0, 1$ auffassen, für welche das m-te Glied genau dann 1 ist, wenn $m \in A_n$. Wir schreiben nun die Folgen in eine Tabelle der Art

$$\begin{array}{cccccccc} A_1 & \leftrightarrow & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\ A_2 & \leftrightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ A_3 & \leftrightarrow & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ A_4 & \leftrightarrow & 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

wobei die n-te Zeile der Menge A_n entspricht. Dann lässt sich mit Hilfe der Diagonalen eine Folge konstruieren, deren zugehörige Menge nicht in der Liste $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ist. Wie? Was hat das mit dem Beweis von Theorem 2.82 zu tun?

Satz 2.86 (Cantor, Schröder, Bernstein). — *Seien X und Y Mengen, so dass $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim X$. Dann gilt $X \sim Y$.*

Der Satz wurde 1887 von Cantor formuliert und von Dedekind unter Verwendung des Auswahlaxioms, das wir im nächsten Abschnitt besprechen, im selben Jahr bewiesen. Dem 19-jährigen Studenten Bernstein gelang es schliesslich einen Beweis der Aussage zu liefern ohne das Auswahlaxiom zu benutzen.

Beweis von Satz 2.86. Seien X, Y zwei Mengen mit $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim X$ wie in Satz 2.86. Dann gibt es injektive Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$. Wir definieren

$$X_1 = X, \quad Y_1 = g(Y), \quad X_2 = g \circ f(X).$$

Dann gelten die Inklusionen $X_1 \supset Y_1 \supset X_2$ und die Funktion $h : X_1 \to X_2$ gegeben durch $h(x) = g(f(x))$ ist eine Bijektion. Wir behaupten nun, dass es eine Bijektion $F : X_1 \to Y_1$ gibt. Dies impliziert das Theorem, denn es gilt dann $X = X_1 \sim Y_1 = g(Y) \sim Y$.

Zum Beweis der Behauptung betrachten wir drei beliebige ineinandergeschachtelte Mengen $X_1 \supset Y_1 \supset X_2$ und nehmen an, dass es eine Bijektion $h : X_1 \to X_2$ gibt. Wir wollen daraus schliessen, dass $X_1 \sim Y_1$ gilt. Wir definieren dazu $Y_2 = h(Y_1)$, $X_3 = h(X_2) = h^2(X_1)$ und allgemeiner für eine natürliche Zahl n

$$Y_{n+1} = h^n(Y_1), \quad X_{n+1} = h^{\circ n}(X_1).$$

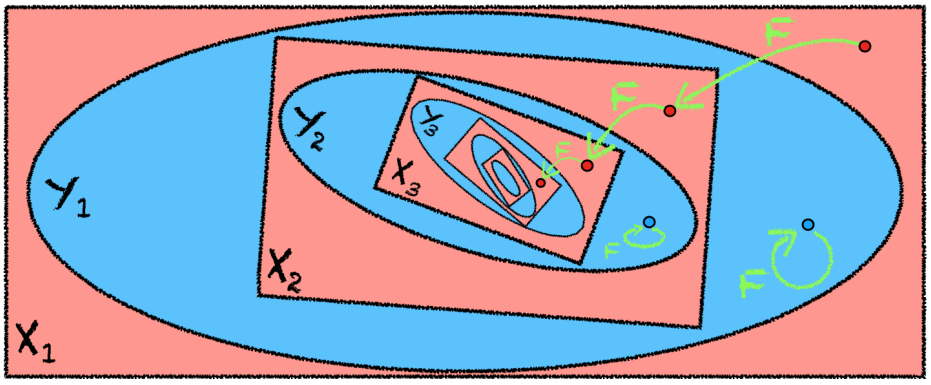
Wir zeigen nun mittels vollständiger Induktion, dass

$$X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset Y_2 \supset \dots \tag{2.2}$$

gilt. Für $X_1 \supset Y_1 \supset X_2$ ist dies Voraussetzung; der Induktionsanfang ist also erledigt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $X_1 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_{n-1} \supset X_n$ für $n \geq 2$ schon bewiesen ist. Wenden wir auf $X_{n-1} \supset Y_{n-1} \supset X_n$ die Abbildung h an, so erhalten wir

$$h(X_{n-1}) = X_n \supset h(Y_{n-1}) = Y_n \supset h(X_n) = X_{n+1}$$

womit (2.2) mittels vollständiger Induktion gezeigt ist.



Wir betrachten die Mengen $B_n = X_n \setminus Y_n$ und $K_n = Y_n \setminus X_{n+1}$ für jede natürliche Zahl n. Wegen (2.2) sind die Mengen $B_1, K_1, B_2, K_2, \dots$ paarweise disjunkt. Da h injektiv ist, gilt

$$h(B_n) = h(X_n \setminus Y_n) = h(X_n) \setminus h(Y_n) = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} = B_{n+1} \tag{2.3}$$

für alle natürlichen Zahlen n nach Übung 2.61. Schlussendlich definieren wir

$$K_\infty = X_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cup K_n),$$

womit $B_1, B_2, \dots$ und $K_1, K_2, \dots$ gemeinsam mit K_∞ eine Partition $\mathcal{P}$ von X_1 definieren. Für jedes Element x von X_1 gilt also genau eine der folgenden Aussagen

1. $x \in B_n$ für ein eindeutig bestimmtes $n \geq 1$,
2. $x \in K_n$ für ein eindeutig bestimmtes $n \geq 1$,
3. $x \in K_\infty$.

Wir definieren wir nun die Funktion $F : X_1 \to Y_1$ durch

$$F(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } x \in B_n \text{ für ein } n \geq 1, \\ x & \text{falls } x \in K_n \text{ für ein } n \geq 1 \text{ oder } x \in K_\infty \end{cases}$$

für alle $x \in X_1$. Es bleibt noch zu zeigen, dass F bijektiv ist.

Zur Surjektivität: Per Definition ist $K_\infty = F(K_\infty) \subset F(X_1)$ und $K_n = F(K_n) \subset F(X_1)$ für alle n. Weiter gilt nach Gleichung (2.3) auch $B_{n+1} = h(B_n) = F(B_n) \subset F(X_1)$ für alle n und damit ist ebenso $Y_1 = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\infty \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup \ldots \subset F(X_1)$. Das zeigt, dass F surjektiv ist.

Zur Injektivität: Seien $x, y \in X_1$ mit $F(x) = F(y)$. Da in der Liste $F(K_1)$, $F(K_2)$, $\ldots$, $F(K_\infty)$, $F(B_1)$, $F(B_2)$, $\ldots$ die Mengen paarweise disjunkt sind, müssen x und y in der gleichen Menge der Partition $\mathcal{P}$ liegen. Falls jene Menge K_∞ oder K_n für ein n ist, so gilt $x = y$. Ansonsten ist $h(x) = F(x) = F(y) = h(y)$ und die Gleichheit $x = y$ folgt aus der Injektivität von h. □

Applet 2.87 (Beweis des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Im Beweis von Theorem 2.86 wird die Menge X in zwei Typen von Teilmengen zerlegt. Die konstruierte Funktion wird angedeutet, indem Bild (und Urbilder) von einem bewegbaren Punkt $x \in X$ eingezeichnet werden.*

2.88. — Die **Kardinalität** einer Menge X ist die Äquivalenzklasse von X bezüglich der Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit. Diese Definition ist so allerdings problematisch, da es nicht eine Menge aller Mengen gibt, worauf die Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit definiert wäre. Wir begnügen uns deshalb damit, einige Kardinalitäten explizit zu definieren.

Definition 2.89. — Wir sagen, dass die Kardinalität der leeren Menge Null ist, und schreiben $|\varnothing| = 0$. Sei X eine Menge und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir sagen die Menge X habe Kardinalität n, und schreiben $|X| = n$, falls X gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ ist. In diesem Fall nennen wir X eine **endliche Menge** und schreiben $|X| < \infty$. Ist X nicht endlich, so nennen wir X eine **unendliche Menge**. Eine Menge heisst **abzählbar unendlich**, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ wird auch $\aleph_0$, gesprochen **Aleph-0**, genannt. Eine Menge X heisst **überabzählbar**, falls sie unendlich und nicht abzählbar ist. Die Kardinalität von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wird auch mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet und das **Kontinuum** genannt.

Übung 2.90. — Sei X eine endliche Menge und $f : X \to X$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt mit $f^n = \mathrm{id}_X$.

Übung 2.91. — Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. Sie können hierzu Satz 2.86 verwenden: Eine Injektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ finden Sie unter Verwendung der Tatsache, dass unendlich viele Primzahlen existieren. Alternativ lässt sich mit Hilfe eines Bildes tatsächlich eine explizite Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finden. Zeigen Sie auch, dass das Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist.

2.3.7 Das Auswahlaxiom und das Zorn'sche Lemma

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Es existiert also für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ so dass $f(x) = y$ gilt, das heisst, für jedes $y \in Y$ ist die Menge

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

nicht leer. Das Auswahlaxiom garantiert, dass wir simultan für jedes Element $y \in Y$ ein Element $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ auswählen können. Mit anderen Worten: Es gibt eine Funktion $g : Y \to X$ so dass

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gilt. Das mag intuitiv plausibel erscheinen, kann aber erwiesenermassen nicht aus den Axiomen der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre abgeleitet werden. Man fügt das Auswahlaxiom deshalb als zusätzliches Postulat zu den Axiomen hinzu, um die bereits am Anfang von Abschnitt 2.3.1 erwähnte ZFC-Mengenlehre zu erhalten.

Auswahlaxiom (Variante 1)**:** *Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine surjektive Funktion. Dann existiert eine Funktion $g : Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Die Funktion g in dieser Variante des Auswahlaxioms nennt man einen **Schnitt** von f. Eine oft benutzte Variante des Auswahlaxioms ist folgende:

Auswahlaxiom (Variante 2)**:** *Sei Y eine Menge, und $\mathcal{X}$ eine Familie von nichtleeren Teilmengen von Y. Dann gibt es eine Funktion $\alpha : \mathcal{X} \to Y$ mit der Eigenschaft dass $\alpha(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt.*

Die Funktion α in dieser Variante nennt man **Auswahlfunktion**, da sie der Auswahl eines Elementes $\alpha(X)$ in jeder der nichtleeren Mengen $X \in \mathcal{X}$ gleichkommt. Eine weitere Variante ist:

Auswahlaxiom (Variante 3)**:** *Sei $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Dann ist das Produkt*

$$\prod_{i \in I} X_i$$

nicht leer.

Übung 2.92. — Überzeugen Sie sich, oder noch besser einen Mitstudenten, dass die drei Varianten des Auswahlaxioms tatsächlich alle äquivalent sind.

Eine weitere Variante des Auswahlaxioms ist das sogenannte *Zorn'sche Lemma*, benannt nach Max Zorn (1906–1993). Das Zorn'sche Lemma, nachfolgend Satz 2.97 ist eine Aussage über gewisse geordnete Mengen, und es ist überhaupt nicht klar dass diese Aussage äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Wir werden im Folgenden das Auswahlaxiom als eine wahre Aussage annehmen, und daraus das Zorn'sche Lemma ableiten.

Definition 2.93. — Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $x \in X$ heisst **maximal** falls für alle $y \in X$ gilt: $x \leq y \implies x = y$. Ein Element $m \in X$, so dass $x \leq m$ für alle $x \in X$ gilt, dann heisst $m \in X$ **Maximum** von X.

Definition 2.94. — Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in X$ heisst **obere Schranke** von A falls $a \leq x$ für alle $a \in A$ gilt. Ein Element $x \in X$ heisst **untere Schranke** von A falls $x \leq a$ für alle $a \in A$ gilt.

Übung 2.95. — Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Überzeugen Sie sich davon dass X höchstens ein Maximum haben kann. Finden Sie Beispiele für folgende Situationen, oder zeigen Sie dass das nicht möglich ist:

1. Die geordnete Menge X besitzt kein Maximum, und auch keine maximalen Elemente.
2. Die geordnete Menge X besitzt genau ein maximales Element, aber kein Maximum.

Definition 2.96. — Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heisst **Kette**, falls für alle $x, y \in K$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Wir sagen $(X, \leq)$ sei **induktiv** geordnet, falls jede Kette in X eine obere Schranke besitzt.

Man bemerke: Die leere Menge $\varnothing \subseteq X$ ist eine Kette. Ist $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge, so hat $\varnothing$ eine obere Schranke, und also ist insbesondere X nicht leer. Jede endliche nichtleere geordnete Menge ist induktiv, da eine endliche Kette stets ein maximales Element enthält, das dann auch eine obere Schranke für diese Kette ist.

Satz 2.97 (Zorn's Lemma). — *Sei $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge. Dann existiert ein maximles Element in X.*

Eine eng mit Zorn's Lemma verwandte Aussage ist das Hausdorff'sche Maximumsprinzip, nachstehender Satz 2.98, so benannt nach Felix Hausdorff (1868–1942). Wir leiten das Zorn'sche Lemma von diesem Satz ab.

Satz 2.98 (Hausdorff'sches Maximumsprinzip). — *Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Dann existiert eine maximale Kette in X. Das heisst, es existiert eine Kette $M \subseteq X$, so dass*

$$M \subseteq L \implies M = L$$

für jede Kette $L \subseteq X$ gilt.

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{X}$ die Menge aller Ketten in X. Wir Ordnen die Menge $\mathcal{X}$ durch die Inklusion. Sei K ein Element von $\mathcal{X}$, das heisst, eine Kette in X. Ist K nicht maximal, dann existiert eine Kette K' mit $K \subsetneq K'$ und ein Element $x_K \in K' \setminus K$. Wir wählen so ein Element

x_K für jede nichtmaximale Kette $K \in \mathcal{X}$ und definieren

$$K^+ = \begin{cases} K \cup \{x_K\} \text{ falls } K \text{ nicht maximal ist} \\ K \text{ falls } K \text{ maximal ist.} \end{cases}$$

Hier haben wir das Auswahlaxiom benutzt. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass es eine Kette $K \in \mathcal{X}$ gibt die $K = K^+$ erfüllt. Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ eine Kette, so schreiben wir

$$\overline{\mathcal{K}} := \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \tag{2.4}$$

für die Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{K}$. Wir bemerken dass $\overline{\mathcal{K}}$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$ ist: es gilt $K \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ für alle $K \in \mathcal{K}$.

Wir nennen eine Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{X}$ *abgeschlossen*, falls sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.

(A1) $K \in \mathcal{N} \implies K^+ \in \mathcal{N}$

(A2) Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$ eine Kette, so gilt $\overline{\mathcal{K}} \in \mathcal{N}$

Abgeschlossene Mengen sind nicht leer, da wir (A2) insbesondere für $\mathcal{K} = \varnothing$ verlangen. Wir beobachten auch, dass der Durchschnitt einer beliebigen Familie von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{X}$ wiederum abgeschlossen ist. Insbesondere ist der Durchschnitt *aller* abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{X}$

$$\mathcal{M} = \bigcap \{\mathcal{N} \mid \mathcal{N} \subseteq \mathcal{X} \text{ ist abgeschlossen}\}$$

abgeschlossen. Diese Menge $\mathcal{M}$ ist eine minimale abgeschlossene Menge in $\mathcal{X}$: Für jede Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$ gilt

$$(\mathcal{N} \text{ abgeschlossen}) \wedge (\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}) \implies \mathcal{N} = \mathcal{M}. \tag{2.5}$$

Der essentielle Teil des Beweises besteht nun darin folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung: *Die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ ist eine Kette.*

Wir müssen zeigen, dass zwei beliebige Elemente K und L von $\mathcal{M}$ miteinander vergleichbar sind, das heisst, dass $K \subseteq L$ oder $L \subseteq K$ gilt. Wir führen dazu die Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ ein, bestehend aus all denjenigen $K \in \mathcal{M}$ die mit allen anderen $L \in \mathcal{M}$ vergleichbar sind.

$$\mathcal{V} = \{K \in \mathcal{M} \mid \forall L \in \mathcal{M} : (L \subseteq K) \vee (K \subseteq L)\}$$

Die Behauptung dass $\mathcal{M}$ eine Kette ist ist gleichbedeutend mit der Behauptung dass $\mathcal{V} = \mathcal{M}$ gilt. Wir zeigen zwei Eigenschaften der Menge $\mathcal{V}$.

Lemma 2.99. — *Für alle $K \in \mathcal{V}$ und $L \in \mathcal{M}$ gilt $(L \subsetneq K) \implies (L^+ \subseteq K)$.*

Beweis. Da K mit allen Elementen aus $\mathcal{M}$, und insbesondere mit L^+ vergleichbar ist, gilt $L^+ \subseteq K$ oder $K \subsetneq L^+$. In letzterem Fall erhalten wir strikte Inklusionen

$$L \subsetneq K \subsetneq L^+$$

was im Widerspruch dazu steht, dass L^+ höchstens ein Element mehr besitzt als L. □

Lemma 2.100. — *Für alle $K \in \mathcal{V}$ und $L \in \mathcal{M}$ gilt $L \subseteq K$ oder $K^+ \subseteq L$.*

Beweis. Wir legen ein beliebiges $K \in \mathcal{V}$ fest, und betrachten die Teilmenge

$$\mathcal{N} := \{L \in \mathcal{M} \mid L \subseteq K \text{ oder } K^+ \subseteq L\}$$

von $\mathcal{M}$. Unser Ziel ist es die Gleichheit $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ zu zeigen. Aufgrund von (2.5) genügt es zu zeigen dass $\mathcal{N}$ abgeschlossen ist. Um nachzuweisen dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A1) erfüllt, wählen wir $L \in \mathcal{N}$. Es gilt $L \subsetneq K$ oder $L = K$ oder $K^+ \subseteq L$. Falls $L \subsetneq K$ gilt, so folgern wir aus Lemma 2.99 $L^+ \subseteq K$ und also $L^+ \in \mathcal{N}$. Falls $L = K$ oder $K^+ \subseteq L$ gilt, dann gilt auch $K^+ \subseteq L^+$ und also $L^+ \in \mathcal{N}$. Damit ist gezeigt dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A1) erfüllt. Um nachzuweisen dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt, wählen wir eine Kette $\mathcal{C}$ in $\mathcal{N}$. Da $\mathcal{C}$ auch eine Kette in $\mathcal{M}$ ist und $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, gilt $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}$. Falls $C \subseteq K$ für jedes $C \in \mathcal{C}$ gilt, so gilt $\overline{\mathcal{C}} \subseteq K$ und damit $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{N}$. Andernfalls gibt es ein $C \in \mathcal{C}$ mit $C \not\subseteq K$, also $K^+ \subseteq C$ und folglich $K^+ \subseteq \overline{\mathcal{C}}$ und damit $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{N}$. Damit ist gezeigt dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt. □

Wir kommen zurück zum Beweis der oben aufgestellten Behauptung. Wie wir bereits erklärt haben ist diese Behauptung gleichbedeutend mit der Aussage, dass $\mathcal{V} = \mathcal{M}$ gilt. Da $\mathcal{V}$ eine Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist, genügt es aufgrund von (2.5) zu zeigen, dass $\mathcal{V}$ abgeschlossen ist. Um nachzuweisen dass $\mathcal{V}$ die Eigenschaft (A1) erfüllt, wählen wir $K \in \mathcal{V}$. Für jedes $L \in \mathcal{M}$ gilt aufgrund von Lemma 2.100 $L \subseteq K \subseteq K^+$ oder $K^+ \subseteq L$. Also gilt $K^+ \in \mathcal{V}$, und $\mathcal{V}$ erfüllt (A1). Um nachzuweisen dass $\mathcal{V}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt, wählen wir eine Kette $\mathcal{C}$ in $\mathcal{V}$. Sei $K \in \mathcal{M}$. Falls $C \subseteq K$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt, so gilt $\overline{\mathcal{C}} \subseteq K$. Falls nicht, so gibt es ein $C \in \mathcal{C}$ mit $K \subseteq C$ und also $K \subseteq \overline{\mathcal{C}}$. In jedem Fall ist $\overline{\mathcal{C}}$ mit K vergleichbar, und da $K \in \mathcal{M}$ beliebig war, gilt $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{V}$. Damit ist gezeigt dass $\mathcal{V}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt, und die Behauptung ist bewiesen.

Die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ ist also eine Kette, und auch abgeschlossen. Wir schreiben $M = \overline{\mathcal{M}}$. Da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist gilt $M \in \mathcal{M}$ aufgrund von (A2), und hernach $M^+ \in \mathcal{M}$ aufgrund von (A1). Der Definition (2.4) zufolge gilt $K \subseteq M$ für alle $K \in \mathcal{M}$, und also insbesondere $M^+ \subseteq M$. Wir folgern dass $M = M^+$ gilt, das heisst, M ist eine maximale Kette in X. □

Beweis von Zorn's Lemma. Sei $(X, \leq)$ induktiv geordnet. Wir müssen zeigen dass ein maximales Element in X existiert. Aufgrund von Satz 2.98 (Hausdorff'sches Maximumsprinzip) existiert eine maximale Kette M in X. Da X nach Voraussetzung induktiv geordnet ist, gibt es eine obere Schranke x von M. Wir legen so eine maximale Kette M und eine obere Schranke

x fest, und behaupten dass x ein maximales Element in X ist. Sei also $y \in X$ und $x \leq y$. Wir müssen zeigen dass $x = y$ gilt. Da x eine obere Schranke für M ist gilt $m \leq x \leq y$ für alle $m \in M$. Daraus folgt, dass $M \cup \{y\}$ eine Kette ist. Weil aber M eine maximale Kette ist, gilt $M = M \cup \{y\}$, das bedeutet, $y \in M$ und also $y \leq x$. Es folgt $x = y$. $\square$

Kapitel 3

Die reellen Zahlen

3.1 Die Axiome der reellen Zahlen

3.1.1 Angeordnete Körper

Wir kennen aus der Linearen Algebra den Begriff des **Körpers**, und werden diesen hier ohne weitere Erklärung verwenden. Wir schreiben $K^\times = K \setminus \{0\}$ für die Menge der in K inversiblen Elemente.

Definition 3.1. — Sei K ein Körper, und sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf der Menge K. Wir nennen $(K, \leq)$, oder kurz K, einen **angeordneten Körper** falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Linearität der Ordnung: Für alle $x, y \in K$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.
2. Kompatibilität von Ordnung und Addition: Für alle $x, y, z \in K$ gilt
$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$
3. Kompatibilität von Ordnung und Multiplikation: Für alle $x, y \in K$ gilt
$$(x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \implies x \cdot y \geq 0$$

3.2. — Wie wir das bereits für geordnete Mengen getan haben, sprechen wir $x \leq y$ als „x ist **kleiner gleich** y“ aus. Wir definieren für $x, y \in K$ auch $y \geq x$ durch $x \leq y$ und sprechen dies als „y ist **grösser gleich** x“ aus. Weiter definieren wir $x < y$ (ausgesprochen als „x ist **kleiner** als y“ oder „x ist **strikt kleiner** als y“) durch $x \leq y \wedge x \neq y$. Natürlich definieren wir $x > y$ durch $y < x$ und sagen „x ist **grösser** als y“ oder „x ist **strikt grösser** als y“. Wir verwenden diese Symbole oft auch in „gleich gerichteten Ketten“; beispielsweise steht $x \leq y < z = a$ für $x \leq y \wedge y < z \wedge z = a$. Ein Element $x \in K$ ist **positiv**, falls $x > 0$ gilt, und **negativ**, falls $x < 0$ gilt. Des Weiteren sagen wir ein Element $x \in K$ ist **nichtnegativ** falls $x \geq 0$, beziehungsweise **nichtpositiv** falls $x \leq 0$.

3.3. — Wenn es uns jetzt nicht gerade darum ginge den Körper der reellen Zahlen zu definieren, so könnten jetzt die reellen Zahlen mit der üblichen Ordnung als Beispiel für einen angeordneten Körper aufführen. Ein anderes wohlbekanntes Beispiel eines angeordneten Körpers sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, zusammen mit der üblichen Ordnungsrelation die durch

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \quad \Longleftrightarrow \quad pq' \leq p'q$$

gegeben ist. Hier steht rechterhand die Ordnung auf den Ganzen Zahlen, die wir als bekannt voraussetzen. Viele aus den Beispielen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ bekannte Eigenschaften gelten allgemein für angeordnete Körper. Wir wollen eine Liste solcher Eigenschaften angeben.

3.4. — Im Folgenden sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, und x, y, z, w bezeichnen Elemente aus K.

(a) (Trichotomie) *Es gilt entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.* Das folgt direkt aus der Linearität der Ordnungsrelation $\leq$.

(b) *Falls $x < y$ und $y \leq z$ ist, dann gilt auch $x < z$.* Wir haben $x \leq z$ nach der Transitivität der Odnungsrelation, und falls $x = z$ wäre, dann wäre $y \leq x$ und daher $x = y$ nach der Antisymmetrie und der Voraussetzung $x \leq y$, was aber der Annahme widerspricht. Analog sieht man, dass $x \leq y$ und $y < z$ für $x, y, z \in K$ auch $x < z$ impliziert.

(c) (Addition von Ungleichungen) *Gilt $x \leq y$ und $z \leq w$, dann gilt auch $x + z \leq y + w$.* In der Tat, $x \leq y$ impliziert $x + z \leq y + z$ nach der additiven Kompatibilität in Definition 3.1 und $z \leq w$ impliziert $y + z \leq y + w$ aus dem selben Grund. Transitivität der Ordnungsrelation impliziert $x + z \leq y + w$. Analog sieht man, unter Verwendung von Folgerung (b), dass aus $x < y$ und $z \leq w$ auch $x + z < y + w$ folgt.

(d) *Es gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $0 \leq y - x$ gilt.* Dies folgt wiederum aus der additiven Kompatibilität in Definition 3.1 durch Subtraktion resp. Addition von x.

(e) *Es gilt $x \leq 0 \iff 0 \leq -x$.* Dies folgt aus (d) mit $y = 0$.

(f) *Es gilt $x^2 \geq 0$, und $x^2 > 0$, falls $x \neq 0$.* Falls $x \geq 0$ ist, so folgt die erste Aussage aus der multiplikativen Kompatibilität in Definition 3.1. Falls $x \leq 0$ ist, dann ist $-x \geq 0$ nach Folgerung (e) und damit $x^2 = (-x)^2 \geq 0$. Falls $x^2 = 0$ ist, dann gilt $x = 0$ da K ein Körper ist, und die zweite Aussage folgt.

(g) *Es gilt $0 < 1$.* Denn $1 = 1^2 \geq 0$ nach Folgerung (f) und $1 \neq 0$.

(h) *Falls $0 \leq x$ und $y \leq z$, dann gilt $xy \leq xz$.* Denn unter Verwendung von Folgerung (d), wonach $z - y \geq 0$, und der multiplikativen Kompatibilität in Definition 3.1 gilt $xz - xy = x(z - y) \geq 0$ und damit folgt die Aussage wiederum aus Folgerung (d).

(i) *Falls* $x \leq 0$ *und* $y \leq z$*, dann gilt* $xy \geq xz$. In der Tat ist $-x \geq 0$ nach Folgerung (e), $z - y \geq 0$ nach Folgerung (d) und somit

$$xy - xz = x(y - z) = (-x)(-(y - z)) = (-x)(z - y) \geq 0$$

nach der multiplikativen Kompatibilität in Definition 3.1

(j) *Aus* $0 < x \leq y$ *folgt* $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$. Wir behaupten zuerst, dass $x^{-1} > 0$ ($y^{-1} > 0$ folgt analog). Denn falls nicht, dann wäre wegen $x^{-1} \neq 0$ und der Trichotomie in Folgerung (a) $x^{-1} < 0$. Demnach würde $1 = xx^{-1} < 0$ nach Folgerung (h) gelten, was (g) widerspricht. Insbesondere ist $x^{-1}y^{-1} > 0$ und es gilt

$$y^{-1} = xx^{-1}y^{-1} \leq yx^{-1}y^{-1} = x^{-1}.$$

(k) *Aus* $0 \leq x \leq y$ *und* $0 \leq z \leq w$ *folgt* $0 \leq xz \leq yw$. Siehe Übung 3.5.

(l) *Aus* $x + y \leq x + z$ *folgt* $y \leq z$. Siehe Übung 3.5.

(m) *Aus* $xy \leq xz$ *und* $x > 0$ *folgt* $y \leq z$. Siehe Übung 3.5.

Übung 3.5. — Beweisen Sie die Folgerungen (k),(l),(m). Was geschieht in (m), wenn man die Bedingung $x > 0$ fallen lässt, das heisst, wenn $x < 0$ oder $x = 0$? Formulieren Sie für einige der obigen Folgerungen ähnliche Versionen für die strikte Relation „$<$“ und beweisen Sie diese.

3.6. — Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Wie schreiben wie üblich $2, 3, 4, \ldots$ für die Elemente von K die durch $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ et cetera gegeben sind. Aufgrund der Kompatibilität von $+$ und $\leq$ in Definition 3.1 und (e) gelten die Ungleichungen

$$\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 3 < 4 < \ldots$$

in K. Insbesondere sind also die Elemente $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ von K alle verschieden. Wir erlauben uns, die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen dadurch mit einer Teilmenge von K zu identifizieren. Das heisst, wir nennen die Elemente $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ von K „ganze Zahlen“. Dementsprechend nennen wir Elemente $\{pq^{-1} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ in K auch rationale Zahlen, und identifizieren somit $\mathbb{Q}$ mit einem Teilkörper von K.

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq K$$

Obige Axiome, Folgerungen und Aussagen in den Übungen stellen die üblichen Eigenschaften für Ungleichungen dar. Mit Hilfe dieser können wir auch Aufgaben wie in folgender Übung lösen.

Übung 3.7. — Zeigen Sie, dass

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x + \tfrac{3}{x} + 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid -3 \leq x \leq -1 \vee x > 0\}$$

Übung 3.8. — Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt die K zu einem angeordneten Körper machen würde.

Übung 3.9. — Sei K ein Körper. Angenommen es gibt ein Element $u \in K$ mit der Eigenschaft $u^2 + 1 = 0$. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt die K zu einem angeordneten Körper machen würde.

Übung 3.10. — Sei K ein Körper. Ein **Positivkegel** in K ist eine Teilmenge $P \subseteq K$ die folgendenden Bedingungen genügt:

1. Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$ und $xy \in P$.
2. Für alle $x \in K$ gilt $x \in P$ oder $-x \in P$.
3. $-1 \notin P$

Zeigen Sie, dass es genau eine Ordnungsrelation $\leq$ auf K gibt die K zu einem angeordneten Körper macht, und so dass $P = \{x \in K \mid x \geq 0\}$ gilt.

Übung 3.11 (Challenge). — Ein Körper K heisst **formal reell** falls für alle $x_1, \dots x_n \in K$ gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Falls es auf K eine Ordnung gibt die K zu einem angeordneten Körper macht, dann ist K formal reell - das können Sie als kleine Verallgemeinerung der Aufgabe 3.9 nachprüfen. Zeigen Sie die reziproke Implikation:

Satz: *Sei K ein formal reeller Körper. Dann existiert eine Ordnungsrelation $\leq$ auf K die K zu einem angeordneten Körper macht.*

Hinweis: Welche der Eigenschaften eines Positivkegels erfüllt die Teilmenge $\Sigma \subseteq K$ all derjenigen Elemenente die man als Summe von Quadraten schreiben kann? Formalisieren Sie, und wenden Sie das Zorn'sche Lemma auf derartige Teilmengen an.

Definition 3.12. — Sei $K(, \leq)$ ein angeordneter Körper. Der **Absolutbetrag** auf K ist die Funktion $|\cdot| : K \to K$ die durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

für alle $x \in K$ definiert ist. Das **Signum** ist die Funktion $\operatorname{sgn} : K \to \{-1, 0, 1\}$ dir durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für alle $x \in K$ definiert ist.

3.13. — Im Folgenden sei $(K, \leq)$ stets ein angeordneter Körper, und x, y, z, w bezeichnen Elemente aus K.

(a) Es gilt $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$, sowie $|-x| = |x|$ und $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$.

(b) *Es gilt* $|x| \geq 0$*, und* $|x| = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$. Dies folgt aus der Trichotomieeigenschaft.

(c) (Multiplikativität) *Es gilt* $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$ *und* $|xy| = |x||y|$. Überprüfen Sie dies in den insgesamt vier Fällen, je nachdem, ob x, y negativ sind oder nicht.

(d) *Ist* $x \neq 0$*, so gilt* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$. Dies folgt aus (c) wegen $|x^{-1}||x| = 1$.

(e) $|x| \leq y$ *äquivalent zu* $-y \leq x \leq y$. Denn angenommen $|x| \leq y$. Falls $x \geq 0$ dann gilt $-y \leq 0 \leq x = |x| \leq y$. Falls $x < 0$, dann ist $-y \leq -|x| = x < 0 \leq y$ und damit wiederum $-y \leq x \leq y$. Für die Umkehrung bemerken wir, dass $-y \leq x \leq y$ auch $-y \leq -x \leq y$ und somit in jedem Fall $|x| \leq y$ impliziert.

(f) $|x| < y$ *ist äquivalent zu* $-y < x < y$. Das zeigt man so wie auch (e).

(g) (Dreiecksungleichung) *Es gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Diese Ungleichung wird **Dreiecksungleichung** genannt. Sie folgt, in dem wir $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$ wie in (e) addieren und anschliessend auf

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

wiederum Eigenschaft (e) anwenden.

(h) (umgekehrte Dreiecksungleichung) *Es gilt* $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$. Denn die Dreiecksungleichung in (g) zeigt $|x| \leq |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$ was zu $|x|-|y| \leq |x-y|$ führt. Durch Vertauschen von x, y erhalten wir $|y| - |x| \leq |x - y|$. Also ist nach Eigenschaft (e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ wie gewünscht.

Übung 3.14. — Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ gilt Gleichheit in der Dreiecksungleichung oder der umgekehrten Dreiecksungleichung?

3.1.2 Das Vollständigkeitsaxiom

Um Analysis zu betreiben sind angeordnete Körper im Allgemeinen nicht geeignet; Grund dafür ist, dass man sozusagen „Lücken“ in einem Angeordneten Körper haben kann - stellen Sie sich die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ vor. Der Körper der rationalen Zahlen zusammen mit der üblichen Ordnung ist sehr wohl ein angeordneter Körper. Wir benötigen also noch weitere Eigenschaften, oder ein weiteres Axiom, um auf einem angeordneten Körper Analysis zu betreiben. Dieses Axiom ist das sogenannte Vollständigkeitsaxiom. Gewissermassen hat die Suche nach diesem Axiom mit den Arbeiten der Griechen wie Pythagoras, Euklid und Archimedes begonnen, doch wurde sie erst im 19. Jahrhundert in den Arbeiten zahlreicher Mathematiker, darunter Weierstrass, Heine, Cantor und Dedekind, erfolgreich (siehe auch diesen Link).

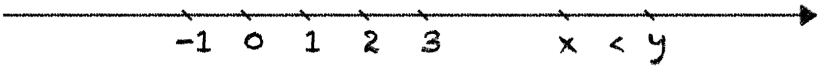
Definition 3.15. — Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Wir sagen $(K, \leq)$ sei **vollständig** oder ein **vollständig angeordneter Körper** falls die Aussage (V) wahr ist.

(V) Seien X, Y nicht-leere Teilmengen von K derart, dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in K$, das zwischen X und Y liegt, in dem Sinn, als dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt.

Die Aussage (V) bezeichnen wir als **Vollständigkeitsaxiom**.

Definition 3.16. — Wir nennen **Körper der reellen Zahlen** jeden vollständig angeordneten Körper. Solch einen Körper notieren wir mit dem Symbol $\mathbb{R}$.

3.17. — Wir werden uns die reellen Zahlen häufig als die Punkte auf einer Geraden veranschaulichen, wobei wir deswegen die Gerade auch die **Zahlengerade** nennen.



Die Relation $x < y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ interpretieren wir als „auf der Geraden liegt der Punkt y rechts von dem Punkt x“. Was bedeutet in diesem Bild das Vollständigkeitsaxiom? Seien X, Y nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Dann sind alle Elemente von X links von allen Elementen von Y wie im nachfolgenden Bild.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert also ein c, das dazwischen liegt. Die Existenz der Zahl c ist gewissermassen eine Versicherung, dass $\mathbb{R}$ keine „Lücken“ hat. Es ist empfehlenswert, sich Definitionen, Aussagen und deren Beweise auf der Zahlengeraden zu veranschaulichen. Doch sollte die Zahlengerade immer nur als Motivation und zur Entwicklung einer guten Intuition, aber nicht für die Beweisführung verwendet werden. Schliesslich haben wir nie definiert was wir unter „Gerade“, oder „rechts“ verstehen.

Wir schliessen diesen Abschnitt indem wir als eine Anwendung des Vollständigkeitsaxioms die **Wurzelfunktion** auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ einführen. Wir formulieren das als Übung für den Leser.

Übung 3.18. — In dieser Übung zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer bijektiven Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft $f(a)^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Um Verwirrungen vorzubeugen schreiben wir f, und nicht $\sqrt{\cdot}$ für diese Funktion.

1. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass $x < y \iff x^2 < y^2$.
2. Folgern Sie, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ höchstens ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $c^2 = a$ gibt.
3. Betrachten Sie für eine reelle Zahl $a > 0$ die nicht-leeren Teilmengen

$$X = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^2 < a\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid y^2 > a\}.$$

   Wenden Sie nun das Vollständigkeitsaxiom an, um ein $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ zu finden. Verwenden Sie, dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < 1$ die Aussagen $c + \varepsilon \notin X$, $c - \varepsilon \notin Y$ gelten und schliessen Sie jeweils auf $c^2 \geq a$ beziehungsweise $c^2 \leq a$.

Wir nennen **Wurzelfunktion** die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die durch $c^2 = a$ und $c \geq 0$ eindeutig bestimmte reelle Zahl c zuordnet. Wir nennen $c = f(a)$ **Wurzel** von a. Zeigen Sie:

4. Die Funktion f ist wachsend: für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < y$ gilt die Ungleichung $f(x) < f(y)$.
5. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv.
6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f(xy) = f(x)f(y)$.

Übung 3.19. — Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $x^2 = |x|^2$ und $\sqrt{x^2} = |x|$.

Zusammenfassend gilt, dass in einem Körper von reellen Zahlen, wie in 3.16 definiert, die üblichen Rechenregeln und Gleichungsumformungen funktionieren, wobei wie gewohnt Division durch Null nicht definiert ist. Des Weiteren erfüllen die Relationen $\leq$ und $<$ die üblichen Umformungsgesetze für Ungleichungen, wobei bei Multiplikation mit negativen Zahlen die Ungleichungen natürlich umzudrehen sind. Wir werden diese Gesetze im Folgenden ohne Verweis verwenden. Das Vollständigkeitsaxiom war bereits notwendig für den Beweis der Existenz einer Wurzelfunktion. Die tiefere Bedeutung dieses Axioms werden wir hingegen erst sehen, wenn wir es für weitere Aussagen verwenden. Insbesondere werden wir bis auf Weiteres stets darauf verweisen, wenn wir es verwenden.

Es ist für den Moment nicht klar, dass es einen wie in 3.16 Körper der reellen Zahlen überhaupt gibt. Wir werden uns um konkrete Konstruktionen erst später bekümmern. Die Tatsache, dass wir gelegentlich sogar von <u>den</u> reellen Zahlen sprechen, rührt daher, dass es bis auf gewisse Identifikationen nur einen vollständig angeordneten Körper gibt. Wir werden diese Eindeutigkeit ebenfalls später genauer formulieren und auch beweisen können.

3.1.3 Intervalle

Wie bereits erklärt, stellen wir $\mathbb{R}$ als die Zahlengerade dar. In diesem Bild entsprechen folgende Teilmengen Strecken auf dieser Geraden, wobei wir jeweils die Endpunkte in der Teilmenge haben oder nicht.

Definition 3.20. — Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist das **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ und das **offene Intervall** (a, b) durch

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \qquad \text{und} \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

definiert. Die **halboffenen Intervalle** $[a, b)$ und $(a, b]$ sind durch

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \qquad \text{und} \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

definiert. Wenn das Intervall nicht leer ist, dann wird a der **linke Endpunkt**, b der **rechte Endpunkt**, und $b-a$ die **Länge des Intervalls** genannt. Wir definieren die **unbeschränkten abgeschlossenen Intervalle**

$$[a, \infty) = \mathbb{R}_{\geq a} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \qquad \text{und} \qquad (-\infty, b] = \mathbb{R}_{\leq b} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

sowie die **unbeschränkten offenen Intervalle**

$$(a, \infty) = \mathbb{R}_{>a} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \qquad \text{und} \qquad (-\infty, b) = \mathbb{R}_{<b} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

und schliesslich $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

3.21. — Die Intervalle $(a, b], [a, b), (a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ sind nicht leer genau dann, wenn $a < b$, und $[a, b]$ ist nicht leer ist genau dann, wenn $a \leq b$. Intervalle der Art $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$ werden auch **endliche** oder **beschränkte Intervalle** genannt, wenn wir sie von folgenden Intervallen unterscheiden wollen. Statt runden Klammern werden manchmal auch umgedrehte eckige Klammern verwendet, um offene und halboffene Intervalle zu bezeichnen. Zum Beispiel findet man anstelle von (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$ oft auch $]a, b[$ in der Literatur. Wir werden hier stets runde Klammern verwenden.

Übung 3.22. —

1. Zeigen Sie, dass ein endlicher Durchschnitt von Intervallen wieder ein Intervall ist. Können Sie die Endpunkte eines nicht-leeren Durchschnitts mittels der Endpunkte der ursprünglichen Intervalle beschreiben?
2. Wann ist eine Vereinigung von zwei Intervallen wieder ein Intervall? Was geschieht in diesem Fall, wenn man zwei Intervalle des selben Typs (offen, abgeschlossen, halboffen) vereinigt?

Definition 3.23. — Sei $x \in \mathbb{R}$. Ein Menge, die ein offenes Intervall enthält, in dem x liegt, wird auch eine **Umgebung** oder **Nachbarschaften** von x genannt. Für ein $\delta > 0$ wird das offene Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ die **δ-Umgebung** von x genannt.

3.24. — Beispielsweise wäre also $\mathbb{Q} \cup [-1, 1]$ eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$, aber $[0, 1]$ ist nicht eine Umgebung von 1. Wir bemerken noch, dass für $\delta > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ die δ-Umgebung von x durch $\{y \in \mathbb{R} \,|\, |x-y| < \delta\}$ gegeben ist. Wir werden $|x-y|$ als **Abstand** oder **Distanz** von x zu y interpretieren. Im Sinne des Wortes „Distanz“ kann man ein paar der obigen Folgerungen neu intuitiver ausdrücken. Zum Beispiel besagt (b), dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichheit $|x-y| = |y-x|$ erfüllt ist, was also bedeutet, dass die Distanz von x nach y der Distanz von y zu x gleich ist.

Definition 3.25. — Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen** in $\mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in U$ ein offenes Intervall I mit $x \in I$ und $I \subset U$ existiert. Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}$ heisst **abgeschlossen** in $\mathbb{R}$, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus F$ offen ist.

3.26. — Offene Intervalle sind offen, abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen. Intuitiv ausgedrückt ist eine Teilmenge offen, wenn für jeden Punkt x in der Menge alle Punkte, die nahe genug an x sind, wieder in der Menge liegen. Im Gegensatz zum herkömmlichen Sprachgebrauch ist „offen“ nicht das Gegenteil von „abgeschlossen“. Die Teilmengen $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen, und die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist weder noch.

Übung 3.27. — Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ genau dann offen ist, wenn für jedes Element $x \in U$ ein $\delta > 0$ existiert mit $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U$.

Übung 3.28. — Sei $\mathcal{U}$ eine Familie von offenen, und $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie dass die Vereinigung und der Durchschnitt

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

wiederum offen, respektive abgeschlossen sind.

Übung 3.29 (Recherche). — Wir haben schon einmal über abgeschlossene Mengen in einem anderen Zusammenhang gesprochen, nämlich im Beweis von Zorn's Lemma. Sprachlicher Zufall, oder steckt da mehr dahinter?

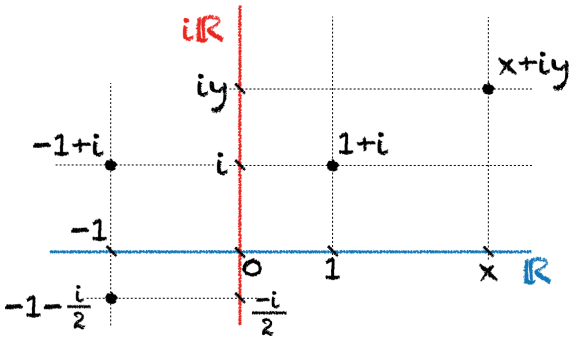
3.2 Komplexe Zahlen

3.2.1 Definition der komplexen Zahlen

Unter Verwendung eines Körpers von reellen Zahlen $\mathbb{R}$, den wir für diesen Abschnitt ein für allemal festlegen, können wir die Menge der komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

definieren. Wir nennen Elemente $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, und werden diese in der Form $z = x + yi$ schreiben, wobei das Symbol i als die **imaginäre Einheit** bezeichnet wird. Man beachte, dass bei dieser Identifikation $+$ vorerst als Ersatz für das Komma zu verstehen ist. Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird als der **Realteil** von z bezeichnet und man schreibt $x = \mathrm{Re}(z)$; die Zahl $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ ist der **Imaginärteil** von z. Die Elemente von $\mathbb{C}$ mit Imaginärteil 0 bezeichnet man auch als **reell** und die Elemente mit Realteil 0 als **rein imaginär**. Via der injektiven Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto x + 0i \in \mathbb{C}$ identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge der reellen Elemente von $\mathbb{C}$.



Die graphische Darstellung der Menge $\mathbb{C}$ **komplexe Ebene** oder auch **Gauss'sche Zahlenebene** genannt. In der geometrischen Denkweise wird die Menge der reellen Punkte als die **reelle Achse** und die Menge der rein imaginären Punkte als die **imaginäre Achse** bezeichnet.

Wie Sie vielleicht schon erwartet haben, soll i eine Quadratwurzel von -1 sein. Formal ausgedrückt wollen wir auf der Menge $\mathbb{C}$ eine Additionsoperation und eine Multiplikationsoperation definieren, so dass die Menge $\mathbb{C}$ zusammen mit diesen Operationen ein Körper ist in dem $i^2 = -1$ gilt. Zusammen mit Komutativität und Distributivität erhalten wir

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

was uns zu folgender Definition führt.

Definition 3.30. — Wir nennen **Addition** und **Multiplikation** auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die folgenden Operationen.

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(Addition)} \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

Proposition 3.31. — *Die Menge* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, zusammen mit dem Nullelement* $(0,0)$*, dem Einselement* $(1,0)$ *und den in 3.30 definierten Operationen, ist ein Körper.*

Beweis. Wir überprüfen die Körperaxiome. Assoziativität und Kommutativität der Addition, und dass $(0,0)$ ein neutrales Element für die Addition ist, sind eine direkte Konsequenzen der entsprechenden Eigenschaften der Addition reeller Zahlen. Inverse Elemente für die Addition sind durch $-(x,y) = (-x,-y)$ gegeben, da

$$(x,y) + (-x,-y) = (x-x, y-y) = (0,0)$$

gilt. Die Eigenschaften der Multiplikation nachzuweisen erfordert etwas mehr Aufwand. Wir beginnen mit Assoziativität der Multiplikation: Seien $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ und (x_3,y_3) Elemente von $\mathbb{C}$. Nun berechnet man

$$\begin{aligned}((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2))\cdot(x_3,y_3) &= ((x_1x_2 - y_1y_2),(x_1y_2 + y_1x_2))\cdot(x_3,y_3)\\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3)\end{aligned}$$

und gleichermassen berechnet man $(x_1,y_1)\cdot((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3))$. Die Rechnungen zeigen dann, dass

$$((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2))\cdot(x_3,y_3) = (x_1,y_1)\cdot((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3))$$

gilt, das heisst, die in 3.30 definierte Multiplikation ist assoziativ. Kommutativität der Multiplikation zeigt man ebenso durch direktes Ausrechnen

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1)$$

und genauso wird klar dass $(1,0)$ ein neutrales Element für die Multiplikation ist. Als nächstes überprüfen wir das Distributivitätsgesetz: Seien wieder $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ und (x_3,y_3) Elemente von $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}& (x_1,y_1)\cdot((x_2,y_2)+(x_3,y_3))\\ =\ & (x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3, y_2+y_3)\\ =\ & (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, y_1x_2 + y_1x_3 + x_1y_2 + x_1y_3)\\ =\ & (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, y_1x_3 + x_1y_3)\\ =\ & (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) + (x_1,y_1)\cdot(x_3,y_3),\end{aligned}$$

womit gezeigt wäre, dass $\mathbb{C}$ zusammen mit der in 3.30 definierten Addition und Multiplikation ein Ring ist. Um dem Beweis der Proposition zu Ende zu bringen, müssen wir noch die Existenz multiplikativer Inverser zeigen. Sei $(x,y) \in \mathbb{C}$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Es gilt also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, und also in jedem Fall $x^2 + y^2 > 0$. Ein multiplikatives Inverses zu (x,y) ist gegeben durch $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$, denn es gilt

$$(x,y)\cdot\left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(x\cdot\tfrac{x}{x^2+y^2} - y\cdot\tfrac{-y}{x^2+y^2}, y\cdot\tfrac{x}{x^2+y^2} + x\cdot\tfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$$

was zu zeigen war. □

Applet 3.32 (Komplexe Zahlen). *Wir betrachten die Körperoperationen (Addition, Multiplikation, multiplikatives Inverse) auf den komplexen Zahlen. Die wahre geometrische Bedeutung der Multiplikation und des multiplikativen Inversen lässt sich hier bereits erahnen, doch werden wir diese erst später besprechen.*

Übung 3.33. — Wäre $\mathbb{R}^2$ mit Addition wie in Definition 3.30 und mit der Multiplikation definiert durch $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ auch ein Ring oder gar ein Körper, jetzt mit Einselement $(1, 1)$?

Wie schon erklärt schreiben wir nicht (x, y) für komplexe Zahlen, sondern $x + yi$. Anstelle von $x+0i$ schreiben wir auch einfach x, und anstelle von $0+yi$ schreiben wir yi, und schliesslich schreiben wir auch i für $1i$. Wie gewünscht gilt $i^2 = -1$. Entsprechend dieser Notation wollen wir $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Das ergibt Sinn, da Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ mit der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Definition 3.34. — Sei $z = x + yi$ eine komplexe Zahl. Wir nennen $\overline{z} = x - yi$ die zu z **konjugierte** komplexe Zahl. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto \overline{z}$ heisst **komplexe Konjugation**.

Lemma 3.35. — *Die komplexe Konjugation erfüllt folgende Eigenschaften:*

1. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ und $z\overline{z} \geq 0$. Des Weiteren gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $z\overline{z} = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.*
2. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.*
3. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.*

Beweis. Teil (1) folgt aus der Tatsache dass für $z = x + yi$

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

gilt. Um Teil (2) und (3) zu zeigen schreiben wir $z = x_1 + y_1 i$ und $w = x_2 + y_2 i$. Dann gilt

$$\overline{z + w} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \overline{z} + \overline{w}$$

und

$$\overline{z \cdot w} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = \overline{z} \cdot \overline{w},$$

was zu zeigen war. □

Übung 3.36. — Zeigen Sie die Identitäten

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Schliessen Sie insbesondere, dass $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}$. Was bedeuten diese Gleichheiten geometrisch?

3.37. — Wie wir gesehen haben, lässt sich auf $\mathbb{C}$ keine Ordnung definieren, die zur Addition und zur Multiplikation kompatibel ist. Dennoch lässt sich auf den komplexen Zahlen Analysis betreiben, was zum Teil in diesem Kurs aber vor allem im Kurs *komplexe Analysis* im zweiten Studienjahr des Mathematik- und Physikstudiums thematisiert wird. Grund dafür ist, dass $\mathbb{C}$ eine Verallgemeinerung des Vollständigkeitsaxiom erfüllt, welches wir aber erst nach etwas mehr Theorie besprechen können.

3.2.2 Der Absolutbetrag auf den komplexen Zahlen

Es gibt keine Ordnungsrelation auf dem Körper der komplexen Zahlen die diesen zu einem angeordneten Körper machen würde. Wir können also nicht Definition 3.12 verwenden um auf $\mathbb{C}$ einen Absolutbetrag zu definieren. Wir möchten trotzdem einen Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ definieren, und zwar so, dass dieser möglichst viele Eigenschaften des Absolutbetrags auf $\mathbb{R}$ hat und mit diesem kompatibel ist. Wir verwenden dazu die Wurzelfunktion, die in Übung 3.18 eingeführt wurde.

Definition 3.38. — Der **Absolutbetrag** oder die **Norm** auf $\mathbb{C}$ ist die Funktion $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

An dieser Stelle bemerken wir, dass für ein $x \in \mathbb{R}$ der Absolutbetrag $|x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x$ und der Absolutbetrag von x als Element von $\mathbb{C}$ übereinstimmen, da $\sqrt{x\overline{x}} = \sqrt{x^2} = |x|$ gilt. Insbesondere ist die neu eingeführte Notation nicht widersprüchlich und wir haben den Absolutbetrag von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erweitert. Es gilt $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$. Der Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ ist multiplikativ, es gilt nämlich

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z||w|$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Das sind essentiell Konsequenzen aus Lemma 3.35. Schliesslich gilt die Dreiecksungleichung, das ist die Aussage von Proposition 3.39.

Proposition 3.39 (Dreiecksungleichung). — *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.*

Beweis. Wir schreiben $z = x_1 + y_1 i$ und $w = x_2 + y_2 i$, und beginnen damit, die vorbereitende Abschätzung

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq |z||w| \tag{3.1}$$

herzuleiten. Diese Ungleichung ist eine einfache Instanz der sogenannten **Cauchy-Schwarz Ungleichung**. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}(x_1x_2+y_1y_2)^2 &\leq (x_1x_2+y_1y_2)^2+(y_1x_2-x_1y_2)^2\\ &= x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2\\ &= x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2\\ &= (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|z|^2|w|^2,\end{aligned}$$

und also $x_1x_2+y_1y_2 \leq |z||w|$ wie gewünscht. Wir kommen zum eigentlichen Beweis der Dreiecksungleichung. Dafür berechnen wir

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\ &= x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2(x_1x_2+y_1y_2)\\ &= |z|^2+|w|^2+2(x_1x_2+y_1y_2).\end{aligned}$$

und erhalten aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung (3.1)

$$|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+2(x_1x_2+y_1y_2)\leq |z|^2+|w|^2+2|z||w|=(|z|+|w|)^2$$

wie gewünscht. □

3.40. — Der Betrag der komplexen Zahl $z=x+yi$ ist die Quadratwurzel aus x^2+y^2, und entspricht in der geometrischen Vorstellung der komplexen Zahlen der der Länge der geraden Strecke vom Ursprungspunkt $0+0i$ nach z. Genauso interpretieren wir für zwei komplexe Zahlen z und w den Betrag $|z-w|$ als **Distanz** von z nach w. Wie auch für die reellen Zahlen lässt sich mit Hilfe des Absolutbetrags ein Begriff von Offen- und Abgeschlossenheit einführen. Für die Definition von offenen Mengen in $\mathbb{R}$ wurden die symmetrisch um einen zuvor fixierten Punkt liegenden offenen Intervalle verwendet. In Analogie dazu definieren wir folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Definition 3.41. — Die **offene Kreisscheibe** mit Radius $r>0$ um einen Punkt $z\in\mathbb{C}$ ist die Menge

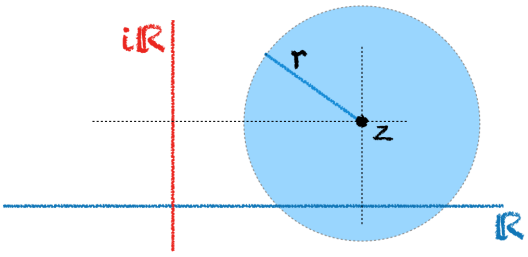
$$B(z,r)=\{w\in\mathbb{C}\mid |z-w|<r\}.$$

Die **abgeschlossene Kreisscheibe** mit Radius $r>0$ um $z\in\mathbb{C}$ ist die Menge

$$\overline{B(z,r)}=\{w\in\mathbb{C}\mid |z-w|\leq r\}.$$

3.42. — Die offene Kreisscheibe $B(z,r)$ zu $r>0$ und $z\in\mathbb{C}$ besteht also gerade aus jenen Punkten, die Abstand strikt kleiner als r von z haben. Offene Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ und offene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind in folgendem Sinne kompatibel: Ist $x\in\mathbb{R}$ und $r>0$, so ist der Schnitt der offenen Kreisscheibe $B(x,r)\subseteq\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}$ gerade das offene, symmetrisch um x liegende

Intervall $(x - r, x + r)$.



Übung 3.43. — Zeigen Sie folgende Eigenschaft von offenen Kreisscheiben: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Für jeden Punkt $z \in B(z_1, r_1) \cap B_{r_2}(z_2)$ existiert ein Radius $r > 0$, so dass

$$B(z, r) \subseteq B(z_1, r_1) \cap B(z_2, r_2).$$

Illustrieren Sie Ihre Wahl des Radius r in einem Bild.

Definition 3.44. — Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst **offen** in $\mathbb{C}$, wenn zu jedem Punkt in U eine offene Kreisscheibe um diesen Punkt existiert, die in U enthalten ist. Formaler: Für alle $z \in U$ existiert ein Radius $r > 0$, so dass $B(z, r) \subseteq U$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heisst **abgeschlossen** in $\mathbb{C}$, falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

Nach Übung 3.43 sind beispielsweise alle offenen Kreisscheiben offen. Es gibt, abgesehen von den offenen Kreisscheiben, noch viele weitere, offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Beispielsweise ist jede Vereinigung von offenen Teilmengen offen. Zum Studium der offenen Mengen und damit verwandten Begriffen werden wir in deutlicher grösserer Allgemeinheit im Kapitel 10 zurückkehren.

3.3 Maximum und Supremum

3.3.1 Existenz des Supremums

Wir haben in 2.93 und 2.94 bereits Maxima und obere Schranken für geordnete Mengen definiert. Die Definitionen gelten insbesondere für Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der in $\mathbb{R}$ gegebenen Ordnungsrelation. Wir wiederholen Sie hier noch einmal in diesem speziellen Kontext.

Definition 3.45. — Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist **von oben beschränkt** , falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq s$ für alle $x \in X$. Ein solches $s \in \mathbb{R}$ nennt man eine **obere Schranke** von X.

Definition 3.46. — Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein Element $x_1 \in X$ heisst **Maximum** von X falls für alle $x \in X$ die Ungleichung $x \leq x_1$ gilt. Wir schreiben

$$x_1 = \max(X)$$

falls das Maximum von X existiert und gleich x_1 ist.

3.47. — Falls in einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum x_1 existiert, so ist es eindeutig. Denn falls $x_1 \in X$ und $x_2 \in X$ beide die Eigenschaften eines Maximums erfüllen, so folgt $x_1 \leq x_2$ weil x_2 ein Maximum ist, und $x_2 \leq x_1$ weil x_1 ein Maximum ist, und damit $x_1 = x_2$. Wir dürfen also von *dem* Maximum einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ sprechen, falls eines existiert. Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit Endpunkten $a < b$ in $\mathbb{R}$ hat $a = \min([a, b])$ als Minimum und $b = \max([a, b])$ als Maximum. Es gibt jedoch auch Mengen, die kein Maximum besitzen. Beispielsweise hat das offene Intervall (a, b) mit Endpunkten $a < b$ in $\mathbb{R}$ kein Maximum. Es würde sich zwar der Endpunkt b als Maximum anbieten, doch dieser liegt nicht in der Menge (a, b) und ist also kein Kandidat für das Maximum. Ebenfalls $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder auch unbeschränkte Intervalle der Form $[a, \infty), (a, \infty)$ für $a \in \mathbb{R}$ besitzen kein Maximum.

3.48. — Die Begriffe **von unten beschränkt** und **untere Schranke** sowie **Minimum** sind analog definiert. Wir schreiben

$$x_0 = \min(X)$$

falls das Maximum von X existiert und gleich x_0 ist. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ heisst **beschränkt**, falls sie von oben und von unten beschränkt ist.

Definition 3.49. — Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $A := \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a \, \forall x \in X\}$ die Menge aller oberer Schranken von X. Falls das Minimum $x_0 = \min(A)$ existiert, dann nennen wir dieses Minimum **Supremum** von X, und schreiben $x_0 = \sup(X)$.

3.50. — Das Supremum von X ist also, falls es existiert, die kleinste obere Schranke von X. Wir können das Supremum $x_0 = \sup(X)$ von X direkt dadurch beschreiben.

$$x \leq x_0 \text{ für alle } x \in X \qquad \text{und} \qquad (x \leq x_1 \text{ für alle } x \in X) \implies x_0 \leq x_1 \tag{3.2}$$

Äquivalent dazu könnte man das Supremum von X auch dadurch charakterisieren dass keine reele Zahl x_1 strikt kleiner als $x_0 = \sup(X)$ eine obere Schranke von X ist.

$$x \leq x_0 \text{ für alle } x \in X \qquad \text{und} \qquad x_1 < x_0 \implies (\exists\, x \in X \text{ mit } x_1 < x). \tag{3.3}$$

Die Aussagen (3.2) und (3.2) sind äquivalent. Wir haben die Frage der Existenz des Supremums noch nicht behandelt. Falls X die leere Menge ist oder falls X nach oben unbeschränkt ist kann das Supremum nicht existieren. In allen anderen Fällen existiert es, wie folgender Satz zeigt.

Satz 3.51 (Supremum). — *Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte, nicht leere Teilmenge. Dann existiert das Supremum von X.*

Beweis. Nach Annahme ist X nicht leer, und die Menge der oberen Schranken $A := \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a \; \forall x \in X\}$ ist ebenfalls nicht leer. Des Weiteren gilt für alle $x \in X, a \in A$ die Ungleichung $x \leq a$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom 3.15 folgt daher, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so das

$$x \leq c \leq a$$

für alle $x \in X$ und $a \in A$ gilt. Aus der ersten Ungleichung folgt, dass c eine obere Schranke von X ist, also $c \in A$. Aus der zweiten Ungleichung folgt, dass c das Minimum der Menge A ist. □

Applet 3.52 (Supremum einer beschränkten nicht-leeren Menge). *Wir betrachten eine beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und zwei äquivalente Charakterisierungen des Supremums dieser Menge.*

Proposition 3.53. — *Seien X und Y von oben beschränkte, nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, und schreibe*

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \qquad \textit{und} \qquad XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

Die Mengen $X \cup Y$, $X \cap Y$ und $X + Y$ sind von oben beschränkt, und falls $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$ gilt, so ist auch XY von oben beschränkt.

(1) Es gilt $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup(X), \sup(Y)\}$.

(2) Falls $X \cap Y$ nicht leer ist, so gilt $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup(X), \sup(Y)\}$.

(3) Es gilt $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$.

(4) Falls $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$, so gilt $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$.

Beweis. Der Nachweis von (1) und (2) ist dem Leser überlassen. Um (3) zu beweisen schreiben wir $x_0 = \sup(X)$ und $y_0 = \sup(Y)$. Sei $z \in X + Y$. Es gibt $x \in X$ und $y \in Y$ mit $z = x + y$, und wegen $x \leq x_0$ und $y \leq y_0$ gilt $z \leq x_0 + y_0$. Das heisst, $x_0 + y_0$ ist eine obere Schranke für $X + Y$. Wir wollen zeigen, dass $x_0 + y_0$ das Supremum von $X + Y$, also die kleinste obere Schranke von $X + Y$ ist. Angenommen es gäbe ein $z_0 < x_0 + y_0$ mit $z \leq z_0$ für alle $z \in X + Y$. Setze

$$\varepsilon = x_0 + y_0 - z_0.$$

Da x_0 das Supremum von X ist, existiert ein $x \in X$ mit $x > x_0 - \varepsilon/2$ wie (3.3) zeigt, und genauso existiert ein $y \in Y$ mit $y > y_0 - \varepsilon/2$. Setze $z = x + y$. Es folgt daraus

$$z = x + y > x_0 - \varepsilon/2 + y_0 - \varepsilon/2 = z_0$$

was im Widerspruch dazu steht, dass z_0 eine obere Schranke für $X + Y$ ist. Der Nachweis von (4) erfolgt auf ähnliche Weise. □

3.54. — Für eine von unten beschränkte, nicht leere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ wird die grösste untere Schranke von X auch das **Infimum** $\inf(X)$ von X genannt. Es gilt die zu Satz 3.51 analoge Existenzaussage für das Infimum. Alternativ kann man das Infimum von X als

$$-\sup\{-x \mid x \in X\}$$

definieren. Überhaupt kann man dadurch praktisch alle Aussagen über Infima auf Aussagen über Suprema zurückführen.

3.3.2 Uneigentliche Werte

3.55. — In diesem Abschnitt wollen wir die Begriffe **Supremum** und **Infimum** auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ erweitern. Dazu verwenden wir die Symbole $\infty = +\infty$ und $-\infty$, die keine reellen Zahlen darstellen. Wir definieren die **erweiterte Zahlengerade**, die auch **Zweipunktkompaktifizierung** von $\mathbb{R}$ genannt wird, durch

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

und stellen uns diese als die Zahlengerade

vor. Hier haben wir den Punkt $+\infty$ rechts von $\mathbb{R}$ und den Punkt $-\infty$ links von $\mathbb{R}$ zu der Gerade hinzugefügt. Wir erweitern die Ordnungsrelation der reellen Zahlen $\leq$ auf $\overline{\mathbb{R}}$, in dem

wir $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$ verlangen. Oft verwendete Rechenregeln für die Symbole $-\infty$ und ∞, wie die Folgenden, sind Standardkonventionen.

$$\infty + x = \infty + \infty = \infty \qquad \text{und} \qquad -\infty + x = -\infty - \infty = -\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$x \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty \qquad \text{und} \qquad x \cdot (-\infty) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

für alle $x > 0$. Man sollte solche Konventionen möglichst sparsam benutzen und vorsichtig damit umgehen. Die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$ oder ähnliche bleiben undefiniert.

Definition 3.56. — Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Falls $X \subset \mathbb{R}$ nicht von oben beschränkt ist, dann definieren wir $\sup(X) = \infty$. Falls X leer ist, setzen wir $\sup(\varnothing) = -\infty$. Wir nennen in diesem Zusammenhang ∞ und $-\infty$ **uneigentliche Werte**.

3.57. — Die logische Aussage $\sup(X) = +\infty$ ist also gleichbedeutend, nach Definition, mit der Aussage dass X nicht von oben beschränkt ist, also

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in X \;:\; x > x_0$$

und genauso ist $\sup(X) = -\infty$ gleichbedeutend, nach Definition, mit der Aussage $X = \varnothing$. Analog definieren wir $\inf(\varnothing) = +\infty$ und $\inf(X) = -\infty$, falls $X \subseteq \mathbb{R}$ nicht von unten beschränkt ist.

Übung 3.58. — Seien X und Y Teilmengen von $\mathbb{R}$, und definieren Sie die Mengen $X + Y$ und XY wie in Proposition 3.53. Welche der Aussagen (1), (2), (3) und (4) gelten analog für das Supremum wenn wir uneigentliche Werte zulassen? Welche Rechenkonventionen sind dabei notwendig?

Übung 3.59. — Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\sup(|X|) = \max\{\sup(X), -\inf(X)\}$$

gilt. Hierbei ist $|X|$ das Bild von X unter dem Absolutbetrag $|\cdot|$ als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Übung 3.60. — Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to (-1, 1), \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 + \frac{1}{1-x} & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

bijektiv ist und die Ordnung erhält. Das heisst, für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y \iff \varphi(x) < \varphi(y)$.

Erweitern Sie φ zu einer ordnungserhaltenden Bijektion $\overline{\varphi} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ und erklären Sie damit das obige Bild der erweiterten Zahlengerade.

3.4 Konsequenzen der Vollständigkeit

Wir haben in Abschnitt 3.1 unter Verwendung des Vollständigkeitsaxiom die Wurzelfunktion eingeführt und in Abschnitt 3.3 das Vollständigkeitsaxiom verwendet um die Existenz des Supremums zu beweisen. In diesem Abschnitt werden wir einige weitere Konsequenzen des Vollständigkeitsaxioms behandeln. Wir wählen für den gesamten Abschnitt 3.4 einen beliebigen Körper von reellen Zahlen $\mathbb{R}$, und nennen die Elemente von $\mathbb{R}$ reelle Zahlen.

3.4.1 Das Archimedische Prinzip

Das Archimedische Prinzip ist die Aussage, dass es für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine ganze Zahl n gibt, die grösser als x ist. Der folgende Satz, den wir mit Hilfe der Existenz des Supremums beweisen, ist eine etwas präzisere Formulierung des Archimedischen Prinzip's.

Satz 3.61. — *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$.*

Beweis. Sei zunächst $x \geq 0$ eine nicht negative reelle Zahl. Dann ist $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ eine von oben beschränkte, Teilmenge von $\mathbb{Z}$, die nicht leer ist da $0 \in E$. Nach Satz 3.51 existiert das Supremum $s_0 = \sup(E)$. Da s_0 die kleinste obere Schranke von E ist gilt $s_0 \leq x$, und es existiert ein $n_0 \in E$ mit $s_0 - 1 < n_0$. Es folgt $s_0 < n_0 + 1$ und für jedes $m \in E$ gilt dann $m \leq s_0 < n_0 + 1$, und also $m \leq n_0$. Daher ist n_0 das Maximum von E, und es gilt $n_0 + 1 \notin E$, also $n_0 + 1 > x$. Zusammenfassend folgt

$$n_0 \leq s_0 \leq x < n_0 + 1$$

und die Existenz von n im Satz 3.61 ist im Fall $x \geq 0$ bewiesen. Falls $x < 0$ ist, dann können wir obigen Fall auf $-x$ anwenden und schliessen damit genau so auf die Existenzaussage. Für den Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ die Ungleichungen $n_1 \leq x < n_1 + 1$ und $n_2 \leq x < n_2 + 1$ gelten. Daraus folgt $n_1 \leq x < n_2 + 1$ und damit $n_1 \leq n_2$. Analog folgt $n_2 \leq n_1$, was $n_1 = n_2$ impliziert. □

Definition 3.62. — Der **ganzzahlige Anteil** $\lfloor x \rfloor$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die nach Satz 3.61 eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$. Die durch $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ gegebene Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Z}$ heisst **Abrundungsfunktion**. Der **gebrochene Anteil** einer reellen Zahl x ist $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

Korollar 3.63. — *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine ganze Zahl $n \geq 1$ so, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Aufgrund von Satz 3.61 existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$ und $n > \varepsilon - 1$. Für so ein $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann auch $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Korollar 3.64. — *Zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis. Nach dem Archimedischen Prinzip in Form von Korollar 3.63 existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < b - a$. Ebenso gibt es nach dem Archimedischen Prinzip in Form von Satz 3.61 ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n - 1 \leq ma < n$ oder äquivalenterweise $\frac{n-1}{m} \leq a < \frac{n}{m}$. Insbesondere gilt $\frac{n}{m} \leq a + \frac{1}{m}$, was mit $\frac{1}{m} < b - a$ gerade

$$a < \frac{n}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + b - a = b$$

und damit das Korollar impliziert, wobei $r = \frac{n}{m}$ gewählt wird. □

Anders formuliert zeigt obiges Korollar, dass $\mathbb{Q}$ jedes offene, nicht leere Intervall I schneidet, das heisst, $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. Eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ heisst **dicht** in $\mathbb{R}$ falls jedes offene, nicht leere Intervall von $\mathbb{R}$ ein Element von X enthält. Korollar 3.64 besagt also: $\mathbb{Q}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$.

Übung 3.65. — Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ das Supremum von $\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$ gerade x ist.

Übung 3.66. — Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle, irrationale Zahl. Betrachtet man den Beweis von Korollar 3.64 nochmals, so realisiert man, dass die Existenz einer rationalen Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q}$$

gezeigt wird. Fragen zu Annäherung von reellen Zahlen mit rationalen sind Fragestellungen der Diophantischen Approximation. Wir wollen hier auf elementare Weise ein stärkeres Resultat (Dirichlet's Approximationssatz) zeigen. Sei $Q \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q \leq Q$ existieren, die

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ}$$

und insbesondere $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ erfüllen.

3.4.2 Dezimalbruchentwicklung und Überabzählbarkeit

3.67. — Eine übliche Vorstellung der reellen Zahlen ist durch nicht abbrechenden Dezimalbrüche gegeben. Formell definieren wir einen **Dezimalbruch** als eine Folge ganzer Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

mit $0 \leq a_n \leq 9$ für alle $n \geq 1$. So einem Dezimalbruch können wir ein eindeutiges Element von $\mathbb{R}$ zuordnen, und zwar folgendermassen. Angenommen $a_0 \geq 0$. Wir setzen

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \qquad \text{und} \qquad y_n = 10^{-n} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k}. \tag{3.4}$$

Man überprüft, dass für alle $n \geq 0$ und $m \geq 0$ die Ungleichung $x_n \leq y_m$ gilt, und kann also nach dem Vollständigkeitsaxiom auf die Existenz eines $c \in \mathbb{R}$ schliessen mit der Eigenschaft dass

$$x_n \leq c \leq y_n \tag{3.5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Archimedische Prinzip in Form von Korollar 3.63 zeigt dass nur eine reelle Zahl c gibt, die die Ungleichung $x_n \leq c \leq y_n$ für alle $n \geq 0$ erfüllt. Falls es nämlich zwei verschiedene solche Zahlen, etwa c und d mit $c < d$ gäbe, so folgt aus

$$x_n \leq c < d \leq y_n$$

und der Definiton von x_n und y_n die Ungleichung

$$0 < d - c < 10^{-n}$$

für alle $n \geq 0$, was dem Korollar 3.63 widerspricht. Wir nennen das durch (3.5) eindeutig bestimmte Element $c \in \mathbb{R}$ die reelle Zahl mit Dezimalbruchentwicklung $a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$. Eine Alternative Definition wäre

$$c = \sup\{x_n \mid n \geq 0\}$$

oder auch $c = \inf\{y_n \mid n \geq 0\}$. Falls a_0 negativ ist, so betrachten wir zuerst die reelle Zahl c mit Dezimalbruchentwicklung $-a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$ und definieren dann die reelle Zahl mit Dezimalbruchentwicklung $a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$ als $-c$.

3.68. — Es stellt sich jetzt die Frage, ob denn jedes Element von $\mathbb{R}$ als Dezimalbruch geschrieben werden kann. Das ist tatsächlich so. Sei $c \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$. Dann können wir $a_0 := \lfloor c \rfloor$ und

$$a_n := \lfloor 10^n c \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} c \rfloor \tag{3.6}$$

definieren. Man überprüft dass die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in der Tat ein ein Dezimalbruch ist, also $0 \leq a_n \leq 9$ für alle $n \geq 1$ erfüllt. Es ist dann ebenfalls nicht schwer, die Ungleichungen 3.5 zu überprüfen, woraus folgt dass c gerade die reelle Zahl mit Dezimalbruchentwicklung $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ ist. Der Fall $c \leq 0$ ergibt sich genauso, im dem man das Vorzeichen von a_0 in der Dezimalbruchentwicklung von $-c$ ändert.

3.69. — Zwei verschiedene Dezimalbrüche können die selbe reelle Zahl darstellen. Zum Beispiel stellen die beiden Dezimalbrüche

$$0.1999999999999999\ldots \qquad \text{und} \qquad 0.2000000000000000\ldots$$

beide die reelle Zahl $\frac{1}{5}$ dar. Das Problem tritt aber nur dann auf, wenn ein Dezimalbruch ab einer gewissen Stelle zu einer konstanten Folge $\ldots 9999\ldots$ wird. Um das auszuschliessen können wir folgende Definition in Betracht ziehen: Wir nennen **echten Dezimalbruch** jede

Folge von ganzen Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

mit $0 \leq a_n \leq 9$ für alle $n \geq 1$, und mit der Eigenschaft dass für jedes $n_0 \geq 1$ ein $n \geq n_0$ mit $a_n \neq 9$ existiert.

Übung 3.70. — Sei $c \geq 0$ eine reelle Zahl. Überprüfen Sie, dass die durch (3.6) definierte Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ein echter Dezimalbruch ist. Zeigen Sie anschliessend, dass dadurch eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und der Menge aller echten Dezimalbrüche zustande kommt.

Proposition 3.71. — *Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

Beweis. Nach Cantor's Diagonalargument, Satz 2.82, ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ strikt mächtiger als $\mathbb{N}$, und also nicht abzählbar. Um zu zeigen dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, genügt es also, die Existenz einer Injektion

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$$

nachzuweisen. Wir konstruieren so eine Injektion, in dem wir jeder Teilmenge A die reelle Zahl $\varphi(A)$ zuordnen, deren Dezimalbruchentwicklung durch $a_0, a_1a_2a_3a_4 \ldots$ mit $a_n = \mathbb{1}_A(n)$ gegeben ist. Injektivität der Funktion ϕ folgt aus Aufgabe 3.70, oder direkt: Sind A und B verschiedene Teilmengen von $\mathbb{N}$ so ist $A \triangle B$ nicht leer. Sei n das kleinste Element von $A \triangle B$. Falls $n \in A$ und $n \notin B$ so gilt $\varphi(A) > \varphi(B)$, und falls $n \notin A$ und $n \in B$ so gilt $\varphi(A) < \varphi(B)$. Es gilt also $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ in jedem Fall. □

3.4.3 Häufungspunkte einer Menge

Wie wir in Korollar 3.64 und implizit auch in den Aufgaben 3.65 und 3.66 gesehen haben, kann jede reelle Zahl $\mathbb{R}$ rationale Zahlen beliebig gut angenähert werden. Allgemeiner möchten wir nun zu einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ jene $x \in \mathbb{R}$ betrachten, denen A beliebig nahe kommt.

Definition 3.72. — Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass x ein **Häufungspunkt** der Menge A ist, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $0 < |a - x| < \varepsilon$ gibt.

In anderen Worten gibt es für einen Häufungspunkt x_0 in jeder Umgebung Punkte in A die verschieden von x_0 sind. Dabei spielt es keine Rolle spielt x_0 in A liegt oder nicht. Die Menge A kommt also ihren Häufungspunkten „von aussen“ beliebig nahe.

Übung 3.73. — Zeigen Sie, dass eine endlichen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ keine Häufungspunkte besitzt. Zeigen Sie, dass $A = \mathbb{Z}$ keine Häufungspunkte hat.

Satz 3.74. — *Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte unendliche Teilmenge. Dann existiert ein Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Da A beschränkt ist können wir eine untere Schranke a und eine obere Schranke b für A wählen. Es gilt also $A \subseteq [a, b]$. Wir definieren

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ die Menge } A \cap (-\infty, x] \text{ ist endlich}\}.$$

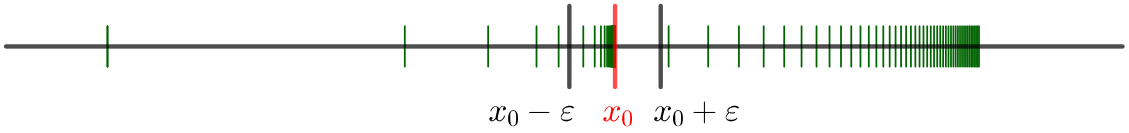
Dann ist $a \in X$ da $A \cap (-\infty, a]$ in der endlichen Menge $\{a\}$ enthalten ist. Des Weiteren gilt $x < b$ für jedes $x \in X$, denn für $x \geq b$ ist $A \cap (-\infty, x] = A$ eine unendliche Menge nach Annahme. Daher ist X eine nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, womit das Supremum $x_0 = \sup(X)$ nach Satz 3.51 existiert.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $x > x_0 - \varepsilon$, was zeigt, dass $A \cap (-\infty, x_0 - \varepsilon]$ eine endliche Menge ist, da $A \cap (-\infty, x_0 - \varepsilon] \subseteq A \cap (-\infty, x]$ gilt. Des Weiteren gilt $x_0 + \varepsilon \notin X$ auf Grund der Definition von x_0, und damit ist die Kardinalität von $A \cap (-\infty, x_0 + \varepsilon]$ unendlich. Es folgt, dass

$$A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = (A \cap (-\infty, x_0 + \varepsilon]) \setminus (A \cap (-\infty, x_0 - \varepsilon])$$

eine unendliche Menge ist, und abgesehen von möglicherweise x_0 und $x_0 + \varepsilon$ noch unendlich viele weitere Punkte besitzen muss. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, sehen wir, dass x_0 ein Häufungspunkt der Menge A ist. □

Die Graphik 3.1 illustriert die Idee des Beweises von Satz 3.74. Wir betrachten das „grösste“ $x_0 \in \mathbb{R}$, für welches links von x_0 (im Bild in rot) nur endliche viele Punkte von A (im Bild in grün) liegen. Um genau zu sein, muss ein solches x_0 nicht existieren, weswegen wir x_0 als das Supremum über alle x mit dieser Eigenschaft nehmen. Schiebt man dieses x_0 nun um ein kleines $\varepsilon > 0$ nach rechts auf $x_0 + \varepsilon$, so müssen unendlich viele Elemente von A links von $x_0 + \varepsilon$ liegen. Umgekehrt kann man x_0 etwas nach links nach $x_0 - \varepsilon$ schieben, womit nur endlich viele Elemente von A links von $x_0 - \varepsilon$ liegen können. Also befinden sich unendlich viele Elemente von A zwischen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$. Da aber ε beliebig war, muss x_0 ein Häufungspunkt von A sein.



Figur 3.1: Idee des Beweises von Satz 3.74

Insbesondere erkennen wir im Beweis eine stärkere Aussage für den gefundenen Häufungspunkt x_0 der Menge A, nämlich dass für alle $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ unendlich ist. Dies eine alternative Charakterisierung von Häufungspunkten.

Übung 3.75. — Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x_0 genau dann ein Häufungspunkt der Menge A ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt von A mit der ε-Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte enthält.

3.4.4 Das Intervallschachtelungsprinzip

Der Durchschnitt von ineinander geschachtelten, nicht leeren Intervallen, das heisst, Intervallen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ in $\mathbb{R}$ kann durchaus leer sein. Zum Beispiel gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \big[n, \infty\big) = \varnothing \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(0, \tfrac{1}{n}\big) = \varnothing$$

auf Grund des Archimedischen Prinzips in Satz 3.61. Für abgeschlossene und beschränkte Intervalle kann das nicht passieren, wie des nachfolgende Satz zeigt.

Satz 3.76. — *Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Familie von beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$
2. $(F_1 \in \mathcal{F}) \wedge (F_2 \in \mathcal{F}) \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ nicht leer.

Beweis. Da jede der Mengen $F \in \mathcal{F}$ beschränkt ist, existiert $\inf F \in \mathbb{R}$ für jedes $F \in \mathcal{F}$. Wir definieren

$$s = \sup\{\inf F \mid f \in \mathcal{F}\}$$

und behaupten, dass $s \in F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. Zunächst bemerken wir, dass $s \neq \infty$ gilt. Tatsächlich, sei $F_1 \in \mathcal{F}$. Da F_1 beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $F_1 \subseteq [-M, M]$. Falls $s = \infty$ gelten würde, dann gäbe es insbesondere ein $F_2 \in \mathcal{F}$ mit $\inf F_2 > M + 1$, woraus dann $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ folgen würde, entgegen der Annahme. Es gilt also $s \in \mathbb{R}$.

Sei $F \in \mathcal{F}$. Wir wollen zeigen, dass $s \in F$ gilt. Angenommen $s \notin F$. Da F abgeschlossen, und also $\mathbb{R} \setminus F$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap F = \varnothing$. Nach Definition des Supremums existiert ein $F_1 \in \mathcal{F}$ mit $s - \frac{\varepsilon}{2} < \inf F_1$. Nun gilt aber

$$\inf(F \cap F_1) \geq \inf F_1 \geq s - \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap (F \cap F_1) = \varnothing$$

woraus $\inf(F \cap F_1) \geq s + \varepsilon$ folgt. Das widerspricht jedoch der Definition von s als Supremum. Die Annahme $s \notin F$ war also absurd, und somit gilt $s \in F$. Da $F \in \mathcal{F}$ beliebig war, zeigt dies den Satz. □

Korollar 3.77 (Intervallschachtelungsprinzip). — *Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein nicht-leeres, abgeschlossenes, beschränktes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, so dass für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$ die Inklusion $I_m \supset I_n$ gilt. Dann ist der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \big[\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big] \tag{3.7}$$

nicht-leer.

Beweis. Da $I_n \cap I_m = I_{\max\{n,m\}} \neq \varnothing$ für alle ganzen Zahlen n, m gilt, sind die Hypothesen in Satz 3.76 erfüllt, und also folgt, dass der Durchschnitt 3.7 nicht leer ist. $\square$

Übung 3.78. — Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ genau dann ein Intervall ist, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $z \in \mathbb{R}$ die Implikation $(x \leq z \leq y) \implies z \in I$ gilt. Schliessen Sie daraus, dass ein beliebiger Schnitt von Intervallen wiederum ein Intervall ist.

Übung 3.79. — Seien $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ wie im Korollar 3.77 und nehmen Sie zusätzlich an, dass $\inf\{b_n - a_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ aus nur einem Punkt besteht.

3.5 Modelle und Eindeutigkeit der Menge der reellen Zahlen

Wir wollen in diesem Abschnitt erklären, warum die Axiome der reellen Zahlen die reellen Zahlen im Wesentlichen eindeutig festlegen. Damit dürfen wir ohne Weiteres eine beliebige Version der reellen Zahlen betrachten oder je nach Zusammenhang auch verschiedene Vorstellungen von reellen Zahlen haben. Zuerst wollen wir einige mögliche Modelle der reellen Zahlen ansprechen.

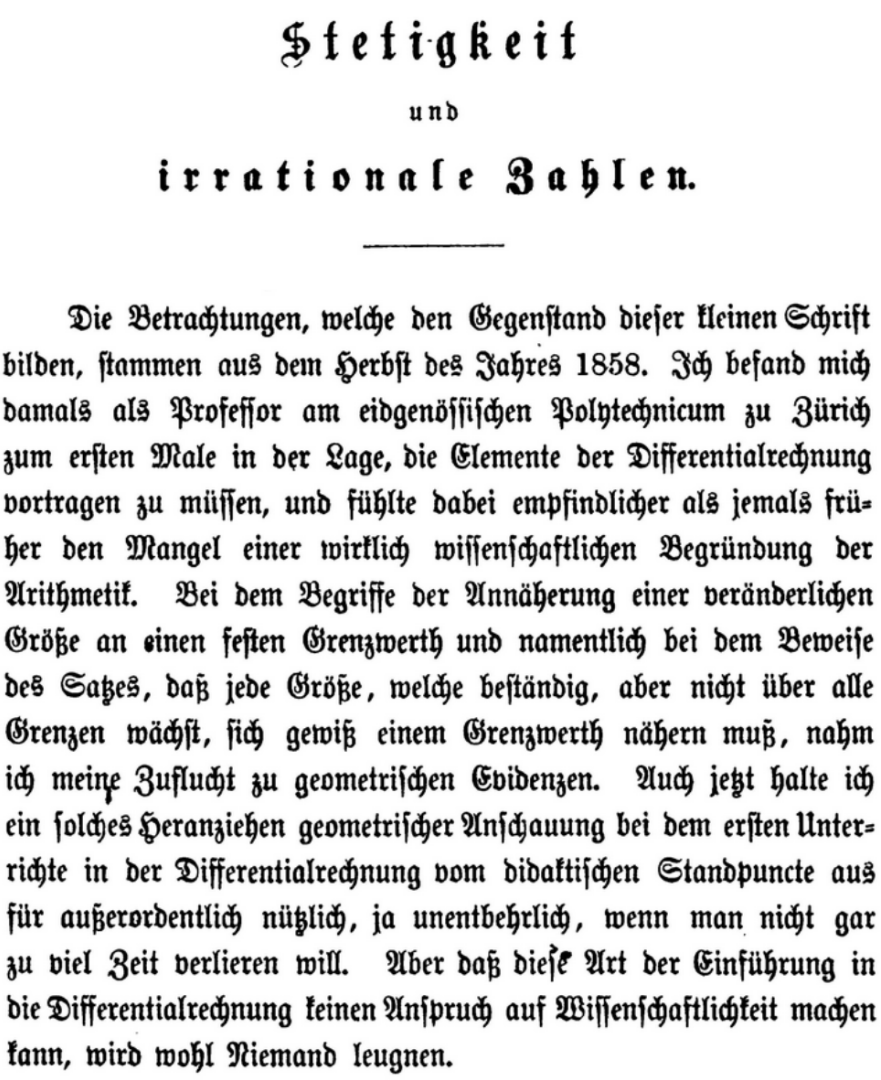
3.5.1 Dezimalbrüche

Die Addition und Multiplikation von Dezimalbrüchen sind durch die bekannten Algorithmen gegeben. Allerdings muss die formale Beschreibung dieser Algorithmen auch nicht abbrechende Dezimalbrüche erlauben und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ müssen in diesem Zusammenhang als Quotientenraum von der Menge der Dezimalbrüche modulo einer Äquivalenzrelation definiert werden. Denn zum Beispiel stellen $1.00\ldots$ und $0.99\ldots$ dieselbe reelle Zahl dar, und es gibt unendlich viele reelle Zahlen mit zwei Dezimalbruchentwicklungen. Daher muss vor Besprechung der Axiome diese Äquivalenzrelation genau definiert werden und auch gezeigt werden, dass die Algorithmen wohldefinierte Abbildungen auf dem Quotientenraum $\mathbb{R}$ definieren.

Insgesamt ist die korrekte Konstruktion mit dieser Methode überraschend aufwendig. Des Weiteren gibt es keinen guten Grund nur Dezimalbrüche zu betrachten und nicht auch andere Basen zu erlauben (zum Beispiel Binärdarstellungen von Zahlen). Letzteres wirft aber die Frage auf, ob denn vielleicht manche Eigenschaften der reellen Zahlen davon abhängen, ob man 10 Symbole oder eine andere Anzahl verwendet. Die Eindeutigkeit der reellen Zahlen verneint diese Frage. Wir werden auf Dezimalbruchentwicklungen im Kapitel 7 nochmals zu sprechen kommen.

3.5.2 Dedekind-Schnitte

Formal einfacher als Dezimalbrüche ist die Konstruktion der reellen Zahlen ausgehend von den rationalen Zahlen durch sogenannte Dedekind-Schnitte, welche nach Richard Dedekind (1831-1916) benannt sind. Dedekind's Arbeit über die reellen Zahlen ist 1872 erschienen, geht aber auf einen Analysis Kurs an der ETH zurück!



Stetigkeit

und

irrationale Zahlen.

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwerth und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwerth nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpuncte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber daß diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl Niemand leugnen.

Figur 3.2: Vorwort von Dedekind's Arbeit [Ded1872]

Definition 3.80. — Wir schreiben $C(0) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, und nennen **Dedekind-Schnitt** jede nicht leere, von unten beschränkte Teilmenge C von $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, dass $C = C(0) + C$, also

$$C = \{x + c \mid x \in C(0), c \in C\} \tag{3.8}$$

gilt. Wir schreiben $\mathcal{D}$ für die Menge aller Dedekind-Schnitte

3.81. — Die Menge $C(0)$ ist ein Dedekind-Schnitt. Allgemeiner ist für jede rationale Zahl q die Menge

$$C(q) = \{x \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$$

ein Dedekind-Schnitt. Aber beispielsweise ist auch $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \text{ und } 2 < x^2\}$ ein Dedekind-Schnitt. Falls ein Dedekind-Schnitt eine rationale Zahl c enthält, dann enthält er auch jede rationale Zahl d mit $c < d$. Ein Dedekind Schnitt kann kein minimales Element enthalten, das

stünde im Widerspruch zur Bedingung (3.8). Wir definieren in 3.83 und 3.86 eine Körperstruktur, und eine dazu kompatible Ordnungsrelation auf der Menge $\mathcal{D}$. Diese haben ausserdem die Eigenschaft, dass für rationale Zahlen p, q

$$C(p+q) = C(p) + C(q), \qquad C(pq) = C(p)C(q), \qquad p \leq q \implies C(p) \leq C(q)$$

gilt. Der Hauptsatz über Dedekind-Schnitte ist der folgende.

Satz 3.82 (Dedekind). — *Mit der in 3.83 und 3.86 gegebenen Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation, dem Nullelement $C(0)$ und dem Einselement $C(1)$ bildet die Menge der Dedekind-Schnitte $\mathcal{D}$ einen vollständigen, angeordneten Körper.*

Beweis. Die Aussage des Satzes ist die Zusammenfassung von Lemma 3.84, 3.87 und 3.88. □

Definition 3.83. — Seien C und D Dedekind-Schnitte. Die **Summe** von C und D ist der Dedekind-Schnitt

$$C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}.$$

Wir sagen C sei **kleiner** als D und schreiben $C \leq D$ falls $C \supseteq D$ gilt.

Lemma 3.84. — *Mit der Operation $+$ ist die Menge der Dedekind-Schnitte $\mathcal{D}$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $C(0)$. Ausserdem gilt*

1. *$C \leq D$ oder $D \leq C$ für alle $C, D \in \mathcal{D}$*
2. *$C \leq D \implies D + E \leq C + E$ für alle $C, D, E \in \mathcal{D}$*

Beweis. Die Operation $+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ ist assoziativ und kommutativ, und $C(0)$ ist aufgrund von (3.8) ein neutrales Element. Es bleibt die Existenz von inversen Elementen nachzuweisen. Ist C ein Dedekind-Schnitt, so prüft man, dass

$$-C = \{x + d \mid x, d \in \mathbb{Q} \text{ mit } x > 0 \text{ und } c + d > 0 \text{ für alle } c \in C\} \tag{3.9}$$

Dedekind-Schnitt ist, und $C + (-C) = C(0)$ gilt. Um die Linearität der Ordnungsrelation zu zeigen, seien C und D Dedekind-Schnitte. Falls $C \supseteq D$ gilt sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein Element $d \in D$ mit $d \notin C$. Für jedes $c \in C$ gilt dann $d \leq c$, und da jede rationale Zahl der Form $d + x$ mit $x > 0$ ein Element von D ist, gilt $C \subseteq D$, also $D \leq C$. Die Kompatibilität der Ordnungsrelation mit der Addition ist offensichtlich. □

3.85. — Lemma 3.84 besagt, dass $\mathcal{D}$ mit der Operation $+$ und der Relation $\leq$ eine kommutative **angeordnete Gruppe** ist. Man überprüft leicht, dass für alle rationalen Zahlen p, q

$$C(p+q) = C(p) + C(q), \qquad C(-q) = -C(q), \qquad p \leq q \implies C(p) \leq C(q)$$

gilt. Mit anderen Worten ist die injektve Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathcal{D}$ gegeben durch $q \mapsto C(q)$ ein Homomorphismus angeordneter Gruppen.

Definition 3.86. — Seien C und D Dedekind-Schnitte. Das **Produkt** von C und D ist der Dedekind-Schnitt

$$CD = \begin{cases} \{cd \mid c \in C, d \in D\} & \text{falls } C(0) \leq C \text{ und } C(0) \leq D \\ -\{cd \mid c \in -C, d \in D\} & \text{falls } C(0) \geq C \text{ und } C(0) \leq D \\ -\{cd \mid c \in C, d \in -D\} & \text{falls } C(0) \leq C \text{ und } C(0) \geq D \\ \{cd \mid c \in -C, d \in -D\} & \text{falls } C(0) \geq C \text{ und } C(0) \geq D \end{cases}$$

Lemma 3.87. — *Mit der in 3.83 und 3.86 gegebenen Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation, dem Nullelement $C(0)$ und dem Einselement $C(1)$ bildet die Menge der Dedekind-Schnitte $\mathcal{D}$ einen angeordneten Körper.*

Beweis. Seien C, D, und E Dedekind-Schnitte. Dass $CC(1) = C(1)C = C$ gilt, folgt direkt aus der Definition des Produkts. Falls $C(0) \leq C$, $C(0) \leq D$ und $C(0) \leq E$ gilt, so folgt

$$C(DE) = (CD)E, \qquad CD = DC, \qquad C(D+E) = CD + CE$$

ebenfalls direkt aus den Definitionen und den entsprechenden Eigenschaften der Operationen mit rationalen Zahlen. Assozoativität und Kommutativität der Multiplikation sowie das Distributativgesetz folgen für allgemeine C, D, E daraus, und aus der Tatsache, dass sowohl $C(-D) = -(CD)$ als auch $(-C)D = -(CD)$ gilt. Es bleibt die Kompatibilität der Ordnungsrelation mit der Multiplikation zu zeigen, aber auch das folgt sofort aus der Definition von CD im Fall $C(0) \leq C$ und $C(0) \leq D$. □

Lemma 3.88. — *Der angeordnete Körper $(\mathcal{D}, \leq)$ ist vollständig.*

Beweis. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nichtleere Teilmengen von $\mathcal{C}$ mit der Eigenschaft, dass $A \leq B$, also $A \supseteq B$, für alle $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ gilt. Dann ist

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

ein Dedekind-Schnitt. Tatsächlich ist C nicht leer, die Bedingung (3.8) ist erfüllt, und C ist nach unten beschränkt, da für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ einerseits A nach unten beschränkt ist und andererseits $A \supseteq C$ gilt. Nach Konstruktion von $C \in \mathcal{D}$ gilt $A \supseteq C \supseteq B$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$, was zu zeigen war. □

3.5.3 Weitere Modelle

Neben der Konstruktion mit Dezimalbrüchen und der der Konstruktion mit Dedekind Schnitten gibt es noch weitere Möglichkeiten, vollständige angeordnete Körper, also reelle Zahlen, zu konstruieren. Wir diskutieren kurz drei.

3.89. — Falls wir von der zweidimensionalen **euklidischen Geometrie** ausgehen, so können wir einen Körper reeller Zahlen $\mathbb{R}$ definieren, indem wir eine Gerade g in der Ebene gemeinsam mit zwei verschiedenen Punkten $P_0, P_1 \in g$ auswählen. Addition und Multiplikation wird dann mit geometrischen Konstruktionen (siehe folgendes Applet) so definiert, dass in $\mathbb{R} = g$ die Punkte P_0 und P_1 die Rolle von 0 und 1 in $\mathbb{R}$ übernehmen.

Applet 3.90 (Definition mittels der Zahlengerade)**.** *Wir deuten an, wie man mittels parallelen Geraden die Addition und mittels dem Strahlensatz die Multiplikation auf der Zahlengerade definieren kann.*

3.91. — Es gibt eine wichtige Methode, wie man ausgehend von einem sogenannten **metrischen Raum**, also einer Menge in der wir einen Abstand zwischen jeweils zwei Elementen definiert haben, einen grösseren vollständigen metrischen Raum konstruieren kann. Man nennt das Prozedere **Vervollständigung**, wobei man den Begriff der Vollständigkeit im Zusammenhang mit metrischen Räumen natürlich zuerst definieren muss. Angewandt auf die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen liefert die Vervollständigung in diesem Fall eine Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wir besprechen diese Konstruktion in Abschnitt 6.1.4.

3.92. — Der schweizer Mathematiker A'Campo (geb. 1941) hat eine weitere kuriose Konstruktion gefunden, siehe [ACa2003]. Für dies nennen wir eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ quasi-linear, falls sie die Eigenschaft

$$|\{f(m+n) - f(m) - f(n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}| < \infty$$

hat. Wir bezeichnen die Menge der quasi-linearen Abbildungen mit $\mathcal{Q}$ und die Menge der Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ mit endlichem Bild mit $\mathcal{K}$. Wir bemerken, dass $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Q}$ und zum Beispiel $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{K}$ gilt. Man kann nun $\mathbb{R}$ als den Quotientenraum von $\mathcal{Q}$ definieren, wobei $f_1, f_2 \in \mathcal{Q}$ äquivalent sind, wenn die Funktion

$$(f_1 - f_2) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

in $\mathcal{K}$ liegt. Im Sinne der Algebra ist $\mathcal{Q}$ bereits eine Gruppe bezüglich „punktweiser Addition“, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Q}$ ist eine Untergruppe, und $\mathbb{R} = \mathcal{Q}/\mathcal{K}$. Die Multiplikation der reellen Zahlen $[f_1], [f_2] \in \mathcal{Q}/\mathcal{K}$ ist durch $[f_1 \circ f_2]$ und die 1 durch $[\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}]$ gegeben. Eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ wird in diesem Modell durch die Äquivalenzklasse $[f_r]$ der Funktion

$$f_r : m \mapsto \lfloor rm \rfloor$$

dargestellt. Gewissermassen wird hier eine reelle Zahl durch die „durchschnittliche Steigung“ einer quasi-linearen Abbildung definiert.

3.5.4 Eindeutigkeit

Der nachfolgende Satz 3.93 besagt, dass es nicht darauf ankommt, welches Modell der reellen Zahlen man benutzt oder wie genau man es konstruiert hat. Eine Abbildung Φ wie in Satz 3.93 nennt man einen **Isomorphismus** von angeordneten Körpern. Wir haben im Satz die Null- und Einselemente der Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}$ beide mit 0, beziehungsweise 1 bezeichnet, die Additionen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}$ sind beide als $+$ geschrieben, und die Ordnungsrelationen beide mit $\leq$. Wir überlassen es dem aufmerksamen Leser die Symbole jeweils richtig zu interpretieren. Beispielsweise steht in $\Phi(0) = 0$ linkerhand die Null von $\mathbb{R}$, rechterhand die Null in $\mathbb{S}$.

Satz 3.93 (Eindeutigkeit der reellen Zahlen). — *Seien* $(\mathbb{R}, \leq)$ *und* $(\mathbb{S}, \leq)$ *vollständige angeordnete Körper. Dann existiert genau eine Abbildung* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$*, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. *Additivität:* $\Phi(0) = 0$ *und* $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.
2. *Multiplikativität:* $\Phi(1) = 1$ *und* $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.
3. *Monotonie* $x \leq y \implies \Phi(x) \leq \Phi(y))$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

Diese Abildung Φ *ist bijektiv.*

Beweis. Es sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Wie wir in 3.6 gesehen haben, können wir $\mathbb{Q}$ in Eindeutiger Weise als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auffassen, und genauso auch als Unterkörper von $\mathbb{S}$. Ist $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ eine additive und multiplikative Abbbildung, so gilt

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = 1, \quad \Phi(2) = \Phi(1 + 1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 2, \ldots$$

und also $\Phi(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was man formell mit vollständiger Induktion zeigt. Wegen

$$0 = \Phi(0) = \Phi(1 - 1) = \Phi(1) + \Phi(-1) = 1 + \Phi(-1)$$

gilt $\Phi(-1) = -1$, und deshalb $\Phi(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Schliesslich gilt

$$1 = \Phi(n\tfrac{1}{n}) = \Phi(n)\Phi(\tfrac{1}{n}) = n \cdot \Phi(\tfrac{1}{n})$$

und damit $\Phi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, und allgemeiner $\Phi(q) = q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Falls nun $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ auch noch monoton ist, dann erhält Φ notwendigerweise auch Suprema: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so muss

$$\Phi(\sup(A)) = \sup(\Phi(A))$$

gelten, wobei linkerhand das Supremum in $\mathbb{R}$, und rechterhand das Supremum in $\mathbb{S}$ steht. Man bemerkt dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ das Supremum in $\mathbb{R}$ der Menge rationaler Zahlen $\sup\{q \in \mathbb{Q} \,|\, q <$

$r\}$ gerade r ist. Falls es also eine Abbildung Φ wie im Satz gibt, dann höchstens eine, und sie ist notwendigerweise durch

$$\Phi(x) = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} \tag{3.10}$$

definiert. Das Supremum in 3.10 ist das Supremum in $\mathbb{S}$ der Menge $\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$ von rationalen Zahlen in $\mathbb{S}$. Dass die durch 3.10 definierte Abbildung die Eigenschaften der Additivität, Multiplikativität erfüllt, also

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x + y\} = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} + \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < y\} \tag{3.11}$$

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < xy\} = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} \cdot \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < y\} \tag{3.12}$$

folgert man leicht aus der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, also Korollar 3.64. Dass $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ monoton ist, folgt direkt aus der Definition. Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ bijektiv ist. Wir vertauschen dazu die Rollen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}$, und folgern, dass es eine eindeutige Abbildung $\Psi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ gibt, die die Eigenschaften der Additivität, Multiplikativität und Monotonie erfüllt. Jetzt betrachten wir die Abbildungen

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \Psi \circ \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Beide dieser Abbildungen sind additiv, multiplikativ und monoton. Wir wissen aber, jetzt aus dem Spezialfall $\mathbb{S} = \mathbb{R}$, dass es nur eine solche Abbildung geben kann. Also gilt $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, und genauso auch $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathbb{S}}$. Damit ist gezeigt dass Φ bijektiv ist, da Ψ eine zu Φ inverse Abbildung ist. □

Übung 3.94. — Beweisen Sie (3.12) und (3.11) im Detail.

Übung 3.95. — Zeigen die Bijektivität von Φ im Beweis von Satz 3.93 wie folgt:

1. Benutzen Sie Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{S}$ um zu zeigen dass Φ surjektiv ist.
2. Zeigen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus von einem Körper K in einen Ring R injektiv ist, also insbesondere $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$.

Ein Ringhomomomorphismus $\varphi : K \to R$ ist eine Abbildung, die die Eigenschaften der Additivität und Multiplikativität in Satz 3.93 erfüllt.

Kapitel 4

Reellwertige Funktionen in einer Variablen

Wir haben im Kapitel 3 die reellen Zahlen eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften besprochen. In diesem Kapitel werden wir reellwertige Funktionen studieren, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, typischerweise auf einem Intervall, definiert sind. Der zentrale Begriff dieses Kapitels ist der der Stetigkeit.

4.1 Polynome und Polynomfunktionen

4.1.1 Summen und Produktnotation

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle oder komplexe Zahlen, oder allgemeiner Elemente einer additiv geschriebenen, kommutativen Gruppe. Wir wollen im Folgenden die allgemein gebräuchliche Summennotation

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

hier für die **Summe** von a_1 bis a_n, benutzen. Wir werden a_j als die **Summanden** und j als den **Index** oder die **Laufvariable** der Summe bezeichnen. Genauso wie bei der Diskussion kartesischer Produkte ist die Indexmenge selbst unwesentlich. Ist J eine endliche Menge, und ist für jedes $j \in J$ eine Zahl a_j gegeben, so schreiben wir

$$\sum_{j \in J} a_j$$

für die Summe aller Zahlen in der Menge $\{a_j \mid j \in J\}$. Für unendliche Indexmengen ist das in dieser Allgemeinheit sinnlos. Wir wollen ebenfalls die allgemein gebräuchliche Notation

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 \cdots a_n$$

für **Produkte** benutzen. Die a_j werden in diesem Zusammenhang als **Faktoren** bezeichnen, und j wiederum als den **Index**. Die Produktnotation die wir hier verwenden hat vordergründig nichts mit dem kartesischen Produkt von Mengen zu tun. Wir werden die Konventionen

$$\sum_{j\in\varnothing} a_j = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{j\in\varnothing} a_j = 1$$

für die Summe und das Produkt über die leere Indexmenge verwenden.

4.1. — Wir zeigen im Folgenden ein paar elementare Eigenschaften von Summen und Produkten, die wir anschliessend ohne weiteren Kommentar benutzen werden. Die Summe erfüllt die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ Elemente eines Vektorraums sind, und c ein Skalar ist. Des Weiteren gilt die Formel für die **Teleskopsumme**

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n$$

in der sich alle Terme bis auf den ersten und den letzten wegkürzen. Die Formel für die Teleskopsumme lässt sich zur **Abel-Summationsformel** verallgemeinern, welche überraschend viele Anwendungen in der Analysis und Zahlentheorie findet. Für eine ganze Zahl $1 \leq n$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ und c eines Körpers gilt

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=1}^{n}(ca_k) = c^n \cdot \prod_{k=m}^{n} a_k$$

analog zu den Formeln für Summen, und wir können ebenfalls analog zur Teleskopsumme **Teleskopprodukte** betrachten, in denen sich alle bis auf den ersten und letzten Faktor wegkürzen.

Übung 4.2. — Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Wir setzen $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie die Abel-Summationsformel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).$$

Verwenden Sie dazu die Gleichung $a_k = A_k - A_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Wenden Sie die Abel-Summation auf die Summe

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

an.

Übung 4.3. — Zeigen Sie, dass für komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ die verallgemeinerte **Dreiecksungleichung**

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

gilt.

Lemma 4.4 (Bernoulli'sche Ungleichung). — *Für alle reellen Zahlen $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+a)^n \geq 1 + na$.*

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 0$ haben wir $(1+a)^n = 1 = 1 + na$. Angenommen die Ungleichung $(1+a)^n \geq 1 + na$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Annahme an a ist $a \geq -1$, was in Kombination mit der Annahme an n

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

ergibt und damit den Induktionsschritt zeigt. Das Lemma folgt. □

Übung 4.5. — Verwenden Sie die Bernoulli'sche Ungleichung und das Archimedische Prinzip um folgende Aussage zu beweisen. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x^n \geq y$ gilt.

Übung 4.6. — Sei $q \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass sich jede natürliche Zahl m als Summe der Form $m = \sum_{k=0}^{N} a_k q^k$ schreiben lässt wobei $N \in \mathbb{N}$ und die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_N \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Diese Aussage kennen Sie schon für $q = 10$ wegen der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen und vielleicht auch für $q = 2$ wegen der Binärdarstellung. Für ein allgemeines q spricht man auch von der q-nären Darstellung.

Proposition 4.7 (Geometrische Summenformel). — *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{falls } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}$$

Beweis. Für $q = 1$ ist $q^k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Aussage folgt. Sei nun $q \neq 1$. Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$, was also den Induktionsanfang zeigt. Angenommen die Formel in der Proposition gilt bereits für n. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1},$$

womit der Induktionsschritt gezeigt ist und die Proposition folgt. □

Übung 4.8. — Verwenden Sie eine Teleskopsumme um die geometrische Summenformel für $q \neq 1$ herzuleiten.

Übung 4.9. — Zeigen Sie, dass die q-näre Darstellung einer natürlichen Zahl in Übung 4.6 eindeutig bestimmt ist. Das heisst, für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m = \sum_{k=0}^{\ell} a_k q^k$ und $a_\ell \neq 0$ sind $\ell \in \mathbb{N}$ und die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_\ell \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ eindeutig durch m bestimmt.

4.1.2 Polynome

Wir führen in diesem Abschnitt Polynome und Polynomfunktionen ein, beschränken uns dabei jedoch auf ein Minimum an Stoff. Polynome werden ausführlicher in der Algebra behandelt.

Definition 4.10. — Sei K ein beliebiger Körper. Ein **Polynom** f in einer Variable T und Koeffizienten in K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f = \ a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \tag{4.1}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_0, \ldots, a_n \in K$ die wir als **Koeffizienten** bezeichnen. Hierbei ist T ein Symbol, das man auch als **Variable** bezeichnet und das verwendet wird, um die Koeffzienten von einander zu trennen. Wir schreiben auch $T^1 = T$ und $aT^0 = a$ für alle $a \in K$. Weiter darf ein Summand der Form $0T^k$ für $k \in \mathbb{N}$ aus der Summe entfernt werden. Wir definieren den **Polynomring** $K[T]$ als die Menge der Polynome mit Koeffizienten in K in der Variablen T, wobei Addition und Multiplikation formal durch Kommutativität und Distributionsgesetz gegeben sind.

Definition 4.11. — Sei $f \in K[T]$ ein Polynom, gegeben wie in (4.1). Falls $a_n \neq 0$, so nennen wir a_n den **Leitkoeffizienten**, und die natürliche Zahl n den **Grad** von f. Wir definieren den Grad des Polynoms $f = 0$ formal als $-\infty$. Ein Polynom von Grad ≤ 0 heisst konstant **konstant**, ein Polynom vom Grad ≤ 1 heisst **affin**, und ein Polynom vom Grad ≤ 2 heisst **quadratisch**.

4.12. — Wir schreiben für ein Polynom $f \in K[T]$ gelegentlich auch $f(T)$, um anzuzeigen dass die Variable T heisst. Die Schreibweise für Polynome sowie die Tatsache dass wir das Symbol T Variable nennen, legt nahe dass Polynome in gewisser Weise Funktionen sind. Das ist nicht ganz falsch. Man kann ein Polynom $f \in K[T]$ in einem Element c von K **auswerten** in dem man die Variable T in (4.1) durch c ersetzt

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n = \sum_{k=0}^{n} a_k c^k$$

und somit ein Element $f(c) \in K$ erhält. Auf diese Weise definiert das Polynom f eine Funktion $c \mapsto f(c)$ von K nach K, die wir üblicherweise mit dem selben Symbol f notieren. Trotzdem ist das Polynom f, das heisst der formale Ausdruck (4.1) nicht dasselbe wie die Funktion $f : K \to K$ die durch (4.1) definiert wird. Das eine ist eine Formel, das andere eine Funktion, und es kann durchaus sein dass zwei verschiedene Formeln ein und dieselbe Funktion definieren. Das Phänomen ist, im Fall von Polynomen und durch Polynome definierte Funktionen, nur bei Koeffizienten in einem endlichen Körper möglich, und daher in der Analysis nur von nebensächlicher Bedeutung.

Beispiel 4.13. — Wir betrachten für den Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit drei Elementen $0, 1, 2$ die Polynome $f, g \in \mathbb{F}_3[T]$ die durch

$$f = T^3 + T + 1, \qquad g = 2T^7 + 1$$

gegeben sind. Das sind verschiedene Polynome, jedoch die assoziierten Funktionen sind gleich: Es gilt

$$f(0) = 1 = g(0), \quad f(1) = 0 = g(1), \quad f(2) = 2 = g(2)$$

und also $f(c) = g(c)$ für alle $c \in \mathbb{F}_3$.

Definition 4.14. — Eine **Polynomfunktion** auf $\mathbb{C}$ ist eine Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $z \mapsto f(z)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$. Analog dazu definieren wir auch Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$.

Proposition 4.15. — *Sei $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $M > 0$ eine reelle Zahl $R \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ auch $|f(z)| \geq M$ gilt.*

Beweis. Sei $f(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Wir definieren $q(T) \in \mathbb{C}[T]$ durch $q(T) = a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1T + a_0$, womit $f(T) = a_nT^n + q(T)$. Nun schätzen wir $|q(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ nach oben ab:

$$\begin{aligned}
|q(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0| \\
&\leq |a_{n-1}z^{n-1}| + \ldots + |a_1z| + |a_0| \\
&= |a_{n-1}||z^{n-1}| + \ldots + |a_1||z| + |a_0| \\
&\leq (|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)|z|^{n-1} = A|z|^{n-1},
\end{aligned}$$

wobei wir $A = |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ gesetzt haben und $|z| \geq 1$ in der Form $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ verwendet haben. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und $f(z) = a_nz^n + q(z)$ gilt somit

$$\begin{aligned}
|f(z)| \geq |a_nz^n| - |q(z)| &\geq |a_n||z|^n - A|z|^{n-1} \\
&= (|a_n||z| - A)|z|^{n-1} \geq |a_n||z| - A,
\end{aligned}$$

falls $|a_n||z| - A \geq 0$ oder äquivalenterweise $|z| \geq \frac{A}{|a_n|}$. Sei nun $M > 0$ beliebig. Dann wählen wir

$$R = \max\{1, \frac{A}{|a_n|}, \frac{A+M}{|a_n|}\}.$$

Falls nun $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung $|z| \geq R$ erfüllt, dann gilt $|z| \geq 1$ und $|z| \geq \frac{A}{|a_n|}$, wonach obige Ungleichungen ergeben

$$|f(z)| \geq |a_n||z| - A \geq |a_n|\frac{A+M}{|a_n|} - A = M,$$

was die Proposition beweist. □

Korollar 4.16. — *Die Zuordnung, die jedem Polynom $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ die zugehörige Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ zuweist, bijektiv.*

Beweis. Angenommen $f_1(T), f_2(T) \in \mathbb{C}[T]$ sind zwei Polynome, die $f_1(z) = f_2(z)$ für alle z in $\mathbb{C}$ erfüllen. Dann hat das Polynom $g(T) = f_1(T) - f_2(T)$ die Eigenschaft, dass $g(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Falls der Grad des Polynoms $g(T)$ grösser gleich Eins ist, widerspricht dies dem ersten Teil der Proposition. Also ist $g(T)$ konstant, womit $g(T) = 0$ gelten muss und daher sind die Polynome $f_1(T)$ und $f_2(T)$ identisch. Diesen Beweis kann man ebenso für reelle Polynome und die zugehörigen Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ durchführen. □

Proposition 4.15 und das zugehörige Korollar 4.16 gelten analog ebenso für reelle Polynome $f(T) \in \mathbb{R}[T]$ und reelle Polynomfunktionen.

4.1.3 Nullstellen und Interpolation

Beim Betrachten eines Polynoms interessiert man sich oft für sehr spezifische Punkte, die Nullstellen des Polynoms. Eine komplexe **Nullstelle** eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[T]$ ist eine Zahl $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = 0$. In Abschnitt 3.2 wurde bereits erwähnt, dass nach dem Fundamentalsatz der Algebra jede Gleichung der Form $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ und $n > 0$ eine Lösung über $\mathbb{C}$ besitzt, oder genauer gesagt, dass jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

Übung 4.17. — Verwenden Sie die Wurzelfunktion aus Übung 3.18, um zu zeigen, dass jedes Polynom mit reellen Koeffizienten von Grad 2 eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt. Geben Sie die Nullstellen explizit an.

4.18. — Ein wichtiges Hilfsmittel um Ringe von Polynomen zu studieren ist die Division mit Rest. Wie wir wissen existiert auf $\mathbb{N}$ eine Division von n durch d mit Rest gegeben durch $n = qd + r$. Dabei ist der Rest r strikt kleiner als d. Bei der Division mit Rest für Polynome etwa bei der Divison von f durch g, soll der Rest einen strikt kleineren Grad als g haben. Wir illustrieren dies im nachfolgenden Beispiel. In Analogie zu ganzen Zahlen sagen wir, dass ein Polynom g ein Polynom f **teilt** falls es ein Polynom q gibt mit $f = qg$.

Beispiel 4.19. — Wir betrachten die Polynome $f(T) = 3T^4 - 2T^2 + 5$ und $g(T) = T^2 + 1$, und behaupten, dass Polynome q und r existieren, so dass $f = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(g) = 2$ gilt. Um q und r zu konstruieren betrachten wir das Polynom $q_1(T) = 3T^2$. Dann ist der Grad von $q \cdot g$ vier und $r_1(T) = f(T) - q_1(T)g(T) = -5T^2 + 5$ hat einen strikt kleineren Grad als f. Wir wenden das gleiche Prinzip nochmals auf r_1 an und betrachten das Polynom q_2 gegeben durch $q_2(T) = -5$. Dann gilt $r_1(T) - q_2(T)g(T) = 10$. Insbesondere hat das Polynom $r_1 - q_2 \cdot g$ einen strikt kleineren Grad als das Polynom g, nämlich Null. Wir setzen somit $r = r_1 - q_2 \cdot g$. Dann gilt

$$r = r_1 - q_2 \cdot d = f - q_1 \cdot g - q_2 \cdot g = f - (q_1 + q_2) \cdot g.$$

Wenn wir $q = q_1 + q_2$ setzen, haben wir also $f = q \cdot g + r$ mit $\deg(r) = 0 < 2 = \deg(g)$ wie gewünscht. Im Gymnasium wurde das Vorgehen vielleicht durch folgendes Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{l}
(3T^4 - 2T^2 + 5) : (T^2 + 1) = 3T^2 - 5 \\
-\underline{3T^4 - 3T^2} \\
\qquad\quad - 5T^2 + 5 \\
\qquad\qquad \underline{5T^2 + 5} \\
\qquad\qquad\qquad 10
\end{array}$$

Übung 4.20. — Sei K eine Körper uns sei $g \in K[T]$ ein von Null verschiedenes Polynom. Zeigen Sie, dass es es für jedes Polynom $f \in K[T]$ zwei eindeutig bestimmte Polynome q, r mit $\deg(r) < \deg(g)$ und $f = q \cdot g + r$ gibt.

Übung 4.21. — Zeigen Sie, für ein beliebiges Polynom $f(T) \in K[T]$ und ein Element $z \in K$, dass das Polynom $T - z$ genau dann f teilt, wenn f bei z eine Nullstelle hat. Schliessen Sie daraus, dass ein von 0 verschiedenes Polynom vom Grad $n \geq 1$ höchstens n verschiedene Nullstellen in K besitzt.

4.22. — In Hinblick auf Übung 4.21 sagen wir auch, dass eine Nullstelle $z \in K$ von $f(T) \in K[T]$ **Vielfachheit** $k \in \mathbb{N}$ hat, falls $(T - z)^k$ das Polynom f teilt, aber $(T - z)^{k+1}$ das Polynom f nicht teilt. Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat n Nullstellen in K auch wenn man diese entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach zählt.

Übung 4.23. — Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g \in K[T]$ Polynome mit Grad kleiner gleich n. Angenommen f und g stimmen auf mehr als n Punkten überein, das heisst, $f(z) = g(z)$ gilt für mehr als n Elemente $z \in K$. Zeigen Sie, dass dies $f = g$ impliziert.

4.24. — Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, $z_1, \ldots, z_n \in K$ paarweise verschiedene Elemente, und $w_1, \ldots, w_n \in K$ beliebige Elemente. Nach Übung 4.23 gibt es höchstens ein Polynom $f \in K[T]$

vom Grad $n-1$ mit der Eigenschaft, dass

$$f(z_k) = w_k$$

für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Wir zeigen nun, dass es so ein Polynom tatsächlich gibt. Das Auffinden eines solchen Polynoms wird als **Lagrange Interpolation** bezeichnet. Wir beginnen damit, für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ das Polynom

$$Q_k(T) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{T - z_j}{z_k - z_j}$$

zu definieren. Die Notation bedeutet hier, dass wir das Produkt über alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ nehmen. Das Polynom $Q_k(T)$ hat Grad $n-1$, und es gilt

$$Q(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

wie man direkt durch Einsetzen von z_j in das Produkt sieht. Das gesuchte Polynom $f \in K[T]$ erhalten wir als Linearkombination

$$f(T) = \sum_{k=1}^{n} w_k Q_k(T)$$

wobei wir $f(z_k) = w_k$ wiederum direkt durch Einsetzen in die Formel sehen. Da alle Polynome Q_k vom Grad $n-1$ sind, ist f höchstens vom Grad $n-1$.

Übung 4.25. — Finden Sie mit Hilfe der Lagrange Interpolation das Polynom $f \in \mathbb{Q}[T]$ vom Grad 5 mit $f(k) = (-1)^k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots 5$. Zeichnen Sie den Graphen.

Applet 4.26 (Polynominterpolation)**.** *Wir stellen in diesem Applet die Polynom-Interpolation grafisch dar, wobei sie bis zu $n = 7$ Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verwenden können, um ein Polynom zu definieren. Nach einigen Experimenten sieht man bereits Nachteile der Polynominterpolation. Wenn man bespielsweise die Werte $x_1 < x_2$ nahe an einander wählt aber y_1 und y_2 nicht so nahe, so ergeben sich schnell grosse Koeffizienten des Interpolationspolynoms, was bespielsweise zwischen x_3 und x_4 mit $x_3 < x_4$ unerwartete Auswirkungen für die Funktionswerte des Polynoms hat.*

4.27. — Genauso wie man den Körper der rationalen Zahlen aus dem Ring der ganzen Zahlen konstruiert, kann man aus dem Polynomring $K[T]$ den Körper der **rationalen Funktionen** $K(T)$ konstruieren. Elemente von $K(T)$ sind Brüche $\frac{f}{g}$, wobei $f, g \in K[T]$ Polynome mit $g \neq 0$ sind. Mann nennt $\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion, auch wenn dieser formale Ausdruck nicht wirklich eine Funktion darstellt, da wir soweit keinen Definitionsbereich angegeben haben. Eine rationale Funktion $\frac{f}{g}$ kann man an allen Elementen von K auswerten die nicht eine

Nullstelle von g sind. Sind f und g teilerfremd, so nennt man die Nullstellen des Polynoms g auch **Pole** der rationalen Funktion $\frac{f}{g}$.

4.28. — Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heisst **algebraisch**, falls es ein von Null verschiedenes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$. Beispielsweise sind i und $\sqrt{2}$ algebraisch, denn $x^2 + 1$ hat i als Nullstelle und $x^2 - 2$ hat $\sqrt{2}$ als Nullstelle. Jede rationale Zahl ist algebraisch. Die Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen wird auch der **algebraische Abschluss** von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ genannt. Tatsächlich ist $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, im Moment fehlen uns aber noch die Mittel um das zu beweisen. Nicht-algebraische Zahlen nennt man **transzendent**. Interessanterweise sind die meisten Zahlen transzendent, wie die nächste Übung zeigt. Konkrete Beispiele von transzendenten Zahlen werden wir allerdings erst später angeben können.

Übung 4.29. — Zeigen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ abzählbar unendlich ist. Schliessen Sie daraus, dass der algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ von $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist.

4.2 Reellwertige Funktionen

4.2.1 Beschränktheit und Monotonie

In diesem Abschnitt behandeln wir zwei elementare Eigenschaften reellwertiger Funktionen, Beschränktheit und Monotonie. Als **reellwertige** Funktion bezeichnet man jede Funktion mit Wertebereich $\mathbb{R}$. Sobald wir über Monotonie sprechen werden wir annehmen, dass der Definitionsbereich der Funktionen die wir betrachten eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Informell spricht man dann von Funktionen in einer reellen **Variablen**. Den Begriff einer Variablen werden wir nicht und wollen wir nicht definieren.

4.30. — Für eine beliebige, nicht-leere Menge D definieren wir die Menge der **reellwertigen** Funktionen auf D als

$$\mathcal{F}(D) = \mathbb{R}^D = \{f \mid f : D \to \mathbb{R}\}$$

Die Menge $\mathcal{F}(D)$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei Addition und skalare Multiplikation durch

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad \text{und} \qquad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x)$$

für $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in D$ gegeben sind. Funktionen in $\mathcal{F}(D)$ lassen sich multiplizieren, und zwar durch

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$ und $x \in D$. Die Menge $\mathcal{F}(D)$ bildet mit diesen Operationen einen kommutativen Ring. Wir sagen, dass $x \in D$ eine **Nullstelle** von $f \in \mathcal{F}(D)$ ist, falls $f(x) = 0$ gilt. Die **Nullstellenmenge** von f ist durch $\{x \in D \mid f(x) = 0\}$ definiert. Wir definieren schliesslich eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{F}(D)$ durch

$$f_1 \leq f_2 \iff \forall x \in D : f_1(x) \leq f_2(x)$$

für $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$. Wir sagen, dass $f \in \mathcal{F}(D)$ **nicht-negativ** ist, falls $f \geq 0$ gilt.

Übung 4.31. — Seien $N_1, N_2 \subset D$ die Menge der Nullstellen von $f_1 \in \mathcal{F}(D)$ beziehungsweise $f_2 \in \mathcal{F}(D)$. Was ist die Nullstellenmenge von $f_1 f_2$?

Übung 4.32. — Überprüfen Sie, dass die oben definierte Relation $\leq$ auf $\mathcal{F}(D)$ tatsächlich eine Ordnung ist.

Definition 4.33. — Sei D eine nicht-leere Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen die Funktion f sei **von oben beschränkt**, falls die Wertemenge $f(D)$ von oben beschränkt ist, und wir sagen f sei **von unten beschränkt** ist, falls die Wertemenge $f(D)$ von

unten beschränkt ist. Wir sagen f sei **beschränkt** falls f von oben und von unten beschränkt ist.

4.34. — Wir bemerken, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ genau dann von oben beschränkt ist, wenn es eine reelle Zahl R gibt, mit der Eigenschaft dass $f(x) \leq R$ für alle $x \in D$ gilt. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt ist, wenn es eine reelle Zahl R gibt, mit der Eigenschaft dass $|f(x)| \leq R$ für alle $x \in D$ gilt.

Übung 4.35. — Sei D eine nicht-leere Menge und sei $\mathcal{B}(D) \subseteq \mathcal{F}(D)$ die Menge der beschränkten Funktionen von D nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(D)$ einen Untervektorraum von $\mathcal{F}(D)$ bildet, und dass für $f_1, f_2 \in \mathcal{B}(D)$ auch $f_1 f_2 \in \mathcal{B}$ liegt.

4.36. — Für eine Menge D können wir in Analogie zum reellen Vektorraum $\mathcal{F}(D)$ auch den komplexen Vektorraum

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(D) = \{f \mid f : D \to \mathbb{C}\}$$

der **komplexwertigen Funktionen** Funktionen auf D definieren. Analog zum Fall reellwertiger Funktionen sagen wir, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ **beschränkt** ist, falls die reellwertige Funktion $x \mapsto |f(x)|$ aud D beschränkt ist. Ein Punkt $x \in D$ ist eine **Nullstelle** einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, falls $f(x) = 0$ gilt.

Definition 4.37. — Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst

monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$,

streng monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) < f(y)$,

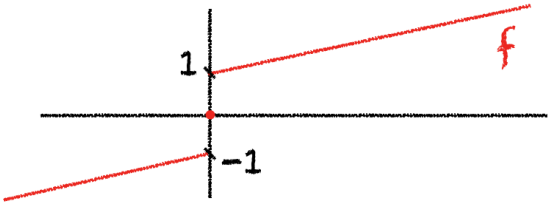
monoton fallend, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$,

streng monoton fallend, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) > f(y)$.

Wir nennen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **monoton**, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist, und **streng monoton**, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beispiel 4.38. — Sei $D = [a, b]$ ein Intervall, und $f : D \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^2$. Die Funktion f ist streng monoton wachsend falls $a \geq 0$ und streng monoton fallend falls $b \leq 0$. Falls $a < 0 < b$ gilt, so ist f nicht monoton. Im gegensatz dazu ist für jede Teilmenge D von $\mathbb{R}$ und jede ungerade Zahl n die Funktion $x \mapsto x^n$ auf D streng monoton wachsend. Die Abrundungsfunktion $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend. Eine konstante Funktion ist sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend. Umgekehrt ist eine Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}$ die sowohl monoton fallend als auch monoton wachsen ist, notwendigerweise konstant.

Übung 4.39. — Beweisen Sie die Behauptungen in Beispiel 4.38.



Figur 4.1: Eine streng monotone Funktion ist stets injektiv. Sie braucht jedoch nicht surjektiv zu sein. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{8}x + \operatorname{sgn}(x)$ streng monoton wachsend, aber nicht surjektiv, $\frac{1}{2}$ liegt nicht im Bild.

Übung 4.40. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit mindestens drei Elementen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Betrachten Sie die folgenden Aussagen über f, beschreiben Sie ihre Bedeutung in Worten, und geben Sie einen Beweis einiger Ihrer Behauptungen.

(i) $\forall x, y \in D : x < y \iff f(x) < f(y)$

(ii) $\forall x, y \in D : x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$

(iii) $\forall x, y, z \in D : x < y < z \implies \big(f(x) < f(y) < f(z) \vee f(x) > f(y) > f(z)\big)$

(iv) $\forall x, y, z \in D : x < y < z \implies \big(f(x) \leq f(y) \leq f(z) \vee f(x) \geq f(y) \geq f(z)\big)$

(v) $\forall x, y, z \in D : x \leq y \leq z \implies \big(f(x) < f(y) < f(z) \vee f(x) > f(y) > f(z)\big)$

(vi) $\forall x, y, z \in D : x \leq y \leq z \implies \big(f(x) \leq f(y) \leq f(z) \vee f(x) \geq f(y) \geq f(z)\big)$

Übung 4.41. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$ streng monoton wachsend. Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2 \in \mathcal{F}(D)$ streng monoton wachsend ist und dass für $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $af \in \mathcal{F}(D)$ streng monoton wachsend ist, falls $a > 0$ und streng monoton fallend ist, falls $a < 0$. Zeigen Sie, dass $f_1 f_2$ streng monoton wachsend ist, falls $f_1(x), f_2(x) > 0$ für alle $x \in D$.

Applet 4.42 (Monotonie von Einschränkungen)**.** *Bei vielen aber nicht allen Funktion f (definiert auf Teilmengen von $\mathbb{R}$) erhält man eine monotone Funktion mittels Einschränkung von f auf kleinere Intervalle.*

4.2.2 Stetigkeit

Definition 4.43. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **stetig bei einem Punkt** $x_0 \in D$ ist, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

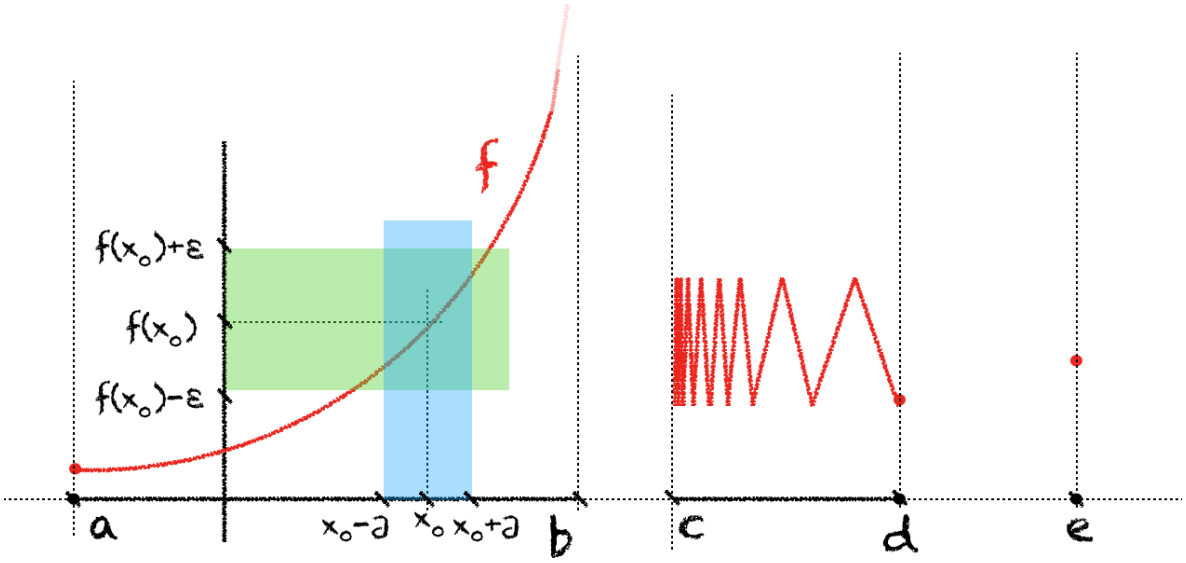
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Die Funktion f ist **stetig auf** D, falls sie bei jedem Punkt von D stetig ist. Formal ist Stetigkeit von f auf D also durch

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

definiert.

4.44. — Die folgende Illustration zeigt eine stetige Funktion auf $D = [a, b) \cup (c, d] \cup \{e\}$. Wir sehen, dass f insbesondere bei x_0 stetig ist: Egal wie klein man $\varepsilon > 0$ wählt gilt für ein geeignetes $\delta > 0$, dass für alle x, die δ-nahe bei x_0 liegen, auch $f(x)$ ε-nahe an $f(x_0)$ ist.

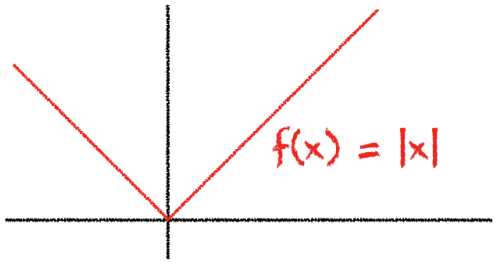


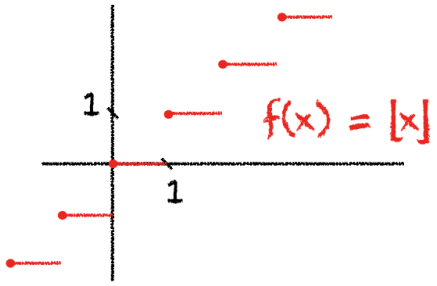
Applet 4.45 (Stetigkeit). *Wir betrachten eine Funktion, die an den meisten (aber nicht allen) Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.*

Beispiel 4.46. — Seien a und b reelle Zahlen. Die affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = ax + b$ ist stetig. Ist $a = 0$, so ist die Funktion konstant und somit stetig. Sei also $a \neq 0$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt $|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachtet man also die Wahl $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ und ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, so ist

$$|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0| < |a|\delta = \varepsilon$$

und somit ist f stetig. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|$ ist ebenfalls stetig. Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung $\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit kann man mit der Wahl $\delta = \varepsilon$ erreichen, dass wenn $|x - x_0| < \delta$ auch $\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, was die Stetigkeit zeigt.





Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist bei Punkten in $\mathbb{Z}$ nicht stetig. Ist $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt für jedes $\delta > 0$, dass $|(n - \frac{1}{2}\delta) - n| < \delta$ und

$$\left|\lfloor n - \tfrac{1}{2}\delta \rfloor - \lfloor n \rfloor\right| = \lfloor n \rfloor - \lfloor n - \tfrac{1}{2}\delta \rfloor \geq n - (n-1) = 1.$$

Damit ist die Stetigkeitsbedingung bei $n \in \mathbb{Z}$ für $\varepsilon < 1$ nicht erfüllt.

Übung 4.47. — Zeigen Sie, dass die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ beide stetig sind.

Übung 4.48. — Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Teilmenge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei D' ein Teilmenge von D. Zeigen Sie dass die Einschränkung $f|_{D'}$ stetig ist.

Proposition 4.49. — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die bei einem Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Dann sind auch die Funktionen $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ und af_1 für $a \in \mathbb{R}$ stetig bei x_0. Insbesondere bildet die Menge der stetigen Funktionen*

$$\mathcal{C}(D) = \{f \in \mathcal{F}(D) \mid f \text{ ist stetig}\}$$

einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(D)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f_1 und f_2 bei x_0 ststig sind, existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in D$ gilt

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta_1 &\implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x - x_0| < \delta_2 &\implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Wir setzen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \implies &|(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(x_0)| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir, dass $f_1 + f_2$ bei $x_0 \in D$ stetig ist. Das Argument für $f_1 f_2$ ist ähnlich, aber etwas komplizierter. Wir beginnen mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}|f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x) + f_1(x_0)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| \\ &\leq |f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x)| + |f_1(x_0)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| \\ &= |f_1(x) - f_1(x_0)||f_2(x)| + |f_1(x_0)||f_2(x) - f_2(x_0)|\end{aligned}$$

für $x \in D$ unter Verwendung der Dreiecksungleichung. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, so dass für $x \in D$

$$\begin{aligned}|x - x_0| < \delta_1 &\implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(|f_2(x_0)| + 1)} \\ |x - x_0| < \delta_2 &\implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(|f_1(x_0)| + 1)}\}\end{aligned}$$

erfüllt sind. Dann gilt für ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dass

$$|f_2(x)| = |f_2(x) - f_2(x_0) + f_2(x_0)| \leq |f_2(x) - f_2(x_0)| + |f_2(x_0)| < 1 + |f_2(x_0)|$$

und damit

$$|f_1(x) - f_1(x_0)||f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|f_2(x_0)| + 1)}(1 + |f_2(x_0)|) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für das zweite Argument gilt ebenso

$$|f_1(x_0)||f_2(x) - f_2(x_0)| \leq |f_1(x_0)|\frac{\varepsilon}{2(|f_1(x_0)| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Gemeinsam erhalten wir $|f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| < \varepsilon$ wie gewünscht. Die Aussage über af_1 für $a \in \mathbb{R}$ folgt mit Obigem und der Tatsache, dass die konstante Funktion mit Wert $a \in \mathbb{R}$ stetig ist. Insbesondere ist konstante Nullfunktion ein Element von $\mathcal{C}(D)$, und somit ist $\mathcal{C}(D)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(D)$. □

Korollar 4.50. — *Polynomfunktionen sind stetig, das heisst,* $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Beweis. Wie wir in Beispiel 4.46 gesehen haben, ist die Funktion $p(x) = x$ stetig und konstante Funktionen sind stetig. Vollständige Induktion und Proposition 4.49 zeigen, dass jede Polynomfunktion $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ stetig ist. □

Proposition 4.51. — *Seien D_1 und D_2 Teilmengen von $\mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D_1$. Sei $f : D_1 \to D_2$ ist eine bei x_0 stetige Funktion und sei $g : D_2 \to \mathbb{R}$ ist eine bei $f(x_0)$ stetige Funktion. Dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ bei x_0 stetig. Insbesondere ist die Verknüpfung von stetigen Funktionen wieder stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von g bei $f(x_0)$ ein $\eta > 0$, so dass für alle $y \in D_2$

$$|y - f(x_0)| < \eta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

gilt. Da $\eta > 0$ ist und f bei x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D_1$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta$$

gilt. Zusammen ergibt sich, dass für alle $x \in D_1$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

gilt. Dies beweist dass $g \circ f$ an der Stelle x_0 stetig ist. □

Übung 4.52. — Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig ist. Schliessen Sie, dass Funktionen $D \to \mathbb{R}$ der Art $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig sind, wobei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, und g auf D keine Nullstelle hat.

Übung 4.53. — Seien $a < b < c$ reelle Zahlen, und $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in [a, b) \\ f_2(x) & \text{falls } x \in [b, c] \end{cases}$$

genau dann stetig ist, wenn $f_1(b) = f_2(b)$ gilt.

Übung 4.54. — Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ auch $f^{-1}(U)$ offen ist.

Übung 4.55. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Wenn f bei $x_0 \in D$ stetig ist, dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0 und ein $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in D \cap U$.
2. Wenn f bei $x_0 \in D$ stetig ist und $f(x_0) \neq 0$ ist, dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass $f(x)f(x_0) > 0$ für alle $x \in D \cap U$, das heisst, $f(x)$ und $f(x_0)$ haben dasselbe Vorzeichen.

Übung 4.56 (Challenge). — In dieser Übung möchten wir zeigen, dass es zu einer monotonen Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ höchstens abzählbar viele Punkte geben kann, bei denen f nicht stetig ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $A \subseteq [a, b]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f.

(i) Sei $x \in A$. Wir setzen

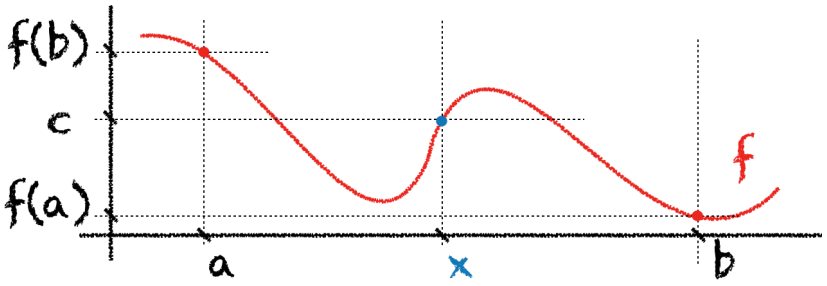
$$f_-(x) = \sup\{f(x') \mid x' \in [a, b], x' < x\}, \quad f_+(x) = \inf\{f(x') \mid x' \in [a, b], x' > x\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_-(x) < f_+(x)$ gilt. Wählen Sie anschliessend (Auswahlaxiom!) eine rationale Zahl $g(x)$ in $(f_-(x), f_+(x))$.

(ii) Zeigen Sie, dass $g : x \in A \to g(x) \in \mathbb{Q}$ injektiv ist und schliessen Sie auf die Aussage.

4.2.3 Der Zwischenwertsatz

In diesem Abschnitt beweisen wir einen fundamentalen Satz, der die Idee formalisiert, dass der Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall eine durchgehende Kurve darstellt und also keine Sprünge macht.



Hier wird gezeigt, dass eine stetige Funktion f auf einem im Definitionsbereich enthaltenen Intervall $[a, b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Wie wir sehen werden, verwendet der Beweis die Existenz des Supremums, und damit indirekt das Vollständigkeitsaxiom.

Satz 4.57 (Zwischenwertsatz). — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $[a, b]$ ein in D enthaltenes Intervall. Für jede reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ gibt es ein $x \in [a, b]$, so dass $f(x) = c$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $a < b$ und $f(a) \leq f(b)$ gilt, denn falls man $f(a) > f(b)$ hat, so betrachtet man zuerst $-f$ und bemerkt, dass die Aussage des Satzes für $-f$ die Aussage des Satzes für f impliziert. Sei nun $c \in [f(a), f(b)]$. Falls $c = f(a)$ oder $c = f(b)$ gilt, sind wir fertig. Also angenommen es gelte $f(a) < c < f(b)$. Wir definieren eine Menge $X \subseteq [a, b]$ durch

$$X = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\}$$

und bemerken, dass $a \in X$ gilt. Die Menge X ist also nicht leer und von oben beschränkt. Nach Satz 3.51 existiert daher das Supremum $x_0 = \sup(X) \in [a, b]$. Wir werden nun die Stetigkeit von f bei x_0 verwenden, um zu zeigen, dass $f(x_0) = c$ gilt.

Angenommen $f(x_0) < c$. Dann folgt $x_0 < b$ wegen $f(b) > c$ und $x_0 \in [a, b]$. Wir wenden nun die Stetigkeit von f bei x_0 an und finden für $\varepsilon = c - f(x_0) > 0$ ein $\delta > 0$ so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < c - f(x_0)$$

gilt. Da $x_0 < b$ ist, existiert ein $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Für dieses x gilt dann

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) < f(x_0) + c - f(x_0) = c.$$

Also muss x in X liegen, was aber $\sup(X) = x_0 < x$ widerspricht. Es folgt daraus, dass $f(x_0) \geq c$ gilt. Angenommen $f(x_0) > c$. Dann folgt $x_0 > a$ wegen $f(a) < c$. Wir verwenden wieder die Stetigkeit von f bei x_0 und finden zu $\varepsilon = f(x_0) - c$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < f(x_0) - c.$$

Für $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap [a, b]$ gilt dadurch

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > f(x_0) - (f(x_0) - c) = c,$$

wodurch $x \notin X$ und daher $(x_0 - \delta, x_0) \cap [a, b] \cap X = \varnothing$. Also ist $x_0 - \delta$ eine obere Schranke von X, was aber $x_0 = \sup(X)$ widerspricht. Daher gilt $f(x_0) = c$ und der Satz folgt. □

Übung 4.58. — Zeigen Sie, dass jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von ungeradem Grad eine Nullstelle besitzt.

Übung 4.59. — Sei I ein nicht-leeres Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

Übung 4.60. — Wir nennen eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ **zusammenhängend** , wenn es keine zwei offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}$ mit

$$(U \cap M) \cup (V \cap M) = M \qquad \text{und} \qquad U \cap M \neq \varnothing,\ V \cap M \neq \varnothing \tag{4.2}$$

gibt. Ziel dieser Übung ist es zu zeigen, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ gerade die Intervalle sind. Siehe dazu auch Proposition 10.79.

1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die nicht ein Intervall ist. Zeigen Sie unter Verwendung von Übung 3.78, dass M nicht zusammenhängend ist.

2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht leeres Intervall und $U, V \subset \mathbb{R}$ offen wie in Gleichung (4.2) für $M = I$. Seien $u \in U \cap I$ und $v \in V \cap I$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u < v$. Betrachten Sie die Menge $S = \{s \in \mathbb{R} \mid [u, s] \subseteq U\}$ und zeigen Sie in Analogie zum Beweis des Zwischenwertsatzes, dass das Supremum von S weder in U noch in V, aber in I liegen muss.

Übung 4.61. — Beweisen Sie den Zwischenwertsatz in folgenden Schritten. Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Zeigen Sie für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$, dass $f^{-1}(U)$ von der Form $U' \cap I$ für eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}$ ist.

2. Zeigen Sie, dass das Bild von f zusammenhängend ist, und folgern Sie daraus den Zwischenwertsatz unter Verwendung von Übung 4.60.

4.2.4 Der Satz über die Umkehrabbildung

In diesem Teilabschnitt zeigen wir, dass jede stetige, streng monotone Abbildung eine inverse Abbildung besitzt, die ebenfalls stetig ist.

Satz 4.62 (Umkehrsatz). — *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und die Abbildung $f : I \to f(I)$ hat eine stetige, streng monotone inverse Abbildung $f^{-1} : f(I) \to I$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass I nicht leer und nicht ein einzelner Punkt ist, und auch, dass f streng monoton wachsend ist, andernfalls ersetzt man f mit $-f$. Wir schreiben $J = f(I)$, und bemerken zuerst, dass die Funktion $f : I \to J$ bijektiv ist, da sie per Definition surjektiv ist, und auf Grund der strengen Monotonie auch injektiv ist. Somit existiert eine eindeutig bestimmte Umkehrabbildung $g = f^{-1} : J \to I$. Die Funktion g ist streng monoton wachsend: Da f streng monoton wachsend ist, gilt $x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$, was zu

$$g(y_1) < g(y_2) \iff y_1 < y_2$$

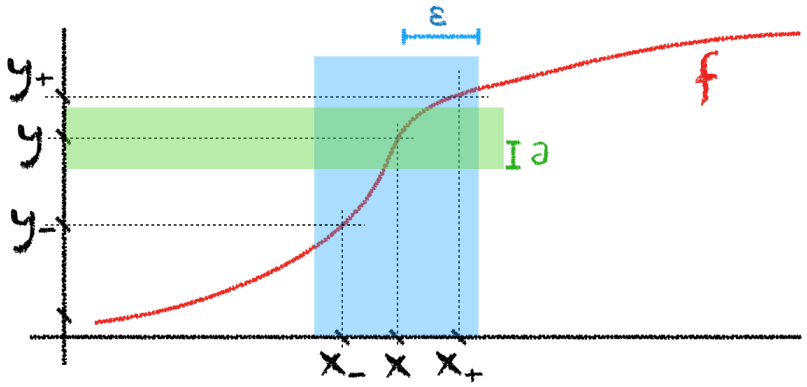
für alle $y_1, y_2 \in J$ äquivalent ist.

Seien $f(x_1)$ und $f(x_2)$ Elemente von J, mit $f(x_1) < f(x_2)$, also $x_1 < x_2$. Um zu zeigen dass J ein Intervall ist, genügt es nach Übung 3.78 zu zeigen, dass jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$ ein Element von J ist. Das folgt jedoch unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz 4.57.

Es bleibt zu zeigen, dass $g = f^{-1}$ stetig ist. Sei also $y_0 \in J$ und $\varepsilon > 0$. Wir definieren den Punkt $x_0 = g(y_0)$, das Intervall $U := I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, und das Intervall $V = f(U)$. Tatsächlich sind U und V Intervalle, U ist ein Durchschnitt von Intervallen, und V das Bild des Intervalls U unter einer stetigen Funktion. Wir behaupten, dass ein $\delta > 0$ existiert, so, dass

$$J \cap (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq V \tag{4.3}$$

gilt. Falls $x_0 \in I$ nicht ein Randpunkt des Intervalls I ist, dann gibt es x_- und $x_+ \in I$ mit $x_0 - \varepsilon < x_- < x_0 < x_+ < x_0 + \varepsilon$. Dann sind $y_+ = f(x_+)$ und $y_- = f(x_-)$ Elemente von V, und es gilt $y_- < y_0 < y_+$. Insbesondere gilt $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ für $\delta = \min\{y_0 - y_-, y_+ - y_0\}$, und damit gilt (4.3).



Falls x_0 ein Randpunkt des Intervalls I ist, etwa das Maximum von I, dann gibt es ein $x_- \in I$ mit $x_0 - \varepsilon < x_- < x_0$. Hier haben wir benutzt, dass I nicht aus nur einem Punkt besteht. Da f strikt monoton wachsend ist, ist $y_0 = f(x_0)$ das Maximum von J, und es gilt (4.3) mit $\delta = x_0 - x_-$. Falls x_0 das Minimum von I ist, so existiert genauso $x_+ \in I$ mit $x_0 < x_+ < x_0 - \varepsilon$, und (4.3) gilt für $\delta = x_+ - x_0$.

Die Stetigkeit der Umkehrfunktion folgt nun direkt aus (4.3), denn für alle $y = f(x) \in J$ mit $|y_0 - y| < \delta$ gilt demnach $y \in V$, also $x = g(y) \in U$, und damit $|g(y_0) - g(y)| = |x_0 - x| < \varepsilon$, was zu zeigen war. □

4.63. — Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Polynomfunktion $[0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend und surjektiv. Um Surjektivität einzusehen betrachten wir ein beliebiges $c \in [0, \infty)$. Nach der Bernoullischen Ungleichung, Lemma 4.4, gilt $(c+1)^n > nc \geq c$, womit c zwischen $0 = 0^n$ und $(c+1)^n$ liegt. Aus dem Zwischenwertsatz 4.57 folgt nun, dass es ein x zwischen 0 und $c+1$ gibt, für das $x^n = c$ ist.

Nach dem Umkehrsatz existiert eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrabbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$, die wir mit

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

notieren, und die **n-te Wurzel** genannt wird. Des Weiteren definieren wir für $x \in [0, \infty)$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{und} \qquad x^{-\frac{m}{n}} = (x^{\frac{m}{n}})^{-1}$$

und für $x \in (0, \infty)$.

Übung 4.64. — Zeigen Sie die Rechenregeln

$$(xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{m}{n}}, \quad x^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}} = x^{\frac{m_1}{n_1}} x^{\frac{m_2}{n_2}}, \quad (x^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}} = x^{\frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2}}$$

für positive Basen $x, y \in (0, \infty)$ und rationale Exponenten $\frac{m}{n}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$.

Lemma 4.65. — *Seien $m \geq 1$ und $k \geq 1$ ganze Zahlen. Die m-te Wurzel $\sqrt[m]{k}$ ist genau dann rational, wenn sie eine ganze Zahl ist.*

Beweis. Angenommen $\sqrt[m]{k} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ für zwei natürliche Zahlen $p \geq 1$ und $q \geq 1$. Nach Kürzen mit dem grössten gemeinsamen Teiler können wir annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Dann ist aber auch $k = \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$ ein gekürzter Bruch, denn jeder Primfaktor von p^m ist ein Primfaktor von p und jeder Primfaktor von q^m ist ein Primfaktor von q. Somit sind p^m und q^m teilerfremd. Nach Annahme ist aber $\frac{p^m}{q^m} = k$ eine ganze Zahl, was $q^m \mid p^m$, und also $q^m = 1$ und damit $q = 1$ impliziert. Dann ist $k = p^m$ und $\sqrt[m]{k} = p$ eine ganze Zahl. Die Umkehrung folgt einfach aus $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. $\square$

Übung 4.66. — Sei $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sqrt[m]{k}$ genau dann rational ist, wenn jeder Primfaktor p in der Primfaktorzerlegung von k die Eigenschaft $p^a | k$ und $p^{a+1} \nmid k$ für eine durch m teilbare natürliche Zahl a hat.

4.3 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen – sogenannten **kompakten** Intervallen – besondere Eigenschaften besitzen.

4.3.1 Beschränktheit und Extremwerte

Satz 4.67. — *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt. Das heisst, es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wir betrachten die Teilmenge

$$X = \{t \in [a, b] \mid f|_{[a,t]} \text{ ist beschränkt}\}$$

von $[a, b]$. Da $[a, a] = \{a\}$ gilt, liegt $a \in X$, womit $X \subseteq [a, b]$ eine nicht-leere, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Nach Satz 3.51 existiert daher das Supremum $s_0 = \sup(X)$ von X. Dieses Supremum ist ein Element von $[a, b]$, da zum einen $a \in X$ liegt und zum anderen X in $[a, b]$ enthalten ist und somit b eine obere Schranke ist. Da f bei s_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so, dass für alle $x \in [a, b]$ die Implikation

$$|x - s_0| < \delta \implies |f(x) - f(s_0)| < 1$$

gilt. Wir definieren $t_0 = \max\{a, s_0 - \delta\}$ und $t_1 = \min\{b, s_0 + \delta\}$, womit

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(s_0)| + |f(s_0)| < 1 + |f(s_0)| \tag{4.4}$$

für alle $x \in (t_0, t_1)$ gilt. Da $s_0 - \delta$ keine obere Schranke von X ist, gibt es ein $t \in X$ mit $t > s_0 - \delta$. Daher ist $f|_{[a,t]}$ beschränkt und es existiert ein $M_0 > 0$ mit $|f(x)| \leq M_0$ für alle $x \in [a, t]$. Es gilt $t \geq t_0 = \max\{a, s_0 - \delta\}$ und daher $[a, t] \cup (t_0, t_1) = [a, t_1)$. Auf Grund von Gleichung (4.4) und der Wahl von M_0 gilt somit

$$|f(x)| \leq \max\{M_0, 1 + |f(s_0)|, |f(t_1)|\}$$

für alle $x \in [a, t_1]$. Wir schliessen, dass $t_1 \in X$ liegt und $t_1 \leq s_0$ gilt. Da aber $t_1 = \min\{b, s_0 + \delta\}$ per Definition, muss $t_1 = b$ sein. Also ist f auf $[a, b]$ beschränkt. □

Übung 4.68. — Finden Sie Beispiele für…

1. …eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall.
2. …eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall.
3. …eine unbeschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall, die nur in einem einzigen Punkt unstetig ist.

Definition 4.69. — Sei D eine Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf D. Wir sagen, dass die Funktion f ihr **Maximum** in einem Punkt $x_0 \in D$ **annimmt** $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Wir bezeichnen $f(x_0)$ als das **Maximum** von f. Analog **nimmt** f ihr **Minimum** in $x_0 \in D$ **an**, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Im dem Fall nennen wir $f(x_0)$ das **Minimum** von f. Maxima und Minima bezeichnet man summarisch als **Extrema** oder **Extremwerte**.

Satz 4.70. — *Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.*

Beweis. Nach Satz 4.67 ist f beschränkt, womit nach Satz 3.51 das Supremum $S = \sup f([a, b])$ existiert. Wir nehmen nun an, dass $f(x) < S$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, das heisst, dass die Funktion f ihr Maximum nicht annimmt, und führen diese Annahme auf einen Widerspruch. Falls also $f(x) < S$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist

$$F : [a, b] \to (0, \infty), \qquad x \mapsto \frac{1}{S - f(x)}$$

eine wohldefinierte Funktion auf $[a, b]$. Diese ist nach Proposition 4.51 stetig. Nach Satz 4.67 ist F also beschränkt, womit ein $M > 0$ mit $F(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ existiert. Somit gilt $F(x)^{-1} > M^{-1}$, oder anders ausgedrückt

$$f(x) \leq S - \frac{1}{M}$$

für alle $x \in [a, b]$. Letzteres widerspricht aber der Definition von S als das Supremum von $f([a, b])$. Durch Anwendung des selben Arguments auf $-f$ ergibt sich ebenso, dass die Funktion f ihr Minimum annimt. □

Übung 4.71. — Nimmt jede stetige Funktion f auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ ihr Maximum an?

4.3.2 Gleichmässige Stetigkeit

Ein weiterer grundlegender Satz über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen verwendet folgende Variante des Begriffs Stetigkeit.

Definition 4.72. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ eine heisst **gleichmässig stetig**, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

für alle $x, y \in D$ gilt.

Übung 4.73. — Zeigen Sie, dass die Polynomfunktion $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ stetig, aber nicht gleichmässig stetig ist. Zeigen Sie auch, dass die Einschränkung von f auf $[0,1]$ gleichmässig stetig ist.

Satz 4.74. — *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall für $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmässig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren die Teilmenge

$$X = \Big\{ t \in [a,b] \;\Big|\; \exists \delta > 0 \, \forall x_1, x_2 \in [a,t] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \Big\}$$

von $[a,b]$. Wir möchten zeigen, dass $b \in X$ liegt. Die Menge X ist nicht leer, da a ein Element von X ist. Ist t ein Element von X und $t' \in [a,t]$, so ist auch t' ein Element von X. Es folgt daraus, dass X ein Intervall ist, nämlich

$$X = [a, s_0] \qquad \text{oder} \qquad X = [a, s_0) \tag{4.5}$$

wobei s_0 für das Supremum von X steht. Aufgrund der Stetigkeit von f bei $s_0 \in [a,b]$ existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$ die Implikation

$$|x - s_0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(s_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Für $x_1, x_2 \in [a,b] \cap (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)$ gilt damit nach der Dreiecksungleichung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(s_0)| + |f(s_0) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{4.6}$$

Wegen (4.5) ist $t_0 = \max\{a, s_0 - \frac{1}{2}\delta_1\}$ ein Element von X, und daher existiert ein $\delta_0 > 0$ mit

$$\forall x_1, x_2 \in [a, t_0] : \quad |x_1 - x_2| < \delta_0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Wir definieren $t_1 = \min\{b, s_0 + \frac{1}{2}\delta_1\}$ sowie $\delta = \min\{\delta_0, \frac{1}{2}\delta_1\}$ und behaupten, dass für diese Zahlen

$$\forall x_1, x_2 \in [a, t_1] : \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{4.8}$$

gilt. Für den Beweis dieser Behauptung nehmen wir also $x_1, x_2 \in [a, t_1]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

- Angenommen $|x_1 - s_0| \leq \frac{1}{2}\delta_1$ oder $|x_2 - s_0| \leq \frac{1}{2}\delta_1$. Wir gehen ohne Beschränkung der Allgemeinheit von ersterem aus. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

  $$|x_2 - s_0| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - s_0| < \delta + \tfrac{1}{2}\delta_1 \leq \tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{2}\delta_1 = \delta_1$$

  und somit $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ nach (4.6).

- Angenommen $|x_1 - s_0| > \frac{1}{2}\delta_1$ und $|x_2 - s_0| > \frac{1}{2}\delta_1$. Da auch $x_j \leq t_1 \leq s_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ für $j \in \{1, 2\}$ gilt, folgt $x_j \leq s_0 - \frac{1}{2}\delta_1 \leq t_0$ für $j \in \{1, 2\}$ und insbesondere $x_1, x_2 \in [a, t_0]$. Nach Gleichung (4.7) gilt also auch in diesem Fall $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Dies beweist die Behauptung, womit auch $t_1 \in X$ gilt. Da aber s_0 das Supremum von X ist und kleiner gleich $t_1 = \min\{b, s_0 + \frac{1}{2}\delta_1\}$ ist, muss $t_1 = s_0$ sein. Dies ist per Definition von t_1 aber nur dann möglich, wenn $s_0 = b$ ist, womit wir $b = s_0 = t_1 \in X$ gezeigt haben. Das heisst, es existiert ein $\delta > 0$, welches für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ die Implikation

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

erfüllt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die gleichmässige Stetigkeit von f. □

Übung 4.75. — Gilt die Aussage von Satz 4.74 auch für stetige Funktionen auf dem offenen Intervall $(0, 1)$?

Übung 4.76. — Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\varepsilon > 0$. Für jeden Punkt $x_0 \in D$ definieren wir

$$\Delta(x_0) = \sup\big\{\delta \in [0, 1] \;\big|\; x, y \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big\}. \tag{4.9}$$

1. Zeigen Sie, dass die Menge rechts in (4.9) nicht-leer ist und $\Delta(x_0) \in [0, 1]$ somit wohldefiniert ist.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x_0 \mapsto \Delta(x_0)$ stetig auf D ist, und dass für jedes $x_0 \in D$ die Implikation $|x - y| < \Delta(x_0) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.

Verwenden Sie die oben konstruierte Funktion Δ und Satz 4.70, um Satz 4.74 zu beweisen.

Übung 4.77. — In dieser Übung betrachten wir einen weiteren Stetigkeitsbegriff.

1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir nennen eine reellwertige Funktion f auf D **Lipschitz-stetig**, falls ein $L \geq 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$. Geben Sie Beispiele von Lipschitz-stetigen Funktionen und zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmässig stetig ist.

2. Es sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Wurzelfunktion, $f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass $f_{[0,1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nicht Lipschitz-stetig ist, und dass $f_{[1,\infty)} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist. Folgern Sie daraus, dass die daraus, dass die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig ist.

Kapitel 5

Das Riemann Integral

Wir werden in diesem Kapitel die Idee von Abschnitt 1.1 aufgreifen und diese mit Hilfe des Supremums und des Infimums, also implizit des Vollständigkeitsaxioms, zum Begriff des Riemann-Integrals ausbauen.

5.1 Treppenfunktionen und deren Integral

5.1.1 Zerlegungen und Treppenfunktionen

Für die nachfolgende Diskussion fixieren wir zwei reelle Zahlen $a < b$, und arbeiten mit dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition 5.1. — Eine **Zerlegung** von $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Die Punkte $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ werden die Teilungspunkte der Zerlegung genannt.

5.2. — Formal gesehen ist eine Zerlegung von $[a, b]$ also eine endliche Teilmenge von $[a, b]$ die a und b enthält, gemeinsam mit der Auflistung ihrer Elemente in aufsteigender Ordnung. Eine Zerlegung induziert auch eine spezielle Art von Partition von $[a, b]$, nämlich

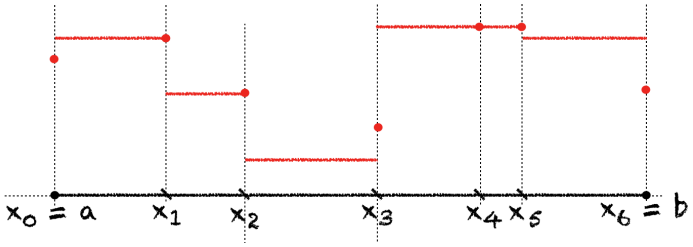
$$[a, b] = \{x_0\} \cup (x_0, x_1) \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup \{x_n\}$$

die fortan implizit verwendet wird. Eine Zerlegung $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$ wird **Verfeinerung** von $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ genannt, falls

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$$

gilt. Der Begriff der Verfeinerung führt zu einer Ordnungsrelation auf der Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. Wir halten fest, dass je zwei beliebige Zerlegungen von $[a, b]$ immer eine gemeinsame Verfeinerung haben.

Definition 5.3. — Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **Treppenfunktion**, falls es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ von $[a, b]$ gibt, so, dass für $k = 1, 2, \ldots, n$ die Einschränkung von f auf das offene Intervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist. Wir sagen in dem Fall auch die Funktion f sei eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Figur 5.1: Der Graph einer Treppenfunktion auf dem Intervall $[a, b]$.

Proposition 5.4. — *Seien f_1 und f_2 Treppenfunktionen auf $[a, b]$ und seien $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $s_1 f_1 + s_2 f_2$ eine Treppenfunktion.*

Beweis. Es existieren Zerlegungen von $[a, b]$ bezüglich welcher f_1 und f_2 Treppenfunktionen sind. Zu diesen Zerlegungen gibt es eine gemeinsame Verfeinerung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ bezüglich welcher f_1 und f_2 Treppenfunktionen sind. Die Funktionen f_1 und f_2 sind also beide konstant auf den offenen Intervallen (x_{k-1}, x_k), und demnach auch $s_1 f_1 + s_2 f_2$, was bedeutet dass $s_1 f_1 + s_2 f_2$ eine Treppenfunktion bezüglich $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ist. □

5.5. — Konstante Funktionen, und insbesondere die konstante Funktion mit Wert 0 sind Treppenfunktionen. Nach Proposition 5.4 ist die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$

$$\mathcal{TF}([a, b]) = \{f \in \mathcal{F}([a, b]) \mid f \text{ ist eine Treppenfunktion}\}$$

ein Vektorraum, oder genauer, ein Unterraum des Vektorraums $\mathcal{F}([a, b])$ der reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$. Genau wie im Beweis von Proposition 5.4 kann man zeigen, dass auch das Produkt zweier Treppenfunktionen wiederum eine Treppenfunktion ist, das heisst, Treppenfunktionen bilden auch einen Ring. Schliesslich bemerken wir noch, dass Treppenfunktionen beschränkt sind, da sie endliche Wertemengen haben.

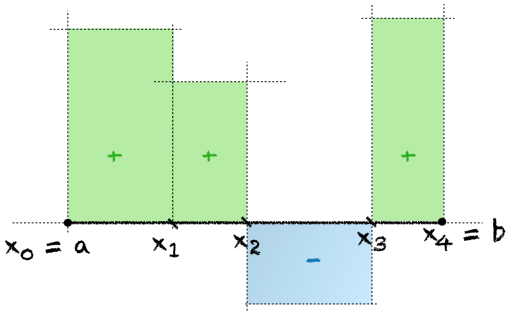
5.1.2 Das Integral einer Treppenfunktion

Definition 5.6. — Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich einer Zerlegung $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ von $[a, b]$. Wir definieren das **Integral** von f auf $[a, b]$ als die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \tag{5.1}$$

wobei c_k den Wert von f auf dem Intervall (x_{k-1}, x_k) bezeichnet.

Für den Moment kommt in der Notation (5.1) den einzelnen Symbolen $\int$ und dx keine Bedeutung zu. Ursprünglich steht das Symbol $\int$ für ein S für „Summe“, und das Symbol dx deutet eine „infinitesimale Länge“, also $x_k - x_{k-1}$ für eine „infinitesimal feine“ Zerlegung. Die Notation wurde von Leibnitz (1646-1716) eingeführt.



Figur 5.2: Für eine nicht-negative Treppenfunktion $f \geq 0$ interpretieren wir (5.1) als Flächeninhalt der Ordinatenmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ und im Allgemeinen als vorzeichenbehafteten Nettoflächeninhalt.

5.7. — Die das Integral definierende Gleichung (5.1) ist nicht unproblematisch. A priori hängt nämlich die rechte Seite von der Auswahl einer Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ab. Wir müssen uns davon überzeugen, dass dies nur eine scheinbare Abhängigkeit ist. Mit anderen Worten: ist $a = y_0 < \cdots < y_m = b$ eine weitere Zerlegung von $[a, b]$ bezüglich welcher f eine Treppenfunktion ist, so muss

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} d_k(y_k - y_{k-1}) \tag{5.2}$$

gelten, wobei d_k den konstanten Wert von f auf dem Intervall (y_{k-1}, y_k) bezeichnet. Wir überlegen uns das in drei Schritten. I einem ersten Schritt nehmen wir an, dass die Zerlegung $a = y_0 < \cdots < y_m = b$ feiner als $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ ist, und bloss einen zusätzlichen Trennungspunkt $y_l \in (x_{\ell-1}, x_\ell) = (y_{l-1}, y_{l+1})$ hat. Das bedeutet aber einfach, dass die Summen in (5.2) gleich sind, ausser dass der Term $c_l(x_l - x_{l-1})$ links zu $d_l(y_l - y_{l-1}) + d_{l+l}(y_{l+1} - y_l)$ rechts wird, was nichts am Wert der Summe ändert da $c_l = d_l = d_{l+1}$ gilt. In einem zweiten Schritt können wir, mittels vollständiger Induktion, schliessen dass (5.2) gilt wenn $a = y_0 < \cdots < y_m = b$ feiner als $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ ist, mit beliebig vielen zusätzlichen Trennungspunkten. Schliesslich wissen wir, dass zwei Zerlegungen von $[a, b]$ stets eine gemeinsame Verfeinerung besitzen. Wir können damit (5.2) in voller Allgemeinheit zeigen, in dem wir beide Seiten mit der entsprechenden Summe für eine gemeinsame Verfeinerung der gegebenen Zerlegungen vergleichen.

Proposition 5.8. — *Die Abbildung $\int : \mathcal{TF}([a, b]) \to \mathbb{R}$ ist linear. Das heisst, für alle $f, g \in \mathcal{TF}([a, b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ eine Treppenfunktion, und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)x$$

Beweis. Wir haben bereits in Proposition 5.4 gezeigt, dass $\alpha f + \beta g$ eine Treppenfunktion ist. Sei $a \leq x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung, so, dass die Funktionen f, g und demnach auch $\alpha f + \beta g$ konstant auf den Intervallen (x_{k-1}, x_k) sind. Ist c_k der Wert von f und d_k der Wert von g auf (x_{k-1}, x_k), so ist $\alpha c_k + \beta d_k$ der Wert von $\alpha f + \beta g$ auf (x_{k-1}, x_k). Es gilt demnach

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \sum_{k=1}^n (\alpha c_k + \beta d_k)(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= \alpha \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^n d_k(x_k - x_{k-1}) = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

was zu zeigen war. □

Proposition 5.9. — *Seien f und g Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Beweis. Wie schon den Beweisen von Proposition 5.4 und Proposition 5.8 können wir eine Zerlegung $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ finden, so dass f und g konstant auf den Intervallen (x_{k-1}, x_k) sind. Wir schreiben wieder c_k für den Wert von f und d_k für den Wert von g auf (x_{k-1}, x_k). Weil nun $f \leq g$ gilt, also $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, erhalten wir $c_k \leq d_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und demnach

$$\int_a^b f dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b g dx$$

was zu beweisen war. □

Übung 5.10. — Seien $[a, b], [b, c]$ zwei beschränkte und abgeschlossene Intervalle und sei $f_1 \in \mathcal{TF}([a, b])$ und $f_2 \in \mathcal{TF}([b, c])$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [a, c] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in [a, b) \\ f_2(x) & \text{falls } x \in [b, c] \end{cases}$$

eine Treppenfunktion auf $[a, c]$ ist und geben Sie eine Zerlegung in Konstanzintervalle von f an. Beweisen Sie anschliessend, dass das Integral von f durch

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f_1 dx + \int_b^c f_2 dx$$

gegeben ist. Zeigen Sie des Weiteren, dass jede Treppenfunktion auf $[a, c]$ von obiger Form ist.

5.2 Definition und erste Eigenschaften des Riemann-Integrals

Wie schon im letzten Abschnitt betrachten wir im Folgenden Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zu reellen Zahlen $a < b$. Wir schreiben $\mathcal{TF}$ für die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

5.2.1 Integrierbarkeit reellwertiger Funktionen

Die nachfolgende Definition von Integrierbarkeit ist eine Variante der Riemann'schen Definition, die auf den französischen Mathematiker Jean-Gaston Darboux (1842–1917) zurückgeht. Wir werden zu einem späteren Zeitpunkt aber auch kurz die sogenannten Riemann-Summen besprechen, die von Riemann als Ausgangspunkt seiner Definition verwendet wurden.

5.11. — Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir die Mengen der **Untersummen** $\mathcal{U}(f)$ und **Obersummen** $\mathcal{O}(f)$ von f durch

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_a^b u dx \;\middle|\; u \in \mathcal{TF} \text{ und } u \leq f \right\} \qquad \mathcal{O}(f) = \left\{ \int_a^b o dx \;\middle|\; o \in \mathcal{TF} \text{ und } f \leq o \right\}$$

Falls f beschränkt ist, so sind diese Mengen nicht leer. Für $u, o \in \mathcal{TF}$ mit $u \leq f \leq o$ gilt nach Proposition 5.9 auch

$$\int_a^b u dx \leq \int_a^b o dx$$

und deshalb gilt $s \leq t$ für alle $s \in \mathcal{U}(f)$ und $t \in \mathcal{O}(f)$. Insbesondere gilt die Ungleichung

$$\sup \mathcal{U}(f) \leq \inf \mathcal{O}(f)$$

falls f beschränkt ist.

Definition 5.12. — Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **Riemann-integrierbar**, falls $\sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$ gilt. In diesem Fall wird dieser gemeinsame Wert das **Riemann-Integral** von f genannt, und als

$$\int_a^b f dx = \sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$$

geschrieben.

5.13. — Wir bezeichnen a als die **untere** und b als die **obere Integrationsgrenze**, und die Funktion als den **Integranden** für das Integral $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$. Falls $f \geq 0$ gilt und Riemann-integrierbar ist, dann interpretieren wir die Zahl $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ als den **Flächeninhalt** der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Da wir im bis auf Weiteres nur die Riemann-Integrierbarkeit und das Riemann-Integral kennen, erlauben wir uns einfach von Integrierbarkeit und Integral zu sprechen. Neben der Riemann'schen Integrationstheorie gibt es noch eine weitere wichtige solche Theorie, das sogenannte **Lebesgue Integral**.

PROPOSITION 5.14. — *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen u und o gibt, die*

$$u \leq f \leq o \qquad \text{und} \qquad \int_a^b (o - u)dx < \varepsilon$$

erfüllen.

Beweis. Seien A und B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft dass $a \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt. Dann gilt $\sup A \leq \inf B$, und Gleichheit $\sup A = \inf B$ gilt genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ und ein $b \in B$ mit $b - a < \varepsilon$ gibt. Diese Überlegung gilt insbesondere für die Mengen $\mathcal{U}(f)$ und $\mathcal{O}(f)$. Die Implikationen

$$\begin{aligned}
& f \text{ ist Riemann integrierbar} \\
\iff\ & \sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f) \\
\iff\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists s \in \mathcal{U}(f), t \in \mathcal{O}(f) \text{ mit } t - s < \varepsilon \\
\iff\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists u, o \in \mathcal{TF}, \text{ und } u \leq f \leq o \text{ und } \int_a^b (o - u)dx < \varepsilon
\end{aligned}$$

beweisen die Proposition. □

Applet 5.15 (Unter- und Obersummen)**.** *Wir sehen den Graph einer Funktion, können die betrachtete Zerlegung verfeinern (mit dem Punkt +) und dann (mit den Pfeilen) sowohl bessere Untersummen also auch besser Obersummen zu der Funktion finden. Können Sie die optimalen Unter- und Obersummen zu einer Zerlegung in 5 Intervalle finden? Nach einigen Experimenten sollten Sie davon überzeugt sein, dass die betrachtete Funktion Riemann-integrierbar ist – dies wird aus den späteren Sätzen dieses Kapitels recht schnell folgen.*

5.16. — Gut zu wissen ist, dass das Riemann-Integral eine Verallgemeinerung des Integrals von Treppenfunktionen darstellt und in diesem Sinne auch einfach vom Riemann-Integral einer Treppenfunktion gesprochen werden kann. Dies ist Gegenstand von Übung 5.17.

ÜBUNG 5.17. — Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und dass das Riemann-Integral von f gleich dem Integral von f als Treppenfunktion ist.

ÜBUNG 5.18. — Wiederholen Sie den Beweis von Proposition 1.1 und zeigen Sie, in der Sprache dieses Abschnitts, dass $f : x \in [0, 1] \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist mit $\int_0^1 x^2 dx =$

$\frac{1}{3}$. Überprüfen Sie an dieser Stelle auch, dass

$$\mathcal{U}(f) = \big(-\infty, \tfrac{1}{3}\big) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O}(f) = \big(\tfrac{1}{3}, \infty\big)$$

gilt.

Übung 5.19. — Nicht alle Funktionen sind Riemann-integrierbar. Wir betrachten als Beispiel die charakteristische Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Die Behauptung ist, dass diese nicht Riemann-integrierbar ist. Sei $o \in \mathcal{TF}$ mit $f \leq o$, und sei $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung so dass o auf jedem Intervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist, mit Wert c_k. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, existiert ein $x \in (x_{k-1}, x_k)$ mit $x \in \mathbb{Q}$. Wegen $f \leq o$ gilt $1 = f(x) \leq o(x) = c_k$. Somit gilt

$$\int_0^1 o(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1$$

unter Verwendung von Teleskopsummen. Damit ist das obere Integral von f durch 1 gegeben, da die Treppenfunktion mit konstantem Wert 1 Integral 1 hat und o beliebig war. Ähnlich zeigt man, dass das untere Integral von f durch 0 gegeben ist. Somit ist f nicht Riemann-integrierbar.

Übung 5.20. — Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Beispiel 5.19 unteres Integral 0 hat.

5.2.2 Linearität und Monotonie des Integrals

Wir schreiben $\mathcal{R}([a,b])$ oder einfach $\mathcal{R}$ falls $[a,b]$ klar aus dem Kontext ist, für die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$.

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar}\}$$

Treppenfunktionen sind integrierbar, es gilt also $\mathcal{TF}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}([a,b]) \subseteq \mathcal{F}([a,b])$.

Satz 5.21. — *Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}([a,b])$ bildet einen linearen Unterraum von $\mathcal{F}([a,b])$ und das Integral ist eine lineare Funktion auf $\mathcal{R}([a,b])$. Das heisst, für $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar, mit Integral*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $\alpha \geq 0$. Für Treppenfunktionen $u, o \in \mathcal{TF}([a,b])$ mit $u \leq f \leq o$ gilt dann $\alpha u \leq \alpha f \leq \alpha o$. Nach Proposition 5.8 folgt daraus $\alpha\mathcal{U}(f) \subseteq \mathcal{U}(\alpha f)$ und $\alpha\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(\alpha f)$. In der Tat ist

$$\alpha\mathcal{U}(f) = \left\{ s\int_a^b u dx \;\middle|\; u \in \mathcal{TF},\ u \leq f \right\} = \left\{ \int_a^b \alpha u dx \;\middle|\; u \in \mathcal{TF},\ \alpha u \leq \alpha f \right\}$$

eine Teilmenge von $\mathcal{U}(\alpha f)$ und analog für $s\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(sf)$. Nach Proposition 3.53 folgt

$$\alpha \sup(\mathcal{U}(f)) = \sup(\alpha\mathcal{U}(f)) \leq \sup(\mathcal{U}(\alpha f)) \leq \inf(\mathcal{O}(\alpha f)) \leq \inf(\alpha\mathcal{O}(f)) = \alpha \inf(\mathcal{O}(f)).$$

Da f Riemann-integrierbar ist und somit $\sup(\mathcal{U}(f)) = \inf(\mathcal{O}(f))$ erfüllt ist, sind alle Ungleichungen tatsächlich Gleichheiten, und wir schliessen daraus dass αf integrierbar ist und dass

$$\int_a^b \alpha f dx = \alpha \int_a^b f dx \tag{5.3}$$

gilt. Ist $\alpha \leq 0$, so kehren sich in obigem alle Abschätzungen, die α beinhalten, um und man erhält analog dass (5.3) auch für $\alpha \leq 0$, und somit für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Wir zeigen nun Additivität des Integrals. Seien also f, g zwei Riemann-integrierbare Funktionen auf $[a,b]$ und seien u_1, u_2, o_1, o_2 Treppenfunktionen mit $u_1 \leq f \leq o_1$ und $u_2 \leq g \leq o_2$. Dann gilt auch $u_1 + u_2 \leq f_1 + f_2 \leq o_1 + o_2$, was gemäss Proposition 5.8

$$\mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g) \subseteq \mathcal{U}(f+g) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f+g)$$

zur Folge hat. Die Additivitätseigenschaft in Proposition 3.53 zeigt

$$\begin{aligned}\sup(\mathcal{U}(f)) + \sup(\mathcal{U}(g)) = \sup(\mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g)) \leq \sup(\mathcal{U}(f+g)) \leq \\ \leq \inf(\mathcal{O}(f+g)) \leq \inf(\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g)) = \inf(\mathcal{O}(f)) + \inf(\mathcal{O}(g)).\end{aligned}$$

Da aber f und g Riemann-integrierbar sind, sind alle diese Ungleichungen Gleichheiten, und wir schliessen daraus dass $f + g$ integrierbar ist und dass

$$\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \tag{5.4}$$

gilt. Die Aussage des Satzes ergibt sich nun aus der Kombination von (5.3) und (5.4). □

Übung 5.22. — Formulieren Sie im Beweis von Satz 5.21 den Fall $\alpha \leq 0$ aus. Zeigen Sie, dass die Inklusion $\mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g) \subset \mathcal{U}(f+g)$ strikt sein kann.

Übung 5.23. — Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ Riemann-integrierbar. Sei $f^* \in \mathcal{F}([a,b])$ eine Funktion, die erhalten wurde, indem der Wert von f an endlich vielen Punkten in $[a,b]$ abgeändert wurde. Zeigen Sie, dass f^* Riemann-integrierbar ist und das gleiche Riemann-Integral wie f hat.

PROPOSITION 5.24. — *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Falls $f \leq g$ ist, so gilt auch $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.*

Beweis. Für jede Treppenfunktion $u \leq f$ gilt auch $u \leq g$, und also gilt $\mathcal{U}(f) \subseteq \mathcal{U}(g)$. Dies zeigt

$$\int_a^b f dx = \sup \mathcal{U}(f) \leq \sup \mathcal{U}(g) = \int_a^b g dx$$

wie verlangt. □

5.25. — Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren Funktionen f^+, f^- und $|f|$ auf $[a,b]$ durch

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \qquad f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}, \qquad |f|(x) = |f(x)|$$

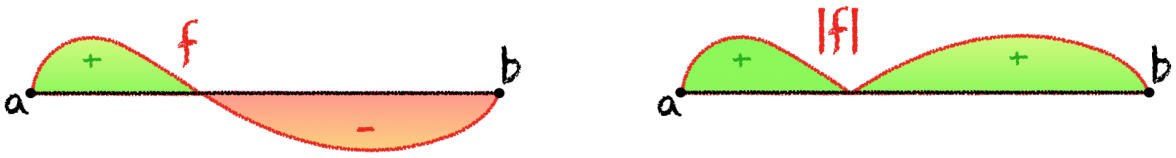
für $x \in [a,b]$. Die Funktion f^+ ist der **Positivteil**, f^- ist der **Negativteil** und $|f|$ ist der **Absolutbetrag** der Funktion f. Die Gleichungen

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

prüft man ohne Schwierigkeit nach. Eine einfach Fallunterscheidung zeit, dass auch

$$f \leq g \implies f^+ \leq g^+ \qquad \text{und} \qquad f \leq g \implies f^- \geq g^-$$

gilt.



Figur 5.3: Links ist der Graph einef Funktion f, rechts der Graph der entsprechenden Funktion $|f|$ dargestellt. Das Integral $\int_a^b f dx$ beschreibt einen Nettoflächeninhalt und $\int_a^b |f| dx$ einen Bruttoflächeninhalt.

SATZ 5.26. — *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann sind auch f^+, f^- und $|f|$ integrierbar, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

Beweis. Wir beginnen damit, zu zeigen dass f^+ Riemann-integrierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da f integrierbar ist, existieren Treppenfunktionen u und o mit der Eigenschaft

$$u \leq f \leq o \qquad \text{und} \qquad \int_a^b (o - u) dx < \varepsilon.$$

Die Funktionen u^+ und o^+ sind ebenfalls Treppenfunktionen, und es gilt $u^+ \leq f^+ \leq o^+$ wie wir bereits in 5.25 bemerkt haben. Da $o - u$ nicht negativ ist, gilt $o - u = (o-u)^+ \geq o^+ - u^+$,

und also

$$\int_a^b (o^+ - u^+)dx \leq \int_a^b (o-u)dx < \varepsilon$$

was zeigt, dass f^+ integrierbar ist. Satz 5.21 zeigt, dass demnach auch $f^- = f^+ - f$ und $|f| = f^+ + f^-$ integrierbar sind. Schliesslich gilt

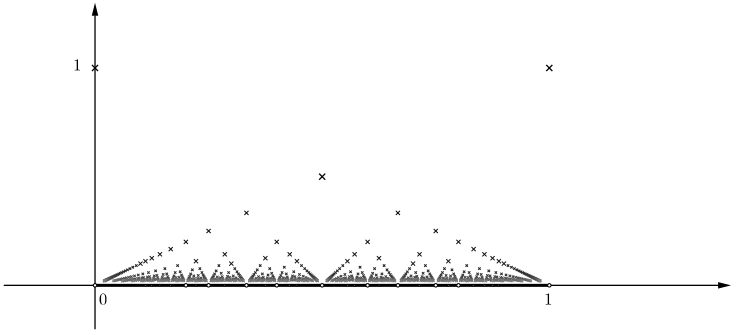
$$\left|\int_a^b f dx\right| = \left|\int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx\right| \leq \int_a^b f^+ dx + \int_a^b f^- dx = \int_a^b |f| dx$$

wobei wir Satz 5.21 sowie $\int_a^b f^+ dx \geq 0$ und $\int_a^b f^- dx \geq 0$ benutzt haben. □

Übung 5.27. — Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$, gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

integrierbar ist. Als Hilfestellung stellen wir den Graphen dar, aber überlassen Ihnen die Interpretation des Graphen und die sich daraus ergebenden Überlegungen.



Übung 5.28. — Seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind, und dass in diesem Fall

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f|_{[a,b]} dx + \int_b^c f|_{[b,c]} dx$$

gilt.

Übung 5.29. — Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl. Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ die Funktion die durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass g Integrierbar ist, und dass

$$\lambda \int_a^b f dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} g dx$$

gilt.

Übung 5.30. — Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) = \int_a^t f|_{[a,t]} dx$$

stetig ist.

Übung 5.31. — Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, und sei $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion die durch

$$L(t) = \begin{cases} \int_1^t f|_{[1,t]} dx & \text{falls } t > 1, \\ 0 & \text{falls } t = 1 \\ -\int_t^1 f|_{[t,1]} dx & \text{falls } t < 1, \end{cases}$$

gegeben ist. Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 5.30 um zu überprüfen, dass L stetig ist. Beweisen Sie, dass $L(st) = L(s) + L(t)$ für alle positiven reellen Zahlen s, t gilt. Das Resultat aus Aufgabe 5.29 kann dabei helfen.

Übung 5.32. — Sei $\mathcal{C}$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$, und sei $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ die Integration.

$$I(f) = \int_a^b f dx$$

Zeigen Sie, dass die Funktion I gleichmässig stetig ist, im folgenden Sinn: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f - g| < \delta \implies |I(f) - I(g)| \leq \varepsilon$$

Hier bedeutet die Aussage $|f - g| < \delta$, dass $|f(x) - g(x)| < \delta$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Übung 5.33. — Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gibt, so, dass

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon \tag{$*$}$$

gilt.

Übung 5.34 (Challenge). — Zeigen Sie, dass man in Aufgabe 5.33 sogar eine Polynomfunktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ finden kann, so, dass $(*)$ gilt.

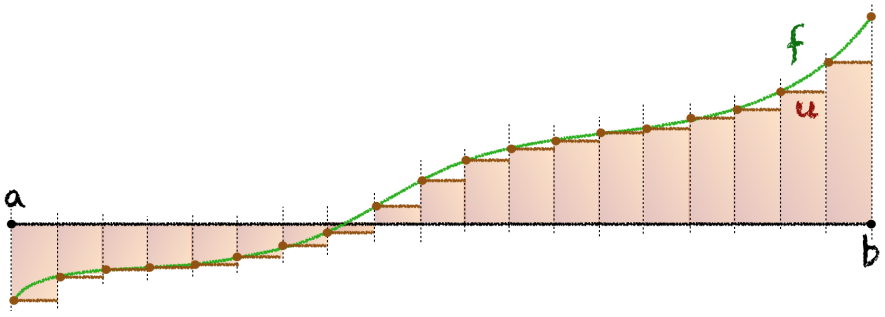
5.3 Integrierbarkeitssätze

5.3.1 Integrierbarkeit monotoner Funktionen

Wir betrachten wie zuvor ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für reelle Zahlen a, b mit $a < b$. Wir halten fest, dass monotone Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt sind, nämlich ist etwa $f(a)$ eine untere Schranke und $f(b)$ eine obere Schranke falls f monoton wachsend ist.

Satz 5.35. — *Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend – falls nicht ersetzt man f mit $-f$ und wendet Satz 5.21 an. Wir möchten Proposition 5.14 anwenden, das heisst, wir wollen für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $u, o \in \mathcal{TF}$ finden, so dass $u \leq f \leq o$ und $\int_a^b (o - u)dx < \varepsilon$ gilt.



Wir konstruieren u und o mittels einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die wir später festlegen werden, und der Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a, b]$ gegeben durch $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$. Seien u und o gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} f(x_{k-1}) & \text{falls } x \in [x_{k-1}, x_k) \text{ für ein } k \in \{1, \ldots, n\} \\ f(b) & \text{falls } x = b \end{cases}$$

respektive

$$o(x) = \begin{cases} f(a) & \text{falls } x = a \\ f(x_k) & \text{falls } x \in (x_{k-1}, x_k] \text{ für ein } k \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

für alle $x \in [a, b]$. Da f monoton wachsend ist, gilt $u \leq f \leq o$. In der Tat ist für $x \in [a, b]$ entweder $x = b$, womit $u(x) = f(x)$, oder es gibt ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in [x_{k-1}, x_k)$. In letzterem Fall erhalten wir $u(x) = f(x_{k-1}) \leq f(x)$ und somit gilt $u \leq f$. Ein analoges Argument liefert $f \leq o$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (o - u)dx &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

nach Vereinfachen der Teleskopsumme. Nach dem Archimedischen Prinzip können wir nun ein n wählen, so dass $\int_a^b (o-u)dx < \varepsilon$ ist. Aus Proposition 5.14 folgt somit, dass f Riemann-integrierbar ist. □

Übung 5.36. — Zeigen Sie, dass die Funktion $x \in [0,1] \mapsto \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

5.37. — Mit Hilfe der Additionseigenschaft in Aufgabe 5.28 lässt sich die Aussage von Satz 5.35 auf Funktionen erweitern, die nur stückweise monoton sind. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **stückweise monoton**, falls es eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a,b]$ gibt, so dass $f|_{(x_{k-1},x_k)}$ monoton ist für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$. Jede monotone Funktion ist stückweise monoton. Ein interessanteres Beispiel einer stückweise monotonen Funktion ist die Polynomfunktion $x \mapsto x^2$ auf einem Intervall $I = [a,b]$ für $a < 0 < b$. Man betrachtet man die Zerlegung $a = x_0 < 0 = x_1 < b = x_2$ und sieht, dass x^2 auf den beiden Abschnitten $(a,0)$ und $(0,b)$ monoton ist. Genau gleich sieht man, dass $x \mapsto x^d$ für beliebige $d \geq 0$ stückweise monoton ist.

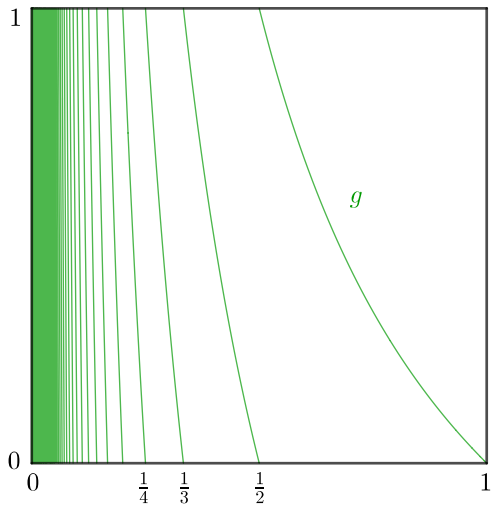
Korollar 5.38. — *Jede stückweise monotone, beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Das folgt aus dem Satz 5.35 und Übungen 5.28 und 5.23. □

Übung 5.39. — Zeigen Sie, dass die sogenannte Gauss-Abbildung $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet.



5.3.2 Integration von Polynomfunktionen

Wir betrachten wiederum ein Intervall $[a, b]$ mit Endpunkten $a < b$.

Lemma 5.40. — *Sei $d \geq 0$ eine Ganze Zahl. Es existieren rationale Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + c_d n^d + c_{d-1} n^{d-1} + \ldots + c_0 \tag{5.5}$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

Beweis. Dem emsigen Leser als Übungsaufgabe überlassen. □

Satz 5.41. — *Polynomfunktionen auf $[a, b]$ sind Riemann-integrierbar. Für alle Monome x^d mit $d \geq 0$ gilt*

$$\int_a^b x^d dx = \frac{1}{d+1}\left(b^{d+1} - a^{d+1}\right). \tag{5.6}$$

Beweis. Monome, also im gegenwärtigen Zusammenhang Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ die durch $x \mapsto x^d$ gegeben sind, sind stückweise monoton, und sogar monoton falls $0 \notin (a, b)$ gilt. Insbesondere sind Monome integrierbar, nach Korollar 5.38. Eine Polynomfunktion auf $[a, b]$ ist von der Form

$$x \mapsto \sum_{d=0}^{n} a_d x^d,$$

also eine Linearkombination von Monomen. Dass Polynomfunktion integrierbar sind, folgt damit aus Satz 5.21. Es bleibt die Formel (5.6) zu zeigen. Wir behandeln nur den Spezialfall $0 = a < b$, da man den allgemeinen Fall einfach darauf zurückführen kann. Sei $d \geq 0$ fix, und schreibe $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ für die Funktion $f(x) = x^d$. Da f monoton wachsend ist, können wir

dieselbe Methode wie im Beweis von Satz 5.35 verwenden. Wir wählen also $n \in \mathbb{N}$ und die Zerlegung

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

gegeben durch $x_k = \frac{k}{n}b$, und Treppenfunktionen u und o auf $[0, b]$ mit konstantem Wert x_{k-1}^d respektive x_k^d auf (x_{k-1}, x_k) für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Es ergibt sich

$$\frac{b^{d+1}}{n^{d+1}} \sum_{k=1}^{n-1} k^d = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}b\right)^d \frac{b}{n} \leq \int_0^b x^d dx \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}b\right)^d \frac{b}{n} = \frac{b^{d+1}}{n^{d+1}} \sum_{k=1}^{n} k^d \tag{5.7}$$

Seien $c_0, \ldots, c_d$ rationale Zahlen, so, dass die Gleichung (5.5) aus Lemma 5.40 gilt. Wir definieren $c_+ = |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_d|$ und erhalten damit

$$\sum_{k=1}^{n} k^d \leq \frac{n^{d+1}}{d+1} + |c_d| n^d + |c_{d-1}| n^{d-1} + \ldots + |c_0| \leq \frac{n^{d+1}}{d+1} + c_+ n^d$$

Ähnlich dazu definieren wir $c_- = |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{d-1}| + |c_d - 1|$, und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^d = \sum_{k=1}^{n} k^d - n^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + (c_d - 1)n^d + c_{d-1}n^{d-1} + \ldots + c_0 \geq \frac{n^{d+1}}{d+1} - c_- n^d$$

Diese beiden Abschätzungen liefern mit (5.7) kombiniert

$$\frac{b^{d+1}}{d+1} - \frac{c_- b^{d+1}}{n} \leq \int_0^b x^d \, \mathrm{d}x \leq \frac{b^{d+1}}{d+1} + \frac{c_+ b^{d+1}}{n}.$$

Aus dem Archimedischen Prinzip, Satz 3.61, folgt nun, dass $\int_0^b x^d \, \mathrm{d}x = \frac{b^{d+1}}{d+1}$ gilt, was zu zeigen war. □

Applet 5.42 (Integral eines Polynoms)**.** *Wir betrachten nochmals das partikuläre Integral, wobei wir diesmal mit einer Polynomfunktion beginnen und dadurch Satz 5.41 anwenden können.*

Beispiel 5.43. — Als Anwendung von Satz 5.41 berechnen wir folgendes Integral.

$$\int_1^2 (x^4 + 5x^2 - x + 1)dx = \int_1^2 x^4 \, \mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx + 1 =$$
$$= \frac{1}{5}(2^5 - 1) + \frac{5}{3}(2^3 - 1) - \frac{1}{2}(2^2 - 1) + 1 = \frac{521}{30}$$

Übung 5.44. — Sei $[a, b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall mit $0 \leq a < b$ und sei $m \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$ auf$[a, b]$ integrierbar ist. Um das Integral zu berechnen, gehen Sie wie folgt vor:

1. Zeigen Sie zuerst, dass man den allgemeinen Fall auf den Spezialfall $[a, b] = [0, 1]$ reduzieren kann. Benutzen Sie dazu Aufgabe 5.29.

2. Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 x^{\frac{1}{m}} dx + \int_0^1 x^m dx = 1$$
gilt. Um auf einen fruchtbaren Ansatz zu kommen, interpretieren Sie Integrale als Flächeninhalte.

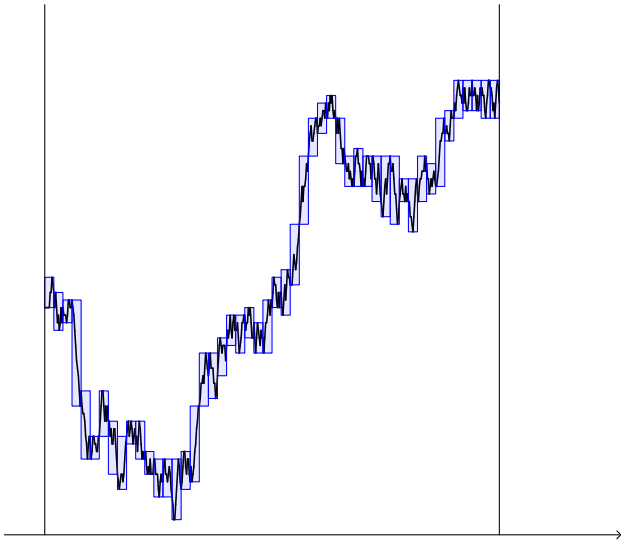
5.3.3 Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Aus Abschnitt 5.3.2 wissen wir bereits, dass Polynomfunktionen integrierbar sind. In diesem Abschnitt zeigen wir unter Verwendung der Beschränktheit und der gleichmässigen Stetigkeit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen (Sätze 4.67 und 4.74) folgendes Resultat.

Satz 5.45. — *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.74 ist f gleichmässig stetig und es gibt ein $\delta > 0$, so dass
$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
für alle $x, y \in [a, b]$ gilt. Sei nun $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ so, dass $x_k - x_{k-1} < \delta$ für alle k gilt. Wir definieren für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Zahlen
$$c_k = \min\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \qquad \text{und} \qquad d_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$
wobei wir Satz 4.70 für die Existenz dieser Extrema benutzt haben. Wir bemerken, dass für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Ungleichung $d_k - c_k \leq \varepsilon$ gilt. In der Tat ist $|x - y| < \delta$ für alle $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$, womit nach der gleichmässigen Stetigkeit von f die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ erfüllt ist. Insbesondere gilt das für diejenigen $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $f(x) = d_k$ und $f(y) = c_k$. Wir definieren nun Treppenfunktionen u, o durch
$$u(x) = \begin{cases} c_k & \text{falls } x \in [x_{k-1}, x_k) \\ c_n & \text{falls } x = b \end{cases} \qquad \text{und} \qquad o(x) = \begin{cases} d_k & \text{falls } x \in [x_{k-1}, x_k) \\ d_n & \text{falls } x = b \end{cases}$$
für $x \in [a, b]$. Nach Definition von c_k und d_k gilt $u \leq f \leq o$, sowie die Abschätzung
$$\int_a^b (o - u) dx = \sum_{k=1}^n (d_k - c_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a).$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war zeigt dies, dass f integrierbar ist. □

5.46. — Die meisten Haushaltsfunktionen sind zumindest stückweise sowohl stetig als auch monoton, und insbesondere integrierbar nach Satz 5.35 oder nach Satz 5.45. Es gibt Funktionen, die sind zwar stetig auf ihrem Definitionsbereich, aber auf keinem offenen Teilintervall monoton.



Es ist dem Leser als Übung überlassen, ein explizites Beispiel dafür zu finden. Integrierbarkeit solch einer Funktion mit einem zittrigen Graphen folgt aus Satz 5.45.

Applet 5.47 (Integrierbarkeit einer „zittrigen“ Funktion)**.** *Wir sehen, dass eine stetige aber zittrige Funktion wie im dargestellten Graphen auch Riemann-integrierbar ist. Was wir auch mitunter sehen können, ist, dass geogebra mit der verwendeten Funktion manchmal Problem hat und manche der dargestellten Untersummen oder Obersummen eigentlich nicht richtig dargestellt und berechnet werden. Unabhängig davon haben wir aber in unserem Beweis schon die Riemann-Integrierbarkeit gesehen, sind also für die gewünschte Aussage nicht auf geogebra angewiesen.*

Übung 5.48. — Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass

$$f = 0 \iff \int_a^b |f(x)|dx = 0$$

gilt.

Kapitel 6

Folgen und Grenzwerte

Wir diskutieren in diesem Kapitel Grenzwerte von Folgen und allgemeineren Funktionen. Dies wird uns insbesondere erlauben, die Exponentialabbildung zu definieren. Wir werden auch den Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und Riemann-Summen als eine Art von Grenzwertprozess untersuchen.

Wir haben in den letzten beiden Kapiteln wiederholt Supremum und Infimum als wichtigste Hilfsmittel für den Aufbau der Theorie verwendet. Allerdings haben diese die fundamentale Einschränkung, nur für die reellen Zahlen sinnvoll zu sein. Wir werden hier bedeutende alternative Hilfsmittel, nämlich den Begriff der Cauchy-Folgen und die Existenz von konvergenten Teilfolgen einführen. Wie wir zum Teil in diesem Kapitel aber in grösserem Ausmass im zweiten Semester sehen werden sind diese Hilfsmittel auch im $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$ sinnvoll und nützlich.

6.1 Konvergenz von Folgen in einem metrischen Raum

6.1.1 Konvergenz von Folgen

Sei X eine Menge. Eine Folge in X ist eine nicht abbrechende Sequenz von Elementen $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ von Elementen von X. Wir interessieren uns für Folgen und deren Eigenschaften in Mengen X die eine geometrische Interpretation haben, etwa in Teilmengen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir nennen deshalb gelegentlich die Menge X einen **Raum** und die Elemente von X **Punkte**. Für den Moment bleiben Räume und Punkte Synonyme für Mengen und Elemente.

Definition 6.1. — Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. Das Bild $a(n)$ von $n \in \mathbb{N}$ schreibt man auch als a_n und bezeichnet es als das n-te **Folgenglied** von a. Anstatt $a : \mathbb{N} \to X$ schreibt man oft $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heisst **konstant**, falls $a_n = a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, und **schliesslich konstant**, falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n = a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$.

6.2. — Sei $X = \mathbb{C}$. Beispiele für Folgen in X sind etwa $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n}$ oder $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $y_n = i^n$. Sei X die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$. Dann können wir die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gebeben durch $f_n(t) = t^n$ betrachten.

Definition 6.3. — Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X gemeinsam mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die die **Metrik** auf X genannt wird und die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1. Definitheit: Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $d(x_1, x_2) \geq 0$ und $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$.
2. Symmetrie: Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$.
3. Dreiecksungleichung: Für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

6.4. — Eine Metrik d auf einer Menge X weist je zwei Punkten ihre **Distanz** oder **Abstand** zu. In dieser Auffassung besagt die Definitheit der Metrik, dass der einzige Punkt, der Abstand Null zu einem gegebenen Punkt $x_1 \in X$ hat, x_1 selbst ist. Symmetrie der Metrik besagt, dass der Abstand von $x_1 \in X$ zu $x_2 \in X$ der gleiche ist wie von x_2 zu x_1. Fasst man die Distanz zwischen zwei Punkten als die Länge eines kürzesten Weges vom einen zum anderen Punkt auf, dann besagt die Dreiecksungleichung, dass die Länge eines kürzesten Weges von x_1 nach x_3 höchstens so gross ist wie die Länge eines Weges, den man abläuft, wenn man zuerst den Umweg nach x_2 und von dort aus nach x_3 geht. Mit folgenden Beispielen von metrischen Räumen sind wir bereits vertraut: Als Menge X nehmen wir die reellen oder die komplexen Zahlen, oder allgemeiner eine beliebige Teilmenge X von $\mathbb{C}$, mit der **Standardmetrik** d definiert durch

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

für alle $x_1, x_2 \in X$.

Beispiel 6.5. — Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}$$

für $x_1, x_2 \in X$. Dann ist (X, d) ein metrischer Raum. In der Tat ist d definit und symmetrisch per Definition. Des Weiteren erfüllt d die Dreiecksungleichung: Seien x_1, x_2, x_3 Punkte in X. Falls $d(x_1, x_3) = 0$ gilt, dann ist $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ trivialerweise erfüllt. Falls $d(x_1, x_3) = 1$ gilt, dann ist $x_1 \neq x_3$ und x_2 ist mindestens von einem Punkt in $\{x_1, x_3\}$ verschieden und die Dreiecksungleichung gilt ebenso. Man nennt diese Metrik d die **diskrete Metrik** auf der Menge X.

Beispiel 6.6. — Wir setzen $X = \mathbb{C}$ und definieren die **Manhattan-Metrik** auf X durch

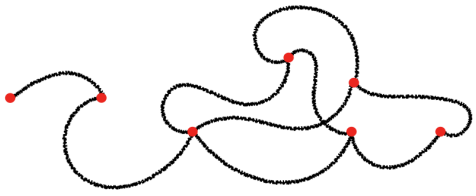
$$d_{\mathrm{NY}}(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$. Man überprüft, dass d_{NY} alle Axiome einer Metrik auf $\mathbb{C}$ erfüllt. Der Grund warum d_{NY} Manhattan-Metrik genannt wird, ist, dass man in schachbrettartig angelegten Orten wie zum Beispiel Manhattan auf folgende Weise von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) gelangt: Man geht zuerst bei gleichbleibender y-Koordinate von (x_1, y_1) nach (x_2, y_1) und dann bei gleichbleibender x-Koordinate von (x_2, y_1) nach (x_2, y_2), oder umgekehrt von (x_1, y_1) nach (x_1, y_2) und dann von (x_1, y_2) nach (x_2, y_2). Da alle Strassen in Manhattan von West nach Ost oder von Nord nach Süd verlaufen, misst d_{NY} den relevanten Abstand zwischen zwei Punkten. Eine weitere verkehrstechnisch inspirierte Metrik auf $\mathbb{C}$ ist die **französische Eisenbahn Metrik** d_{SNCF}, definiert durch

$$d_{\mathrm{SNCF}}(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear abhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \\ |z_1| + |z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \end{cases}$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Der Grund für den Namen dieser Metrik ist, dass eine Bahnreise von einer französischen Stadt bei z_1 zu einer anderen bei z_2 meist über den Ursprung Paris bei $z = 0$ führt, ausser wenn z_1 und z_2 auf derselben – von Paris ausgehenden geraden Strecke liegen. Gewissermassen besteht $\mathbb{C}$ in dieser Metrik also aus unendlich vielen Halbgeraden, die sich nur im Ursprung treffen.

Beispiel 6.7. — Ein kombinatorischer **Graph** ist eine endliche Menge von Punkten, die sogenannten Ecken, von welchen einige mit sogenannten Kanten verbunden sind.



Man kann nun eine Metrik auf den Ecken (durch • gekennzeichnet) dadurch definieren, in dem man die Distanz zweier Ecken x und y als $d(x, y) = n$ setzt, falls man y von x aus über n aber nicht weniger als n Kanten erreichen kann. Dazu ist notwendig, dass man von einer Ecke zu jeder anderen Ecke über Ablaufen von Kanten gelangen kann, wie bei obigem Graphen. Diese Eigenschaft nennt sich auch Zusammenhang des Graphen.

Übung 6.8. — Sei X die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$d_1(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\} \qquad \text{und} \qquad d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Metriken d_1 und d_2 auf X definieren.

Definition 6.9. — Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Wir sagen, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ **konvergent** ist oder **konvergiert**, falls es ein Element $A \in X$ gibt, mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, A) < \varepsilon$ für alle

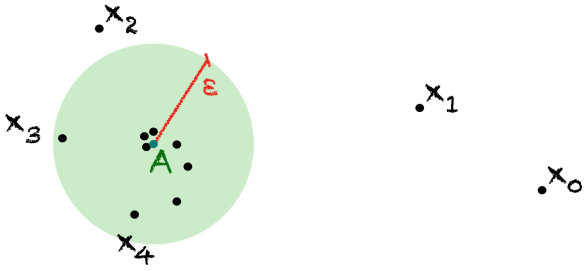
$n \geq N$ gilt.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ so, dass } \forall n \in \mathbb{N} \;:\; n \geq N \implies d(x_n, A) < \varepsilon$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \tag{6.1}$$

und bezeichnen den Punkt A als **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Falls die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ nicht konvergiert, so nennen wir die Folge **divergent**.



Es ist *à priori* nicht klar, dass eine konvergierende Folge nur einen Grenzwert besitzt. Es könnte zu einer konvergierenden Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ auch zwei oder mehrere Elemente $A, B \in X$ geben, die die Eigenschafte eines Grenzwertes erfüllen. Dass dem nicht so ist, und somit die Notation (6.1) auch gerechtfertigt ist, zeigt das nächste Lemma.

Lemma 6.10. — *Eine konvergente Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X, d) besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis. Seien $A \in X$ und $B \in X$ Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann können wir $N_A, N_B \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N_A$ gilt $d(x_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ und für alle $n \geq N_B$ gilt $d(x_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $N = \max\{N_A, N_B\}$. Dann gilt

$$d(A, B) \leq d(A, x_N) + d(x_N, B) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus $d(A, B) = 0$, und also $A = B$. □

Beispiel 6.11. — Eine konstante Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in (X, d) mit $x_n = A \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen A. Genauso konvergieren schliesslich konstante Folgen gegen den Wert, den sie schliesslich annehmen.

Beispiel 6.12. — Die Folge reeller Zahlen $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen Null, das heisst $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn, für alle $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Archimedischen Prinzip, Satz 3.61, ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt nun $0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Die Folge reeller Zahlen $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $y_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist divergent, da die Folgenglieder $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ zwischen 1 und -1 hin und her wechseln und sich insbesondere keiner bestimmten reellen Zahl nähern.

Übung 6.13. — Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $A \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann gegen A konvergiert, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit $A \in U$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder von $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ in U liegen.

Definition 6.14. — Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X, d) heisst **beschränkt**, falls es eine reelle Zahl $R > 0$ gibt, so dass $d(x_n - x_m) \leq R$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 6.15. — *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X, d), mit Grenzwert $A \in X$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, A) \leq 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Setze

$$R = 2 \max\{1, d(x_0, A), d(x_1, A), \ldots, d(x_N, A)\}.$$

Dann gilt $d(x_n, A) \leq \frac{R}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und folglich $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, A) + d(A, x_m) \leq R$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, wie verlangt. □

Übung 6.16. — Sei $X = \mathbb{C}^2$. Finden Sie eine Folge in X, die zwar bezüglich der Manhattanmetrik, aber nicht bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik konvergiert.

Übung 6.17. — Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $z_n \neq 0$ für alle n, die in der Standardmetrik gegen 0 konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ divergiert.

6.1.2 Konvergente Teilfolgen und Häufungspunkte

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in einer Menge X. Eine Teilfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ nennen wir jede Folge die wir erhalten, in dem wir nur gewisse Folgenglieder auf der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ behalten und alle anderen Folgenglieder ignorieren. Zum Beispiel ist

$$x_0, x_1, x_4, x_9, x_{16}, x_{25}, \ldots \quad = (x_{n^2})_{n=0}^{\infty}$$

eine Teilfolge. Die formale Definition lautet wir folgt.

Definition 6.18. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in einer Menge X. Eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Folge der Form $(x_{f(n)})_{n=0}^{\infty}$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine strikt monotone Funktion ist.

Lemma 6.19. — *Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum. Jede Teilfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, konvergiert, und hat denselben Grenzwert wie $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Beweis. Dem gewissenhaften Leser zur Übung überlassen. □

Übung 6.20. — Sei $(a_n)_n$ eine Folge und sei $A \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ genau dann gegen A konvergiert, wenn jede Teilfolge von $(a_n)_n$ eine Teilfolge besitzt, die gegen A konvergiert.

6.21. — Eine Folge kann konvergente Teilfolgen besitzen, ohne selbst zu konvergieren. Beispielsweise hat die durch $x_n = i^n$ gegebene periodische Folge komplexer Zahlen konvergente, und sogar konstante Teilfolgen

$$(x_{4n})_{n=0}^{\infty} \qquad (x_{4n+1})_{n=0}^{\infty} \qquad (x_{4n+2})_{n=0}^{\infty} \qquad (x_{4n+3})_{n=0}^{\infty}$$

konvergiert selbst aber nicht. In der Tat haben wir mit Lemma 6.19 ein einfaches Argument. Falls die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen $A \in \mathbb{C}$ konvergieren würde, so müssten diese vier konstanten Folgen auch gegen A konvergieren. Dies ist natürlich nicht möglich, da die erste gegen 1, die zweite gegen i, die dritte gegen -1 und die vierte gegen $-i$ konvergiert.

Definition 6.22. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Punkt $A \in X$ heist **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $n \geq N$ existiert, mit $d(x_n, A) < \varepsilon$.

Proposition 6.23. — *Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Element $A \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, wenn es eine konvergente Unterfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit Grenzwert A gibt.*

Beweis. Angenommen $A \in X$ sei ein Häufungspunkt der gegebenen Folge. Wir konstruieren rekursiv eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ die gegen A konvergiert. Wir beginnen damit eine ganze Zahl n_0 so zu wählen, dass $d(x_{n_0}, A) \leq 1$ gilt. Anschliessend wählen wir $n_1 > n_0$ mit der Eigenschaft $d(x_{n_1}, A) \leq 2^{-1}$, und anschliessend $n_2 > n_1$ mit der Eigenschaft $d(x_{n_2}, A) \leq 2^{-2}$ und so fort. Diese Auswahl ist jeweils möglich, da A ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist. Allgemein wählen wir $n_k > n_{k-1}$ derart, dass $d(x_{n_k}, A) \leq 2^{-k}$ gilt. Die Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen A. Es gibt nämlich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ mit $2^{-K} < \varepsilon$, und für jedes $k \geq K$ gilt dann

$$d(x_{n_k}, A) \leq 2^{-k} \leq 2^{-K} < \varepsilon$$

was zeigt, dass A ein Grenzwert der Folge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ist. Damit ist die eine Richtung gezeigt. Umgekehrt nehmen wir an, A sei der Grenzwert einer konvergierenden Teilfolge $(x_{f(n)})_{n=0}^{\infty}$ von $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_{f(n)}, A) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ gilt. Die Funktion f ist monoton wachsend, und insbesondere unbeschränkt. Es gibt also ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f(n) \geq N$ und $d(x_{f(n)}, A) < \varepsilon$, was zeigt, dass A ein Häufungspunkt der gegebenen Folge ist. □

Korollar 6.24. — *Eine konvergierende Folge hat genau einen Häufungspunkt, und zwar ihren Grenzwert.*

Beweis. Das folgt aus Lemma 6.19 und Proposition 6.23. □

Übung 6.25. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $F \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass F abgeschlossen ist.

6.1.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Wir führen den Begriff der **Vollständigkeit** für metrische Räume ein. Es wird sich herausstellen dass damit kein Konflikt mit dem Vollständigkeitsbegriff für angeordnete Körper entsteht. Wir werden bald einmal zeigen, dass $\mathbb{R}$, aber auch $\mathbb{C}$, als metrischer Raum vollständig ist. Der metrische Raum $\mathbb{Q}$ ist im Gegensatz dazu nicht vollständig.

Definition 6.26. — Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine **Cauchy-Folge**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_m - x_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

Übung 6.27. — Zeigen Sie, dass Cauchy Folgen in (X, d) beschränkt sind, und dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

Übung 6.28. — Zeigen Sie, dass eine Cauchy-Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Definition 6.29. — Man nennt einen metrischen Raum (X, d) **vollständig**, falls jede Cauchy Folge in (X, d) konvergiert.

6.30. — Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir schreiben $\mathcal{C}_X$ für die Menge aller Cauchy-Folgen in X, und definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}_X$ durch

$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \sim (y_n)_{n=0}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Die Quotientenmenge $\overline{X} = \mathcal{C}_X/_{\sim}$, versehen wir mit der durch

$$\overline{d}([(x_n)_{n=0}^{\infty}], [(y_n)_{n=0}^{\infty}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

gegebenen Metrik $\overline{d}$ heisst **Vervollständigung** von (X, d). Die Inkjektion $\iota_X : X \to \overline{X}$, die $x \in X$ auf die Klasse der konstanten Folge mit Wert x abbildet, nennen wir **kanonische Einbettung**. Für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(x, y) = \overline{d}(\iota_X(x), \iota_X(y))$$

woraus folgt, dass ι tatsächlich injektiv ist.

Übung 6.31. — Zeigen Sie, dass die in 6.30 eingeführten Objekte wohldefiniert sind. Überprüfen Sie insbesondere, dass $\overline{d}$ tatsächlich eine Metrik auf $\overline{X}$ ist.

Übung 6.32. — Wie der Name sagt, ist die Vervollständigung $(\overline{X}, \overline{d})$ eines metrischen Raumes vollständig, das heisst, jede Cauchy-Folge in $\overline{X}$ konvergiert. Eine Folge in $\overline{X}$ ist essentiell eine Folge von Folgen - sei

$$[(x_{m,n})_{n=0}^{\infty}]_{m=0}^{\infty}$$

eine Cauchy-Folge in $\overline{X}$. Zeigen Sie, dass $[(x_{n,n})_{n=0}^{\infty}]$ ein Grenzwert dieser Folge ist.

Übung 6.33. — Sei (X, d) ein metrischer Raum mit Vervollständigung $(\overline{X}, \overline{d})$. Sei (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung so, dass

$$d(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung $\overline{f} : \overline{X} \to Y$ gibt, so, dass $f = \overline{f} \circ \iota_X$ und

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d_Y(\overline{f}(\overline{x}), \overline{f}(\overline{y}))$$

für alle $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{X}$ gilt.

6.1.4 *Reelle Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen

In Abschnitt 3.5 haben wir verschiedene Modelle für Körper von reellen Zahlen diskutiert. Die Vollständigung metrischer Räume erlaubt eine weitere Konstruktion. Das Interessante daran ist nicht unbedingt ein weiteres Modell von $\mathbb{R}$ zu haben, sondern die Tatsache dass sich die Konstruktion auf viele andere Situationen übertragen lässt.

6.34. — Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ ist ein Modell für einen Körper reeller Zahlen. Dafür bemerken wir zuerst, dass die Konstruktion der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ nicht notwendigerweise einen Körper reeller Zahlen (als Zielraum für die Standardmetrik auf $\mathbb{Q}$) benötigt. Die Menge aller Cauchy-Folgen $\mathcal{C}$ in $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Folgen rationaler Zahlen $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ für die

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies |q_n - q_m| < 2^{-k}$$

gilt. Die Menge $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ ist bezüglich komponentenweiser Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, und

$$\mathcal{N} = \left\{(q_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C} \mid \lim_{n\to\infty} q_n = 0\right\}$$

ist ein linearer Unterraum. Die in 6.30 betrachtete Äquivalenzrelation $(p_n)_{n=0}^{\infty} \sim (q_n)_{n=0}^{\infty}$ übersetzt sich zu $(p_n - q_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{N}$. Wir definieren die Menge $\mathbb{R}$ als Quotienten

$$\mathbb{R} = \mathcal{C}/_{\sim} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$$

im Sinne der linearen Algebra. Damit ist $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Als kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die injektive, lineare Abbildung die $q \in \mathbb{Q}$ die Klasse der konstanten Folge mit Wert q zuordnet. Wir nennen ab jetzt Elemente von $\mathbb{R}$ „reelle Zahlen“ und betrachten $\mathbb{Q}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ via der kanonischen Einbettung ι.

6.35. — Wir definieren ein Produkt auf $\mathbb{R}$ durch komponentenweise Multiplikation. Das heisst, für Elemente $x = [(p_n)_{n=0}^{\infty}]$ und $y = [(q_n)_{n=0}^{\infty}]$ definieren wir

$$x \cdot y = [(p_n q_n)_{n=0}^{\infty}].$$

Man überprüft, dass dadurch eine wohldefinierte kommutative Operation auf $\mathbb{R}$ gegeben ist, die bezüglich der Addition das Distributivgesetz erfüllt, und die via der kanonischen Einbettung kompatibel mit der Multiplikation rationaler Zahlen ist. Insbesondere ist $1_{\mathbb{R}} = \iota(1) = [(1)_{n=0}^{\infty}]$ das neutrale Element für die Multiplikation auf $\mathbb{R}$. Ist $x = [(q_n)_{n=0}^{\infty}] \in \mathbb{R}$ nicht Null, so ist $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ die nicht gegen Null strebt, und es gilt deshalb $q_n \neq 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Die Klasse der Folge $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } q_n = 0 \\ q_m^{-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist damit ein multiplikatives Inverses zu x. Dies zeigt, dass $\mathbb{R}$ mit den gegebenen Operationen ein Körper ist.

6.36. — Wir verwenden die übliche Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$, um eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ zu konstruieren. Für Elemente $x = [(p_n)_{n=0}^{\infty}]$ und $y = [(q_n)_{n=0}^{\infty}]$ von $\mathbb{R}$ deklarieren wir

$$x \leq y$$

falls eine Folge $(r_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{N}$ existiert, so dass $p_n - r_n \leq q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es ist dem pflichtbewussten Leser überlassen zu überprüfen, dass dadurch tatsächlich eine wohldefinierte Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ gegeben ist, die kompatibel mit der Körperstruktur auf $\mathbb{R}$ ist. Damit erhält $\mathbb{R}$ die Struktur eines angeordneten Körpers.

6.37. — Es bleibt zu zeigen, dass der angeordnete Körper $\mathbb{R}$ vollständig im Sinne der Definition 3.15 ist. Dass $\mathbb{R}$ das Archimedische Prinzip erfüllt ist einfach einzusehen: Sei $x = [(q_n)_{n=0}^{\infty}] \in \mathbb{R}$ positiv. Dann ist $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ insbesondere nicht eine Nullfolge. Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|q_n| > 2^{-k}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aber $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ ist auch eine

Cauchy-Folge, somit existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N \implies |q_n - q_m| < 2^{-k-1}$. Dies zeigt, dass $|q_n| > 2^{-k-1}$ und sogar $q_n > 2^{-k-1}$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $x > 0$. Das zeigt $\iota(2^{-k-1}) \leq x$, oder einfach $2^{-k-1} \leq x$ da wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen. Es gilt also das Archimedische Prinzip wie in Korollar 3.63.

Seien nun $X, Y \subset \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen, so dass $x \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt. Wir wollen eine reelle Zahl $z = [(r_n)_{n=0}^{\infty}] \in \mathbb{R}$ zwischen X und Y finden. Dazu wählen wir zunächst ein beliebige $a_0, b_0 \in \mathbb{Q}$ so, dass $[a_0, b_0] \cap X \neq \varnothing$ und $[a_0, b_0] \cap Y \neq \varnothing$ gilt, und setzen $r_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Falls $x \leq r_0 \leq Y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt, so setzen wir $z = r_0$ und sind fertig. Andernfalls definieren wir a_1 und b_1 als

$$\begin{cases} a_1 = r_0 \text{ und } b_1 = b_0 & \text{falls} \quad [a_0, r_0] \cap X \neq \varnothing \text{ und } [a_0, r_0] \cap Y \neq \varnothing \\ a_1 = a_0 \text{ und } b_1 = r_0 & \text{falls} \quad [r_0, b_0] \cap X \neq \varnothing \text{ und } [r_0, b_0] \cap Y \neq \varnothing \end{cases}$$

und setzen $r_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. In dem wir diesen Prozess fortsetzen finden wir entweder ein r_n für das $x \leq r_n \leq Y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt und setzen $z = r_n$, oder erhalten andernfalls Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $|b_n - a_n| \leq 2^{-n}|a_0 - b_0|$ und

$$[a_n, b_n] \cap X \neq \varnothing \qquad \text{und} \qquad [a_n, b_n] \cap Y \neq \varnothing.$$

Daraus folgt, wie der pflichtbewusste Leser überprüfen kann, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ allesamt Cauchy-Folgen sind, und dass die reelle Zahl

$$z = [(a_n)_{n=0}^{\infty}] = [(r_n)_{n=0}^{\infty}] = [(b_n)_{n=0}^{\infty}]$$

die Ungleichungen $x \leq z \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ erfüllt.

6.2 Folgen komplexer und reeller Zahlen

Im letzten Abschnitt haben wir Folgen und Konvergenz in einem allgemeinen metrischen Raum behandelt. In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns auf Folgen in den metrischen Räumen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, bezüglich der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Zusätzlich zur Metrik haben wir in diesem Kontext die Körperoperationen, die es uns erlauben, neue Folgen aus vorgegebene Folgen zu konstruieren. Für Folgen reeller Zahlen können wir zusätzlich das Verhalten von Ungleichungen bei Konvergenz untersuchen.

6.2.1 Zusammenhang zur Stetigkeit

Stetigkeit lässt sich auch mit Hilfe von Folgen charakterisieren, wie wir in folgendem Satz aufzeigen. Grob gesagt ist der Inhalt dieses Satzes, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn sie konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet, mit dem richtigen Grenzwert. Dies bezeichnet man auch als **Folgenstetigkeit**. Diese Eigenschaft kann für Grenzwertberechnungen von Folgen verwendet werden, indem man eine gegebene Folge als Bild einer Folge, deren Grenzwert schon bekannt ist, unter einer stetigen Funktion darstellt.

Satz 6.38. — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f ist genau dann stetig bei x_0, wenn für jede konvergente Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ auch die Folge $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ gilt.*

Beweis. Angenommen f ist bei x_0 stetig und $(y_n)_n$ ist eine konvergente Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f an der Stelle x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$. Aufgrund der Konvergenz von $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N \implies |y_n - x_0| < \delta,$$

was gemeinsam

$$n \geq N \implies |f(y_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ergibt. Die Folge $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert also gegen $f(x_0)$. Für die Umkehrung nehmen wir an, dass f nicht stetig ist in z_0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert, mit

$$|x - x_0| < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Wir verwenden dies für $n \in \mathbb{N}$ und $\delta = 2^{-n} > 0$ und finden also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in D$ mit

$$|y_n - x_0| < 2^{-n} \qquad \text{und} \qquad |f(a_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon.$$

Aus disesn Ungleichungen schliessen wir einerseits, dass die Folge $(y_n)_n$ gegen x_0 konvergiert, und andererseits, dass $(f(y_n))_n$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. □

Übung 6.39. — Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Angenommen $(a_n)_n$ ist eine Folge in D, so dass $(f(a_n))_n$ konvergiert. Muss auch $(a_n)_n$ konvergieren?

6.2.2 Addition, Multiplikation und Ungleichungen

6.40. — Folgen in den reellen oder komplexen Zahlen, oder ganz allgemein Folgen in einem Ring, kann man addieren und multiplizieren. Wir unsere Diskussion auf Folgen reeller Zahlen, und überlassen es dem Leser über mögliche Verallgemeinerungen nachzudenken. Summen und skalare Vielfache von Folgen sind durch

$$\begin{aligned} (x_n)_{n=0}^{\infty} + (y_n)_{n=0}^{\infty} &= (x_n + y_n)_{n=0}^{\infty} \\ \alpha \cdot (x_n)_{n=0}^{\infty} &= (\alpha x_n)_{n=0}^{\infty} \end{aligned}$$

für Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert. Die Menge aller Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bildet damit einen unendlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Folgen kann man auch multiplizieren in dem man

$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (y_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n y_n)_{n=0}^{\infty}$$

definiert. Mit der oben gegebenen Addition und dieser Multiplikation bildet die Menge der Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ einen kommutativen Ring, das Nullelement ist die konstante Folge $(0)_{n=0}^{\infty}$ und das Einselement ist die konstante Folge $(1)_{n=0}^{\infty}$.

Proposition 6.41. — *Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$.*

1. *Die Folge $(x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. *Die Folge $(x_n y_n)_{n=0}^{\infty}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} y_n\big).$$

   Insbesondere ist $(\alpha x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. *Angenommen $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Dann ist die Folge $(x_n^{-1})_n$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^{-1}) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)^{-1}.$$

Insbesondere bildet die Menge der konvergenten Folgen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ einen Unterraum und die Bildung des Grenzwertes ist eine lineare Abbildung von diesem Unterraum nach $\mathbb{R}$.

Beweis. Seien $A = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $B = \lim_{n\to\infty} y_n$ die Grenzwerte der gegebenen Folgen. Für (1), sei $\varepsilon > 0$, und sei $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$|x_n - A| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad |y_n - B| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

gilt. So eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert aufgrund der Konvergenz der gegebenen Folgen. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$|(x_n + y_n) - (A + B)| \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

was die Aussage (1) zeigt. Aussage (2) kann man analog dazu beweisen, und wir verweisen auf Übung 6.42. Um (3) zu zeigen betrachten wir die Menge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Funktion f ist stetig auf ganz D. Nach Annahme ist die Folge $(x_n)_{n=0}$ ist eine Folge in D die gegen $A \in D$ konvergiert. Nach Satz 6.38 konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n=0}^{\infty} = (x_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ gegen $f(A) = A^{-1}$. □

Übung 6.42. — Beweisen Sie Aussage (2) in Proposition 6.41. Formulieren und beweisen Sie die Aussage (3) für Folgen komplexer Zahlen.

Proposition 6.43. — *Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

1. *Falls $A < B$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < y_n$ für alle $n \geq N$.*
2. *Falls $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $A \leq B$.*

Beweis. Angenommen $A < B$. Dann ist $\varepsilon = \frac{1}{3}(B - A) > 0$ und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} n \geq N \quad &\Longrightarrow \quad A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \\ n \geq N \quad &\Longrightarrow \quad B - \varepsilon < y_n < B + \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Da aber $A+\varepsilon < B-\varepsilon$ nach Wahl von ε, ergibt sich $x_n < A+\varepsilon < B-\varepsilon < y_n$ für alle $n \geq N$. Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Dies beweist aber auch die zweite Behauptung, denn falls $A > B$ wäre, dann gäbe es nach obigem Folgenglieder x_n und y_n mit $x_n > y_n$. □

Lemma 6.44 (Sandwich). — *Es seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen, so dass für ein $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N$ gelten. Angenommen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ sind konvergent und haben den selben Grenzwert. Dann ist auch die Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beweis. Dem pflichtbewussten Leser zur Übung überlassen. □

Übung 6.45. — Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte in den reellen Zahlen, falls sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^4 + 15}{3n^4 + n^3 + n - 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5}{n^3 + n + 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 10}{n^2 + 1}$$

Verwenden Sie hier und auch sonst kein früher erlerntes Kochrezept, das Sie nicht begründen können. Formulieren und beweisen Sie anschliessend einen allgemeinen Satz über derartige Grenzwerte.

Beispiel 6.46. — Für eine beliebige reelle Zahl $a > 0$ definieren wir die Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = \sqrt[n]{a}$. Wir behaupten, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

gilt. Angenommen $a \geq 1$. Wir definieren $b_n = x_n - 1 \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und wollen zeigen, dass die Folge $(b_n)_n$ gegen Null konvergiert. Es gilt

$$a = (1 + b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k \geq n b_n$$

nach dem Binomialsatz. In der letzten Ungleichung haben wir aus der Summe nur den Term mit $k = 1$ behalten, und alle anderen Terme der Summe weggelassen. Daher gilt $0 \leq b_n \leq \frac{a}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ nach Lemma 6.44 und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + 1 = 1$ nach Proposition 6.41 gezeigt ist. Der Fall $a \in (0, 1]$ folgt auch aus obigem und Teil (3) der Proposition 6.41.

Beispiel 6.47. — Wir definieren eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = \sqrt[n]{n}$, und behaupten, dass diese Folge konvergiert, mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wir argumentieren dafür ähnlich wie im Beispiel 6.46. Definiere $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, so dass

$$n = (1 + b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k \geq \binom{n}{2} b_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Wir dividieren durch $\frac{n(n-1)}{2}$ und erhalten

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

für alle $n \geq 2$. Da die Wurzelfunktion stetig ist, konvergiert nach Satz 6.38 die Folge

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{n-1}}\right)_{n=2}^{\infty}$$

gegen Null. Verwenden wir nun das Sandwich-Lemma so erhalten wir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und unsere Behauptung folgt.

6.2.3 Beschränkte Folgen reeller Zahlen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt beschränkte Folgen reeller Zahlen. Wie man leicht nachprüft bilden bschränkte Folgen einen Untervektorraum des Vektorraums aller Folgen reeller Zahlen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Die konvergenten Folgen sind wiederum Untervektorraum des Vektorraums der Beschränkten Folgen.

6.48. — Wie wir zeigen werden, besitzen beschränkte Folgen reeller Zahlen immer mindestens einen Häufungspunkt, oder äquivalent dazu, konvergierende Teilfolgen. Aus dieser Tatsache ergeben sich die wichtigen Begriffe des Limes superior und Limes inferior. Ausserdem sind monotone und beschränkte Folgen stets konvergent. Wir illustrieren dies an einem Bild.

Figur 6.1

Die durch $M > 0$ beschränkte, monoton wachsende Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ im Bild hat keine andere Wahl als gegen das Supremum S der Folgenglieder zu konvergieren.

Satz 6.49. — *Eine monotone Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Falls die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend ist, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

und falls die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend ist, so gilt entsprechend $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Falls $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent ist, ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt nach Lemma 6.15. Sei also $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Um zu zeigen dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, können wir hne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend ist, abdernfalls ersetzen wir einfach $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $(-x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sei $A = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann existiert nach der Charakterisierung des Supremums in Satz 3.51 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > A - \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt damit aus der Monotonie von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, dass

$$A - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq A < A + \varepsilon$$

gilt, was zu zeigen war. □

Übung 6.50. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die durch $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{2}{3}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$$

für $n \geq 1$ rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Übung 6.51. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton wachsende, reelle Folge und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende, reelle Folge mit $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass beide Folgen konvergieren, und dass $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

6.52. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Für die Definition von Grenzwerten und Häufungspunkten der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist nur ihr Langzeitverhalten relevant, oder genauer, die **Endabschnitte** $(x_k)_{n=N}^{\infty}$ für beliebig grosse $N \in \mathbb{N}$. Nach dieser Beobachtung definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Supremum

$$s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$$

über den Endabschnitt $\{x_k \mid k \geq n\}$ der Folge. Da $\{x_k \mid k \geq n+1\} \subset \{x_k \mid k \geq n\}$ ist, folgt $s_{n+1} \leq s_n$. Die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ ist also monoton fallend. Da $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ nach Annahme beschränkt ist, ist auch $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt, und also eine monoton fallende, beschränkte Folge. Die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert daher nach Satz 6.49 gegen das Infimum der Menge $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dieses Infimum wird als **Limes superior** der vorgegebenen Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bezeichnet.

Definition 6.53. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Die reellen Zahlen definiert durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{x_n \mid k \geq n\}\Big) \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\inf\{x_n \mid k \geq n\}\Big)$$

heissen **Limes superior**, respektive **Limes inferior** der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Beispiel 6.54. — Sei $(a_n)_n$ die reelle Folge definiert durch $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir stellen a_n, $S_n = \sup_{k\geq n} a_k$, $I_n = \inf_{k\geq n} a_k$ in folgender Tabelle dar.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$-1+\frac{1}{1}$	$1+\frac{1}{2}$	$-1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{1}{4}$	$-1+\frac{1}{5}$	$1+\frac{1}{6}$	$-1+\frac{1}{7}$	$1+\frac{1}{8}$	...
S_n	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{6}$	$1+\frac{1}{6}$	$1+\frac{1}{8}$	$1+\frac{1}{8}$	...
I_n	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	...

Man beachte dabei, dass $S_n = a_n$ ist, wenn n gerade ist und sonst $S_n = a_{n+1}$. Daher ist $\limsup_{n\to\infty}((-1)^n + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}((-1)^{2n} + \frac{1}{2n}) = 1$. Weiters ist wegen $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$ das Infimum $I_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $\liminf_{n\to\infty}((-1)^n + \frac{1}{n}) = -1$ gilt.

Satz 6.55. — *Der Limes superior* $A = \limsup_{n\to\infty} x_n$ *einer beschränkten Folge reeller Zahlen* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *erfüllt die folgenden Eigenschaft: Für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es nur endlich viele Folgenglieder* x_n *mit* $x_n > A + \varepsilon$*, und unendlich viele Folgenglieder* x_n *mit* $x_n > A - \varepsilon$*.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und schreibe $s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$. Die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen A. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s_N < A + \varepsilon$ gilt. Damit ist $x_n \leq s_N < A + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und also gibt es nur endlich viele Folgenglieder x_n mit $x_n > A + \varepsilon$. Für die zweite Aussage , sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $s_N \geq A$. Nach Definition von s_N und Satz 3.51 existiert ein $n \geq N$ mit $x_n \geq s_N - \varepsilon \geq A - \varepsilon$. Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, beweist dies dass es unendlich viele Folgenglieder x_n mit $x_n > A - \varepsilon$ gibt. □

Korollar 6.56. — *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt, und besitzt konvergente Teilfolgen.*

Beweis. Ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so ist $A = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ein Häufungspunkt. Tatsächlich ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\{n \geq N \mid A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon\}$$

unendlich nach Satz 6.55, und insbesondere nicht leer. Die Existenz konvergenter Teilfolgen folgt aus Proposition 6.23. □

Übung 6.57. — Zeigen Sie, dass die Eigenschaft in Satz 6.55 den Limes superior einer beschränkten Folge eindeutig charakterisieren.

Übung 6.58. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und sei $S \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max S \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \min S$$

gilt.

Übung 6.59. — Zeigen Sie, dass der Limes superior als Abbildung definiert auf dem Vektorraum der beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$ mit Zielraum $\mathbb{R}$ nicht linear ist. Genauer: Zeigen Sie, dass sich der Limes superior weder unter Addition noch unter skalarer Multiplikation geeignet verhält.

Übung 6.60. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und sei $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergierende Folge mit Grenzwert B. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= B + \limsup_{n\to\infty} x_n \\ \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) &= B \limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \text{falls } B \geq 0 \end{aligned}$$

Korollar 6.61. — *Eine beschränkte Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

gilt.

Beweis. Angenommen es gelte $A = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 6.55 gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq A + \varepsilon$, und aufgrund der analogen Eigenschaft des Limes inferior gibt es auch nur endlich endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \leq A - \varepsilon$. Es gibt also nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|A - x_n| \geq \varepsilon$, was zeigt dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, derart, dass $n \geq N \implies |A - x_n| < \varepsilon$ gilt. Also konvergiert die Folge.

Wir nehmen nun an, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, mit Grenzwert A. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt also

$$A - \varepsilon \leq \inf\{x_n \mid n \geq N\} \leq \sup\{x_n \mid n \geq N\} \leq A + \varepsilon$$

woraus

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq A + \varepsilon$$

folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus $A = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. □

Übung 6.62. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$ gilt. Sei X die Teilmenge $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gerade die Häufungspunkte der Menge X sind.

Übung 6.63. — Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen reeller Zahlen, mit Grenzwerten A, B und C respektive. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge definiert durch

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{falls } 3|n \\ b_n & \text{falls } 3|n-1 \\ c_n & \text{falls } 3|n-2 \end{cases}$$

für $n \in I\mathbb{N}$. Berechnen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ und die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Übung 6.64. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so dass $(x_{n+1} - x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen 0 konvergiert. Setze

$$A = \liminf_{n\to\infty} x_n \qquad \text{und} \qquad B = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ das Intervall $[A, B]$ ist. Konstruieren Sie ein Beispiel solch einer Folge $[A, B] = [0, 1]$.

Übung 6.65. — Finden Sie eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, so dass jede reelle Zahl A ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist.

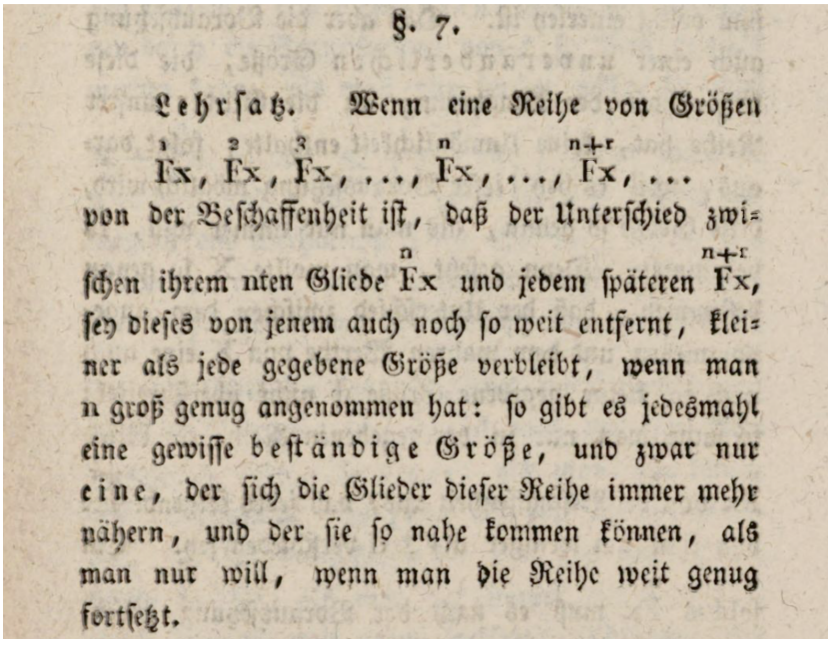
6.2.4 Reelle Cauchy-Folgen

Wir haben Cauchy-Folgen in allgemeinen metrischen Räumen bereits in Abschnitt 6.1.3 eingeführt, und einen metrischen Raum (X, d) als vollständig bezeichnet, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert. Den Begriff der Vollständigkeit haben wir ebenfalls im Zusammenhang mit angeordneten Körpern eingeführt. Der nachstehende Satz und Übung 6.69 zeigen, dass die Definitionen kompatibel sind.

Satz 6.66. — *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Konvergente Folgen sind Cauchy Folgen nach Übung 6.27. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Dann ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt, ebenfalls nach Übung 6.27. Nach Korollar 6.56 besitzt $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ einen Häufungspunkt, und damit auch Konvergente Teilfolgen nach Proposition 6.23. Aus Übung 6.28 folgt schliesslich, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. □

6.67. — Der heute gebräuchliche Konvergenzbegriff geht auf Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Bolzano und Karl Weierstrass zurück. Cauchy hat das Konvergenzkriterium 6.66 in seinem Cours d'analyse [Cau1821] benutzt, aber nicht explizit hervorgehoben. Als Satz taucht 6.66 zum ersten mal in Bolzano's Schrift von 1817 *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* auf. Bolzano liefert hier auch den ersten modernen Beweis des Zwischenwertsatzes 4.57. Die modernen Formulierungen dieser Resultate haben wir Weierstrass zu verdanken.



§. 7.

Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen

$\overset{1}{F}x, \overset{2}{F}x, \overset{3}{F}x, \ldots, \overset{n}{F}x, \ldots, \overset{n+r}{F}x, \ldots$

von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem nten Gliede $\overset{n}{F}x$ und jedem späteren $\overset{n+r}{F}x$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse beständige Größe, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.

Figur 6.2: Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Folgen, aus Bolzano's [Bol1817]

Beispiel 6.68. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir behaupten, dass die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$$

nicht zur Konvergenz der Folge äquivalent ist. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Folge

$$0, 1, 1\tfrac{1}{2}, 2, 2\tfrac{1}{3}, 2\tfrac{2}{3}, 3, 3\tfrac{1}{4}, 3\tfrac{2}{4}, 3\tfrac{3}{4}, 4, 4\tfrac{1}{5}, 4\tfrac{2}{5}, 4\tfrac{3}{5}, 4\tfrac{4}{5}, 5, 5\tfrac{1}{6} \ldots$$

die zwischen $n-1$ und n in Schritten der Länge $\frac{1}{n}$ fortschreitet. Diese Folge ist unbeschränkt, und damit sicherlich nicht konvergent. Andererseits verringert sich der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern je weiter die Folge fortschreitet, und wird beliebig klein.

Übung 6.69. — Sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ als dichte Teilmenge enthält, im Sinne von Korollar 3.64, und in dem alle Cauchy-Folgen konvergent sind. Zeigen Sie, dass K das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

6.2.5 Uneigentliche Grenzwerte

Ähnlich wie im Abschnitt 3.3.2 für Supremum und Infimum führen wir auch **uneigentliche Grenzerte** $+\infty$ und $-\infty$ für Folgen ein.

Definition 6.70. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir sagen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ **divergiert gegen** $+\infty$, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

falls für jede reelle Zahl $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so, dass $x_n > R$ für alle $n \geq N$ gilt. Genauso sagen wir, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ **gegen** $-\infty$ **divergiert**, falls für jede reelle Zahl $R < 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so, dass $x_n < R$ für alle $n \geq N$ gilt. In beiden Fällen sprechen wir von **uneigentlichen Grenzwerten**.

6.71. — Eine divergente Folge, oder auch eine unbeschränkte Folge, muss nicht gegen ∞ oder $-\infty$ divergieren. Zum Beispiel ist die Folge

$$0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9, \ldots$$

also $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch $x_n = (-1)^n n$, divergent, aber sie divergiert nicht gegen ∞ und auch nicht gegen $-\infty$.

Übung 6.72. — Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine unbeschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass eine Teilfolge existiert, die gegen ∞ oder gegen $-\infty$ divergiert.

6.73. — Wir können uneigentliche Grenzwerte verwenden, um den Limes superior und den Limes inferior für unbeschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ zu definieren. Falls die Fole $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ nicht von oben beschränkt ist, dann gilt $\sup\{x_n \mid k \geq n\} = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir schreiben

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Falls $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ zwar von oben, aber nicht von unten beschränkt ist, dann schreiben wir

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{x_k \mid k \geq n\}\big)$$

wobei rechterhand ein echter Grenzwert steht falls die monoton fallende Folge $(\sup\{x_k | k \geq n\})$ beschränkt ist, und der uneigentliche Grenzwert $-\infty$ andernfalls. Diese Terminologie benutzen wir analog für den Limes inferior.

Übung 6.74. — Beweisen Sie folgende Version des Sandwich-Lemmas für uneigentliche Grenzwerte. Für zwei Folgen reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \implies \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

6.2.6 Folgen komplexer Zahlen

Um Folgen in $\mathbb{C}$ zu studieren ist es oft ausreichend, wenn auch nicht immer praktisch, die entsprechenden Folgen von Real- und Imaginärteilen in $\mathbb{R}$ zu betrachten.

Lemma 6.75. — *Eine Folge komplexer Zahlen $(x_n + iy_n)_{n=0}^{\infty}$ ist genau dann konvergent mit Grenzwert $A+iB \in \mathbb{C}$, wenn die beiden Folgen reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent sind, mit Grenzwert A, respektive B.*

Beweis. Angenommen $(x_n + iy_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $A + iB \in \mathbb{C}$. Für $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|(x_n + iy_n) - (A + iB)| < \varepsilon$ für $n \in \mathbb{N}$. Da für alle $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z|$ gilt, folgt

$$|x_n - A| \leq |(x_n + iy_n) - (A + iB)| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |y_n - B| \leq |(x_n + iy_n) - (A + iB)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Dies zeigt, dass die Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent sind, mit Grenzwert A, respektive B. Die Umkehrung folgt aus $(x_n + iy_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n)_{n=0}^{\infty} + i(y_n)_{n=0}^{\infty}$ und Aussage (2) in Proposition 6.41, die wortwörtlich auch für Folgen komplexer Zahlen gilt, mit dem selben Beweis. □

Übung 6.76. — Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Impliziert umgekehrt die Konvergenz von $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ die Konvergenz von $(z_n)_{n=0}^{\infty}$?

Übung 6.77. — Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $(\mathrm{Re}(z_n))_{n=0}^{\infty}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n=0}^{\infty}$ Cauchy-Folgen sind.

Übung 6.78. — Bestimmen Sie die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass die sogenannte **geometrische Folge** mit Slakierungsfaktor z, gegeben durch $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

Übung 6.79. — Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n = 0$ gilt.

Übung 6.80. — Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge der **Cesàro-Mittel** $(w_n)_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$$

für $n \geq 1$ konvergiert, und denselben Grenzwert wie $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ hat. Überzeugen Sie sich auch davon, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt, das heisst, dass die Konvergenz der Cesàro-Mittel nicht Konvergenz der Folge impliziert.

6.3 Die Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe des Konvergenz- und Grenzwertbegriffs von Folgen die Exponentialfunktion definieren, und einige ihrer Eigenschaften zu beweisen.

6.3.1 Definition der Exponentialfunktion

PROPOSITION 6.81. — *Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch*

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ist konvergent, und ihr Grenzwert ist eine positive reelle Zahl.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ fest gewählt, und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl mit $n_0 \geq 1$ und $n_0 < -x$. Wir behaupten, dass die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ beschränkt und monoton steigend ist. Das wird nach Satz 6.49 zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$, und damit auch die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. Zunächst bemerken wir, dass für $x \geq 0$ die Ungleichungen

$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} \leq \frac{x+n}{(n+1)(n+x)} \leq 1,$$

gelten, und damit auch

$$-\frac{x}{(n+1)(n+x)} \geq -1 \tag{6.2}$$

für alle $n \geq 1$. Falls $x < 0$ und $n \geq n_0$ so gilt (6.2) ebenfalls, das heisst, (6.2) gilt für alls $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq n_0$. Für diese $n \in \mathbb{N}$ können wir die Bernoulli-Ungleichung in Lemma 4.4 verwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} &= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \frac{n+x}{n}\left(\frac{n^2+nx+n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{n+x}\right) = 1.\end{aligned}$$

Dies beweist die Monotonie der Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$. Um Beschränktheit zu zeigen betrachten wir zuerst den Fall $x \leq 0$. Hier gilt $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq 1$, und also ist 1 eine obere Schranke für die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \mid n \geq n_0\right\} \ > 0$$

Die Proposition ist damit für $x \leq 0$ gezeigt. Für $x \geq 0$ und $n > x$ verwenden wir

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1,$$

woraus für alle $n > x$ die Abschätzung

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

folgt. Da aber die Folge $\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$ auf Grund von obigem und Proposition 6.41(3) konvergent und damit beschränkt ist, folgt nun die Beschränktheit der Folge $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. □

Definition 6.82. — Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist die durch

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion. Die **Eulersche Zahl** $e \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{6.3}$$

Ihr numerischer Wert beträgt

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699 95\ldots$$

Die Definition von e als Limes (6.3) ist nicht unbedingt geeignet, um effizient präzise Annäherungen von e zu berechnen.

Übung 6.83. — Angenommen wir schneiden einen Laib Brot, der $n = 10$ Rosinen enthält, in n Stücke. Wir nehmen nun ein Stück. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses keine Rosine enthält? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

6.3.2 Funktionalgleichung, Stetigkeit und Monotonie

Satz 6.84. — *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *ist bijektiv, streng monoton steigend, und stetig. Ausserdem gilt*

$$\exp(0) = 1, \tag{6.4}$$

$$\exp(-x) = \exp(x)^{-1} \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Beweis. Wir beginnen damit, die Funktionalgleichungen (6.4), (6.5) und (6.6) zu überprüfen. Die Identität (6.4) folgt unmittelbar aus der Definition der Exponentialfunktion. Für (6.5) betrachten wir

$$\exp(x)\exp(-x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Für $n \geq |x|$ gilt $-\frac{x^2}{n^2} \geq -1$, und damit erhalten wir mit der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzungen

$$1-\frac{x^2}{n} \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1.$$

die gemeinsam mit dem Sandwich-Lemma 6.44 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$ zur Folge hat und Gleichung (6.5) zeigt.

Die Funktionalgleichung (6.6) gilt falls $x = 0$ oder $y = 0$. Wir beweisen den verbleibenden Fall $x \neq 0$ und $y \neq 0$ durch ein ähnliches Argument wie oben. Vorbereitend berechnen wir zuerst für $n \geq 1$ das Produkt

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{x+y}{n}\right) = 1 - \frac{(x+y)^2}{n^2} + \frac{xy}{n^2}\left(1+\frac{x+y}{n}\right) = 1 + \frac{c_n}{n^2},$$

wobei c_n für

$$c_n = -(x^2+y^2) - xy + xy\frac{x+y}{n}$$

steht. Es gilt $-(x^2+y^2) - xy < 0$ wegen $x \neq 0$ und $y \neq 0$, womit wir $c_n < 0$ und $\frac{c_n}{n^2} \geq -1$ für hinreichend grosse n erhalten. Aus der Bernoulli-Ungleichung folgt nun

$$1 + \frac{c_n}{n} \leq \left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n \leq 1$$

und also gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n = 1$ nach dem Sandwich-Lemma. Unter Verwendung von (6.5) erhalten wir

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{x+y}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n = 1$$

Dies beweist die Funktionalgleichung (6.6). Es bleibt, Stetigkeit, Monotonie und Bijektivität der Exponentialfunktion nachzuweisen. Die Abschätzung

$$\exp(x) \geq 1 + x \tag{6.7}$$

wird sich dabei als hilfreich herausstellen. Für $x < -1$ ist das klar, da $\exp(x) > 0$ gilt. Für $x \geq -1$ gilt $(1+\frac{x}{n})^n \geq 1 + x$ für alle $n \geq 1$ aufgrund der Bernoulli-Ungleichung 4.4, und also (6.7) wie behauptet.

Behauptung: *Die Funktion* exp *ist stetig.* Wir zeigen zuerst die Stetigkeit der Exponentialfunktion von bei $0 \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta = \min\{\varepsilon, 1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\}$ womit $\delta < 1$ und auch $\frac{1}{1-\delta} \leq 1 + \varepsilon$ gilt. Für $x \in (-\delta, 0]$ wenden wir (6.7) an und erhalten

$$1 - \varepsilon \leq 1 - \delta < 1 + x \leq \exp(x) \leq 1,$$

also insbesondere $|\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon$. Für $x \in [0, \delta)$ wenden wir obiges Argument für $-x$ an und erhalten $1 - \delta \leq \exp(-x) \leq 1$ oder äquivalenterweise $1 \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-\delta} < 1 + \varepsilon$ nach Wahl von δ, und dadurch wiederum $|\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon$. Dies zeigt Stetigkeit der Exponentialfunktion bei 0. Um Stetigkeit bei einem beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}$ zu zeigen, schreiben wir

$$\exp(x) = \exp(x - x_0 + x_0) = \exp(x - x_0)\exp(x_0).$$

Wir können die Exponentialfunktion damit als Verknüpfung $\exp = \mu \circ \exp \circ \tau$ schreiben, mit $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tau(x) = x - x_0 \qquad \text{und} \qquad \mu(x) = x \cdot \exp(x_0)$$

Die Funktionen τ und μ sind stetig. Insbesondere ist τ stetig bei x_0, und exp ist stetig bei $0 = \tau(x_0)$. Es folgt die Stetigkeit von exp bei x_0 aus Proposition 4.51.

Behauptung: *Die Funktion* exp *ist streng monoton wachsend.* Für $x > 0$ gilt $\exp(0) = 1 < 1 + x \leq \exp(x)$ wegen (6.7). Für alle reellen Zahlen $x < y$ folgt daraus $\exp(y - x) > 1$, also

$$\exp(x) < \exp(x)\exp(y - x) = \exp(y),$$

und daher ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ streng monoton wachsend wie behauptet.

Behauptung: *Die Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *ist bijektiv.* Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend, und also injektiv. Um Surjektivität zu zeigen, wähle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Setzen wir $x_0 = -a^{-1}$ und $x_1 = a$, so folgt

$$\exp(x_0) < a < \exp(x_1)$$

aus der Ungleichung (6.7). Da exp auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz 4.57, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x < x_1$ und $\exp(x) = a$ gibt. Dies zeigt die Behauptung, und beendet den Beweis von Satz 6.84. □

Übung 6.85. — Zeigen Sie für $x \geq 0$ die Ungleichung $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq \exp(x)$.

6.3.3 Der natürliche Logarithmus

6.86. — Im Satz 6.84 haben wir gezeigt, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine bijektive, streng monoton wachsende stetige Funktion ist. Die eindeutige Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

. der bijektiven Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ nennen wir **Logarithmus**.

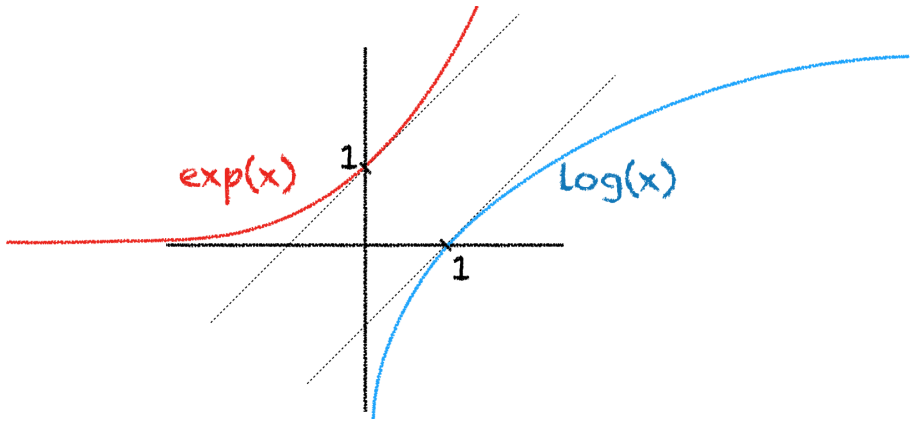
Korollar 6.87. — *Der Logarithmus* $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *ist eine streng monoton wachsende, stetige und bijektive Funktion. Des Weiteren gilt*

$$\log(1) = 0, \tag{6.8}$$

$$\log(a^{-1}) = -\log(a) \qquad \textit{für alle } a \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{6.9}$$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \textit{für alle } a, b \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{6.10}$$

Beweis. Das folgt direkt aus Satz 6.84 und und dem Umkehrsatz 4.62. Die Funktionalgleichungen (6.8), (6.9) und (6.10) folgen aus den Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion, wenn wir $x = \log a$ und $y = \log b$ einsetzen. □



Figur 6.3: Die Graphen der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Die Hilfslinien zeigen $\exp(x) \geq x + 1$ sowie $\log(x) \leq x - 1$.

6.88. — Man nennt die hier definierte Logarithmusfunktion auch den **natürlichen Logarithmus**, um sie von Logarithmus zu einer anderen **Basis** $a > 1$, typischerweise $a = 10$ oder $a = 2$ zu unterscheiden. Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Wir können den Logarithmus $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ zur Basis a definieren. Die Notation

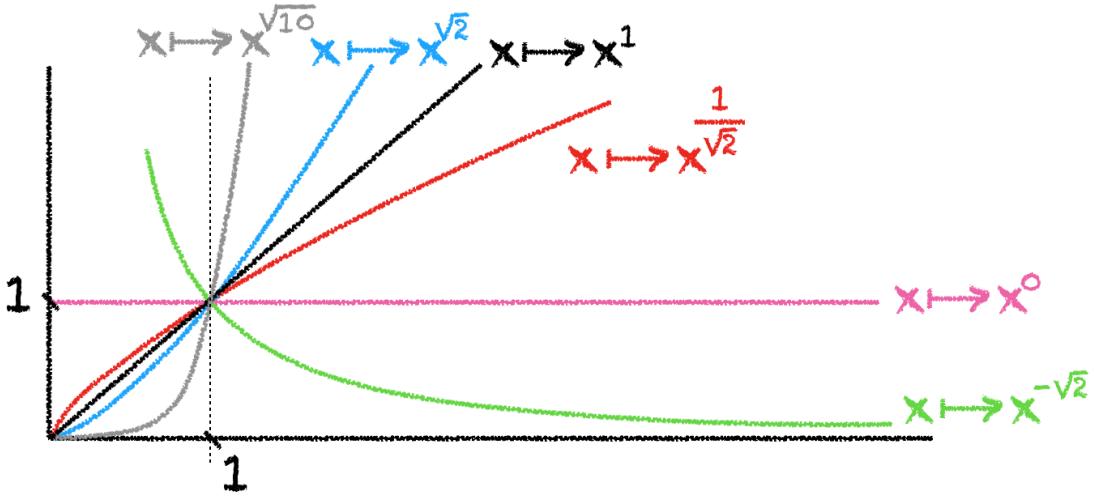
$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$$

für $a > 1$ und alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist gebräuchlich. Überprüfen Sie, dass $\log_{10}(10^n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir werden diese Definition aber nicht benutzen, auch nicht für $a = 10$, und $\log(x)$ wird immer den natürlichen Logarithmus von $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zur Basis e bezeichnen.

6.89. — Den Logarithmus und die Exponentialabbildung können wir verwenden, um allgemeinere Potenzen zu definieren. Für eine positive Zahl $a > 0$ und beliebige Exponenten $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$a^x := \exp(x \log(a)).$$

Insbesondere schreiben wir $e^x = \exp(x \log(e)) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



Figur 6.4: Die Graphen von $a \mapsto a^x$ für verschiedene Exponenten $x \in \mathbb{R}$.

Übung 6.90. — Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Q}$ und $a > 0$ diese Definition mit der Definition von rationalen Potenzen aus Beispiel 4.63 übereinstimmt. Überprüfen Sie des Weiteren die Rechenregeln

$$\log(a^x) = x\log(a), \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

Übung 6.91. — Sei $a > 0$ eine positive Zahl. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl $C_a > 0$ existiert, derart, dass $\log(x) \leq C_a x^a$ für alle $x > 0$ gilt.

Übung 6.92. — Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x > -1$ und $p \geq 1$ die stetige Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^p \geq 1 + px.$$

gilt.

Applet 6.93 (Rechenschieber)**.** *Berechnen Sie mit dem Rechenschieber einige Produkte und Quotienten. Erinnern Sie sich an die Eigenschaften des Logarithmus um zu erkennen, wie man diese Berechnungen durchführt. Vor der Einführung von elektronischen Taschenrechnern waren diese mechanischen Hilfsmittel weit verbreitet.*

6.4 Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ und wollen Grenzwerte von $f(x)$ für den Fall definieren, wenn $x \in D$ gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt. Typische Situationen sind $D = \mathbb{R}$ oder $D = [0, 1]$ oder $D = (0, 1)$, und $x_0 = 0$ in allen Fällen.

6.4.1 Grenzwert in der Umgebung eines Punktes

6.94. — Wir legen für diesen Abschnitt eine nichtleere Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ fest, sowie ein Element $x_0 \in \mathbb{R}$ das ein Häufungspunkt von D, oder ein Element von D ist. Das bedeutet, dass

$$D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \varnothing \tag{6.11}$$

für alle $\delta > 0$ gilt, oder äquivalent, dass es eine Folge in D gibt, die gegen x_0 strebt.

Definition 6.95. — Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl A heisst **Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine $\delta > 0$ existiert, mit der Eigenschaft

$$x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

6.96. — Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to x_0$ müssen natürlich nicht existieren. Falls aber ein Grenzwert existiert, dann ist er eindeutig bestimmt. Deshalb sprechen wir ab jetzt von *dem* Grenzwert, und schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

falls der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ existiert und gleich A ist. Informell ausgedrückt bedeutet dies, dass die Funktionswerte von f beliebig nahe bei A liegen wenn $x \in D$ nahe an x_0 heranrückt.

6.97. — Der Grenzwert erfüllt Eigenschaften analog zu Proposition 6.41. Sind f und g Funktionen auf D, derart, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

existieren, so existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = A + B \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB.$$

Die Ungleichung $f \leq g$ impliziert $A \leq B$. Schliesslich gilt das Sandwich-Lemma: Ist h eine weitere Funktion auf F mit $f \leq h \leq g$, so folgt aus $A = B$ dass der Grenzwert von $h(x)$ für $x \to x_0$ existiert und gleich $A = B$ ist.

Lemma 6.98. — *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist x_0 ein Element von D, so ist f genau dann stetig bei x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.*

Beweis. Falls f bei x_0 stetig ist, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ die Implikation $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Vergleicht man dies mit der Definition 6.95, so erhält man gerade $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Falls umgekehrt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, so bedeutet dies nach Definition 6.95 gerade, dass f bei x_0 stetig ist. □

6.99. — Angenommen x_0 sei ein Element von D und auch ein Häufungspunkt von D. Dann ist x_0 auch ein Häufungspunkt von $D \setminus \{x_0\}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und schreibe $f^* : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $D \setminus \{x_0\}$. Es ist durchaus möglich, dass f an der Stelle x_0 unstetig ist, aber der Grenzwert

$$A = \lim_{x \to x_0} f^*(x) \tag{6.12}$$

trotzdem existiert. Unter diesen Umständen nennt man den Punkt $x_0 \in D$ eine **hebbare Unstetigkeitsstelle** von f. Die Funktion $\widetilde{f} : D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \setminus \{x_0\} \\ A & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

ist stetig an der Stelle x_0. Wir haben damit die Unstetigkeit der Funktion $\widetilde{f}$ behoben, in dem wir den Wert der Funktion f an der Stelle x_0 durch A ersetzt haben. Wir nennen den durch (6.12) definierten Grenzwert auch Grenzwert von f in einer **punktierten Umgebung** von x_0. Als Notation dafür verwenden wir gelegentlich

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x). \tag{6.13}$$

6.100. — In der Literatur, nicht ausschliesslich, aber insbesondere wenn es sich um ältere Quellen handelt, werden Grenzwerte oft systematisch als Grenzwerte in einer punktierte Umgebung verstanden. Wir übernehmen hier die Konventionen aus J. Dieudonné's *Eléments d'analyse* [Die1990]. Die Buchreihe *Eléments d'analyse* ist ein klassisches Referenzwerk, und besteht aus 9 Bänden. Der erste Band erschien 1960 auf englisch unter dem Titel *Foundations of Modern Analysis*. Er ist aus einem Analysis Vorlesungsskript von Dieudonné an der Universität Michigan entstanden. Dieser erste Band, der auch in deutscher Übersetzung verfügbar ist, deckt das Grundwissen in Analysis für angehende Mathematiker und Physiker ab.

6.101. — Angenommen x_0 sei ein Häufungspunkt von D, aber nicht Element von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert der Grenzwert A von $f(x)$ für $x \to x_0$, so ist die Funktion

$\widetilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \\ A & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

stetig an der Stelle x_0. Wir nennen in dieser Situation die Funktion $\widetilde{f}$ die **stetige Fortsetzung** von f auf $D \cup \{x_0\}$.

Lemma 6.102. — *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ in D auch $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = A$ gilt.*

Beweis. Angenommen A sei der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$. Sei $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in D mit Grenzwert x_0. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ gegen A konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad n \geq N \implies 0 < |a_n - x_0| < \delta$$

für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$. Gemeinsam ergibt das

$$n \geq N \implies |f(a_n) - A| < \varepsilon$$

was zeigt, dass die Folge $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ gegen A konvergiert. Für die Umkehrung nehmen wir an, dass A sei nicht Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit

$$|x - x_0| < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Wir verwenden dies für $\delta = 2^{-n} > 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, und finden also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in D$

$$|y_n - x_0| < 2^{-n} \qquad \text{und} \qquad |f(y_n) - A| \geq \varepsilon.$$

Daraus schliessen wir, dass die Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen x_0 konvergiert, und dass $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ nicht gegen A konvergiert. □

Übung 6.103. — Benutzen Sie Lemma 6.102, um die in 6.96 und 6.97 gemachten Behauptungen zu beweisen.

Proposition 6.104. — *Sei E eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, und sei $f : D \to E$ eine Funktion, so, dass der Grenzwert $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und in E liegt. Sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine bei y_0 stetige Funktion. Dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.*

Beweis. Wir wenden das in Lemma 6.102 gebene Kriterum an. Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in D die gegen x_0 konvergiert. Nach Lemma 6.102 gilt dann $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(x_0) = y_0$. Die Stetigkeit von g bei y_0 impliziert nun mit Satz 6.38, dass $\lim\limits_{n \to \infty} g(f(z_n)) = g(y_0)$ gilt. Da

$(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beliebige gegen y_0 konvergierende Folge war, folgt wiederum aus Lemma 6.102, dass $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$ gilt. □

6.105. — Wir können, wie bereits für für Folgen, Konventionen für uneigentliche Grenzwerte von Funktionen einführen. Wir sagen zum Beispiel, dass $f(x)$ gegen $+\infty$ für $x \to x_0$ divergiert und schreiben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, falls für jede reelle Zahl $R > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit der Eigenschaft dass

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) > R$$

für alle $x \in D$ gilt.

6.4.2 Einseitige Grenzwerte

Neben Grenzwerten bei einem Punkt x_0 nach Definition 6.95, und Grenzwerten in einer punktierten Umgebung wie in 6.99 diskutiert, sind noch eine Reihe weiterer Grenzertbegriffe nützlich, bei denen es darauf ankommt, von welcher Richtung her man sich dem Grenzpunkt x_0 nähert, und bei denen der Grenzpunkt x_0 auch eines der Symbole $+\infty$ oder $-\infty$ sein darf.

Definition 6.106. — Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $D \cap [x_0, x_0 + \delta) \neq \varnothing$ für alle $\delta > 0$ gilt. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl A heisst **rechtsseitiger Grenzwert** von $f(x)$ bei x_0, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit

$$x \in D \cap [x_0, x_0 + \delta) \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

6.107. — Rechtsseitige Grenzwerte kann man als Spezialfälle von Grenzwerten von Funktionen ansehen. Bezeichnet nämlich $f_{\geq x_0}$ die Einschränkung von f auf $D \cap [x_0, \infty)$, so ist ein rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0 einfach ein Grenzwert von $f_{\geq x_0}$ bei x_0 wie in 6.95 definiert. Insbesondere übertragen sich alle in 6.96 und 6.96 gegebenen Eigenschaften auf rechtsseitige Grenzwerte. Existiert der rechtsseitige Grenzwert A von f an der Stelle x_0, so benutzen wir die Notation

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0 \leq x}} f(x). \tag{6.14}$$

um dies auszudrücken. Falls x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ ist, so können wir wie in 6.99 auch die punktierte Version des rechtsseitigen Grenzwertes

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0 < x}} f(x)$$

definieren. Analog zu rechtsseitigen Grenzwerten können wir auch linksseitige Grenzwerte definieren. Schliesslich können wir auch für einseitige Grenzwerte die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ zulassen, wie in 6.105. Wir fassen alle Varianten in 6.110 zusammen.

Definition 6.108. — Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $D \cap (R, \infty) \neq \varnothing$ für alle $R > 0$ gilt. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl A heisst **Grenzwert von $f(x)$ für** $x \to \infty$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert, mit

$$x \in D \cap (R, \infty) \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

6.109. — Falls ein Grenzwert A von $f(x)$ für $x \to \infty$ existiert, so ist er eindeutig, und wir schreiben

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Grenzwerte für $x \to \infty$ kann man in rechtsseitige Grenzwerte für $x \to 0$ überführen. Sind D und f wie in Definition 6.108 gegeben, so kann man die Menge E und die Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E = \{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid x^{-1} \in D\} \qquad g(x) = f(x^{-1})$$

betrachten. Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)$$

was insbesondere bedeutet, dass der eine Grenzwert existiert wenn und nur wenn der andere Grenzwert existiert.

6.110. — In den folgenden Tabellen fassen wir alle Grenzwertbegriffe für Funktionen zusammen. Es bezeichnet $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in \mathbb{R}$, und A eine reelle Zahl.

Tabelle 1: Echte Grenzwerte für $x \to x_0$

Notation	U_δ, nichtleer für alle $\delta > 0$	Bedingung: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$	$x \in U_\delta \implies \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A$	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$	$x \in U_\delta \implies \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x) = A$	$[x_0, x_0 + \delta) \cap D$	$x \in U_\delta \implies \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A$	$(x_0, x_0 + \delta) \cap D$	$x \in U_\delta \implies \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x) = A$	$(x_0 - \delta, x_0] \cap D$	$x \in U_\delta \implies \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = A$	$(x_0 - \delta, x_0) \cap D$	$x \in U_\delta \implies \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$

Tabelle 2: Uneigentliche Grenzwerte für $x \to x_0$

Notation	U_δ, nichtleer für alle $\delta > 0$	Bedingung: $\forall M > 0\, \exists \delta > 0$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \bigstar}} f(x) = +\infty$	Entspr. $\bigstar$ wie in Tabelle 1	$x \in U_\delta \implies f(x) > M$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \bigstar}} f(x) = -\infty$	Entspr. $\bigstar$ wie in Tabelle 1	$x \in U_\delta \implies f(x) < -M$

Tabelle 3: Echte Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Notation	U_R, nichtleer für alle $R > 0$	Bedingung: $\forall \varepsilon > 0\, \exists R > 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$(R, \infty) \cap D$	$x \in U_R \implies \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$(-\infty, -R) \cap D$	$x \in U_R \implies \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

Tabelle 4: Uneigentliche Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Notation	U_R, nichtleer für alle $R > 0$	Bedingung: $\forall M > 0\, \exists R > 0$
$\lim\limits_{x\to\bigstar} f(x) = +\infty$	Entspr. $\bigstar$ wie in Tabelle 3	$x \in U_R \implies f(x) > M$
$\lim\limits_{x\to\bigstar} f(x) = -\infty$	Entspr. $\bigstar$ wie in Tabelle 3	$x \in U_R \implies f(x) < -M$

Übung 6.111. — Stellen Sie eine Sammlung von Funktionsgraphen zusammen, die die verschiedenen Grenzwerte in den Tabellen 1,2,3,4 aus 6.110 illustrieren. Geben Sie ebenfalls Beispiele in denen diese Grenzwerte nicht existieren.

Definition 6.112. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Falls der rechtsseitige Grenzwert

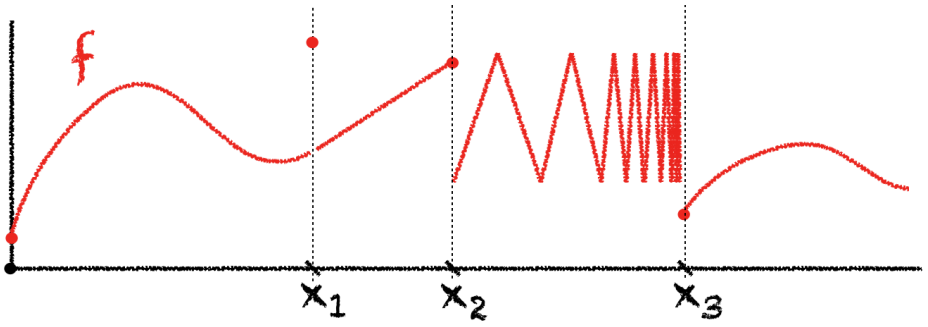
$$A = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\geq x_0}} f(x) \tag{6.15}$$

existiert, dann sagen wir, dass f **rechtsseitig stetig** bei x_0 ist. Analog dazu definieren wir **linksseitige Stetigkeit**. Wir nennen $x_0 \in D$ eine **Sprungstelle**, falls die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) \tag{6.16}$$

beide existieren, aber verschieden sind.

6.113. — Der Leser sei gewarnt, dass die Definitionen von links- und rechtsseitiger Stetigkeit in der Literatur nicht einheitlich sind. Insbesondere kommt es vor, dass etwa rechtsseitige Stetigkeit als Existenz des Grenzwertes (6.15) mit $x > x_0$ definiert wird. Die folgende Graphik stellt eine Funktion mit drei Unstetigkeitsstellen x_1, x_2, x_3 dar.



Die Unstetigkeit x_1 ist eine hebbare Unstetigkeit. Bei x_1 ist die Funktion weder links- noch rechtsseitig stetig. Der Punkt x_1 ist auch keine Sprungstelle. Zwar existieren beide Grenzwerte

(6.16) für $x \to x_1$, aber sie sind gleich. An der Stelle x_2 ist die Funktion f linksseitig stetig, aber nicht rechtsseitig stetig. Der Punkt x_2 ist eine Sprungstelle. Am der Stelle x_3 ist f rechtsseitig stetig. Schliesslich ist x_3 keine Sprungstelle, da der linksseitige Grenzwert nicht existiert.

Beispiel 6.114. — Der Definitionsbereich für alle Funktionen in diesem Beispiel ist $D = \mathbb{R}_{>0}$. Wir wollen zeigen, dass der Grenzwert für $x \to 0$ der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = x^x = \exp(x \log(x))$$

existiert und ihn berechnen. Dazu wollen wir zuerst zwei weitere Grenzwerte berechnen. Wir behaupten, dass

$$\lim_{y\to\infty} y \exp(-y) = 0 \tag{6.17}$$

gilt. Auf Grund der Monotonie der Folge $((1 + \frac{y}{n})^n)_{n=0}^{\infty}$ für $y > 0$, die in Abschnitt 6.3 für die Definition der Exponentialabbildung verwendet wurde, gilt $\exp(y) \geq (1 + \frac{y}{2})^2$ für $y > 0$. Daraus ergibt sich $0 \leq y \exp(-y) \leq \frac{y}{(1+\frac{y}{2})^2} \leq \frac{4}{y}$, was wegen dem Sandwich-Lemma eben (6.17) impliziert. Als nächstes wollen wir

$$\lim_{x\to 0} x \log x = 0 \tag{6.18}$$

zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen (6.17) ein $\delta > 0$ so dass $|y \exp(-y)| < \varepsilon$ für alle $y > \frac{1}{\delta}$. Sei nun $x \in (0, \exp(-\frac{1}{\delta}))$ und setze $y = -\log x$. Dann gilt $y > \frac{1}{\delta}$ auf Grund der strengen Monotonie des Logarithmus und damit $|x \log x| = |\exp(-y)y| < \varepsilon$, was (6.18) zeigt. Auf Grund von Proposition 6.104 und da die Exponentialabbildung stetig ist, ergibt sich aus (6.18) nun

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \log x) = \exp(0) = 1.$$

Hieraus ergibt sich auch ein weiterer Beweis für Beispiele 6.46 und 6.47.

Übung 6.115. — Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{2e^{2x} - 1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a}$$

Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

Übung 6.116. — Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ Polynome, mit $q \neq 0$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Nullstellen von q. Wir betrachten die Funktion $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ auf $\mathbb{R} \setminus X$. Beschreiben Sie, wie man die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

für $x_0 \in X$ berechnet. An welchen Punkten $x_0 \in X$ kann man $\frac{p}{q}$ stetig fortsetzen? Welche Punkte $x_0 \in X$ sind Sprungstellen?

6.4.3 Landau Notation

Wir führen nun zwei geläufige Notationen ein, die das asymptotische Verhalten einer Funktion mit dem asymptotischen Verhalten einer anderen Funktion vergleichen – also ein relatives asymptotisches Verhalten beschreiben. Diese Notationen sind nach dem Deutsch-Jüdischen Mathematiker Edmund Georg Hermann Landau (1877 - 1938) benannt. Landau nahm die Bedrohung durch die Nationalsozialisten lange nicht ernst. Als ihm ein Freund 1923 von Plänen für Konzentrationslagern für Juden erzählte, meinte er, in diesem Fall würde er sich ein Zimmer mit Balkon und Ausblick nach Süden sichern.

6.117. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Element von D oder ein Häufungspunkt von D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir schreiben

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0,$$

falls ein $\delta > 0$ und eine reelle Zahl $M > 0$ existieren, so dass die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x)| \leq M|g(x)|$$

für alle $x \in D$ gilt. Man sagt f sei **Gross-O** von g für $x \to x_0$. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D \backslash x_0$ genügend nahe an x_0 gilt, ist $f = O(g)$ gleichbedeutend damit, dass $\frac{f(x)}{g(x)}$ in einer Ungebung von x_0 beschränkt ist. Wir können für x_0 auch die Elemente $+\infty$ und $-\infty$ der erweiterten Zahlengerade zulassen. Dann bedeutet

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0,$$

dass es ein $R > 0$ gibt und eine reelle $M > 0$ gibt, so dass die Implikation

$$R < x \implies |f(x)| \leq M|g(x)|$$

für alle $x \in D$ gilt. Der Vorteil dieser Notation ist, dass wir den Namen für die obere Schranke $|M|$ nicht einführen müssen. Falls uns diese Konstante nicht besonders interessiert, dann können wir uns dadurch bei Rechnungen auf das Wesentlich konzentrieren. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **impliziten Konstante**.

Beispiel 6.118. — Sind f beschränkt und g stetig in einer Umgebung von x_0 mit $g(x_0) \neq 0$, so gilt $f(x) = O(g(x))$. Es gilt

$$x^2 = O(x) \quad \text{für } x \to 0$$

aber nicht $x = O(x^2)$, da $\frac{x}{x^2}$ in keiner punktierten Umgebung von 0 beschränkt ist. Es gilt

$$\frac{3x^3}{x^3 + 3} = O(1) \quad \text{für } x \to \infty$$

aber nicht $\frac{3x^3}{x^3+3} = O(x^\alpha)$ für $\alpha < 0$.

6.119. — Wenn f nicht nur durch g beschränkt ist, sondern asymptotisch gegenüber g vernachlässigbar ist, das heisst, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit, so dass die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

für alle $x \in D$ gilt, dann sagen wir dass f **Klein-o** von g ist für $x \to x_0$, und schreiben

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0,$$

Falls $g(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt, so ist $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ gleichbedeutend mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Wir definieren $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$ auf die übliche Art und Weise.

Beispiel 6.120. — Zum Beispiel gilt $x = o(x^2)$ für $x \to \infty$ und $x^2 = o(x)$ für $x \to 0$. Für jedes $\alpha < 1$ gilt

$$\frac{3x^3}{2x^2 + x^{10}} = O(|x|^\alpha) \quad \text{für } x \to 0$$

aber nicht für $\alpha \geq 1$. Tatsächlich existiert für jedes $\alpha < 1$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{3x^3}{|x|^\alpha (2x^2 + x^{10})} \right| = \lim_{x \to 0} |x|^{1-\alpha} \frac{3}{(2 + x^8)} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} |x|^{1-\alpha}$$

und ist gleich 0. Für $\alpha = 1$ existiert zwar der Grenzwert, aber ist nicht 0, und für $\alpha > 1$ ist der Grenzwert $+\infty$.

Übung 6.121. — Zeigen Sie, dass die Asymptotiken

$$\begin{aligned} x^p &= o(x) && \text{für } x \to 0, & x &= o(x^p) && \text{für } x \to \infty \\ x^a &= o(e^x) && \text{für } x \to \infty, & \log(x) &= o(x^b) && \text{für } x \to \infty \end{aligned}$$

für jedes $p > 1$, $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ zutreffen. Benutzen Sie dazu Übung 6.91.

Übung 6.122. — Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ wie oben, und f_1, f_2, g reellwertige Funktionen auf D. Zeigen Sie, dass falls $f_1(x) = o(g(x))$ und $f_2(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, dann auch

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Formulieren und zeigen Sie die analoge Aussage für Gross-O.

6.123. — Die Landau Notation wird in vielen Situationen auch als Platzhalter verwendet, um beispielsweise auszudrücken, dass ein Term in einer Summe schneller anwächst oder abfällt

als die anderen. In einem Ausdruck der Form

$$f(x) + o(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0$$

steht der Term $o(g(x))$ für die Klasse einer Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$h(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Entsprechend symbolisiert $f(x)+o(g(x))$ die Klasse einer Funktion s mit $s(x)-f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$. Dies gilt analog ebenso für die Gross-O Notation.

6.124. — Beispielsweise schreibt man

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x + 2}{x^2 + x - 34} &= x - 8 + o(1) \quad \text{für } x \to \infty \\ &= x + O(1) \quad \text{für } x \to \infty \\ &= x + o(x) \quad \text{für } x \to \infty, \end{aligned}$$

und erinnert sich auf der rechten Seite somit nur an jene Terme, die den Hauptteil der Bewegung $x \to \infty$ ausmacht. Es mag vielleicht überraschen, dass im obigen Beispiel alle drei Formeln zutreffen oder nützlich sein könnten. Die Behauptungen folgen alle direkt aus der Polynomdivision mit Rest, und je nach Zusammenhang will man vielleicht die etwas genauere Aussage mit Fehler $o(1)$ oder die gröbere Aussage mit Hilfe des Fehlers $o(x)$ verwenden.

6.5 Normen und Konvergenz auf Vektorräumen

Der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$, beziehungsweise die Norm auf $\mathbb{C}$, kann man dazu benutzen um Metriken zu definieren. In Analogie dazu definieren wir den Begriff einer **Norm** auf Vektorräumen. Auf endlich dimensionalen Vektorräumen definieren und besprechen wir die für die **Euklidische Geometrie** natürliche Norm.

6.5.1 Normen und Skalarprodukte

Eine **Norm** auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung von V nach $\mathbb{R}$, die jedem Vektor eine nichtnegative Zahl, informell seine **Länge** zuordnet. Auf einem Vektorraum $V \neq \{0\}$ gibt es viele verschiedene Normen, und wir können jede davon benutzen, um eine Metrik auf V zu konstruieren. Eine speziell interessante Klasse von Normen sind diejenigen, die man aus **Skalarprodukten** erhält. Wir legen für diesen Abschnitt eine Körper $\mathbb{K}$ fest, der entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

Definition 6.125. — Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$, die folgende drei Eigenschaften erfüllt.

1. (Definitheit) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
2. (Homogenität) Für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$) gilt $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
3. (Dreiecksungleichung) Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

Man nennt V gemeinsam mit der Norm $\|\cdot\|$ einen **normierten Vektorraum**.

Beispiel 6.126. — Sei $n \in \mathbb{N}$. Die **Maximumsnorm** oder **Unendlichnorm** $\|\cdot\|_\infty$, und die **1-Norm** $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{K}^n$ sind definiert durch

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\} \qquad \text{und} \qquad \|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j|$$

für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. Die Eigenschaften der Definitheit und Homogenität, ebenso wie die Dreiecksungleichung prüft man leicht nach. Ist V der Vektorraum der stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf $[0, 1]$ so definiert man analog die 1-Norm und die Unendlichnorm durch

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| dx \qquad \text{und} \qquad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

Definitheit der Einsnorm wurde in Übung 5.48 behandelt, die Dreiecksungleichung in 5.26. Schliesslich bemerken wir noch, dass wenn $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, dann ist für jede positive reelle Zahl λ die Abbildung $v \mapsto \lambda\|v\|$ auch eine Norm auf V.

Definition 6.127. — Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf V. Wir nennen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent**, falls Konstanten $A > 0$ und $B > 0$ existieren

mit

$$\|v\|_1 \leq A\|v\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_2 \leq B\|v\|_1$$

für alle $v \in V$.

Beispiel 6.128. — Sei $n \in \mathbb{N}$. Die in Beispiel 6.126 gegebene 1-Norm $\|\cdot\|_1$ und Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent, denn es gelten die Ungleichungen

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty$$

für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Wie werden in Satz 6.147 zeigen, dass überhaupt alle Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$ zueinander äquivalent sind. Bei unendlich dimensionalen Vektorräumen ist das nicht der Fall. So sind zum Beispiel die in 6.126 gegebenen Normen auf dem Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ nicht äquivalent.

Übung 6.129. — Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und es bezeichne $\mathcal{N}$ die Menge aller Normen auf V. Zeigen Sie, dass Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{N}$ definiert.

Lemma 6.130. — *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann ist*

$$d : V \times V \to \mathbb{R} \qquad d(v, w) = \|v - w\|$$

eine Metrik auf V.

Beweis. Wir prüfen Definitheit, Symmetrie und Dreiecksungleichung in der Definition einer Metrik 6.3. Für $v, w \in V$ gilt $d(v, w) = \|v - w\| \geq 0$, und

$$d(v, w) = 0 \iff \|v - w\| = 0 \iff v - w = 0 \iff v = w$$

nach Definitheit der Norm. Nach Homogenität der Norm für $\alpha = -1$ gilt für $v, w \in V$

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(v - w)\| = \|w - v\| = d(w, v)$$

und somit erhalten wir die Symmetrie von d. Zuletzt verwenden wir die Dreiecksungleichung der Norm und erhalten

$$d(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$$

für alle $u, v, w \in V$. Dies zeigt die Dreiecksungleichung für d, womit also d eine Metrik auf V ist. □

Definition 6.131. — Wir bezeichnen die in Lemma 6.130 gegebene Metrik die von der Norm $\|\cdot\|$ **induzierte Metrik** auf V.

Definition 6.132. — Sei $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ oder der Körper $\mathbb{C}$, und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$). Ein **inneres Produkt** oder **Skalarprodukt** V ist eine Abbildung

$$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

die folgende Eigenschaften erfüllt.

1. (Sesquilinearität) Für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, w \rangle &= \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \qquad \text{und} \\ \langle u, \alpha v + \beta w \rangle &= \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

2. (Symmetrie) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.
3. (Definitheit) Für $v \in V$ ist $\langle v, v \rangle$ reell und nichtnegativ, und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

6.133. — Die lateinische Vorsilbe *sesqui-* steht für *eineinhalb*: das innere Produkt ist linear im ersten Argument und *halblinear* im zweiten Argument. Bei Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^d$ hat die komplexe Konjugation keinen Effekt, und die Sesquilinearität wird zu **Bilinearität**, also die Linearität in beiden Argumenten bei festgehaltenem anderem Argument. Dass die von einem Skalarprodukt induzierte Norm tatsächlich eine Norm auf V ist überprüfen wir in Korollar 6.137. Ein wichtiges Beispiel für ein Skalarprodukt ist das **Euklidische innere Produkt** oder **standard Skalarprodukt** auf $\mathbb{K}^d$. Es ist gegeben durch

$$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad \langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{d} v_k \overline{w_k}$$

für $v = (v_1, \ldots, v_d)$ und $w = (w_1, \ldots, w_d)$. Den Nachweis der Sesquilinearität und der Symmetrie überlassen wir als Übung. Wir überprüfen Definitheit. Sei $v = (v_1, \ldots, v_d) \in V = \mathbb{C}^d$. Dann ist

$$\langle v, v \rangle = \sum_{k=1}^{d} v_k \overline{v_k} = \sum_{k=1}^{d} |v_k|^2 \geq 0$$

eine nichtnegative reelle Zahl. Wenn $v = 0$ ist, dann ist auch $\langle v, v \rangle = 0$. Wenn $\langle v, v \rangle = 0$ ist, dann muss jeder Summand $|v_k|^2$ null sein, und also gilt $v_k = 0$ für alle k, und damit $V = 0$.

Proposition 6.134 (Cauchy-Schwarz Ungleichung). — *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und sei $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dann gilt die Ungleichung*

$$| \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \|w\| \tag{6.19}$$

für alle $v, w \in V$. Des Weiteren gilt Gleichheit in (6.19) *genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.*

Beweis. Falls $v = 0$ oder $w = 0$ gilt, so steht auf beiden Seiten von (6.19) Null, und die Vektoren v, w sind linear abhängig. Wir nehmen also an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Dann gilt für

$\alpha = \langle v, w\rangle \|w\|^{-2}$

$$\begin{aligned}\|v-\alpha w\|^2 &= \langle v-\alpha w, v-\alpha w\rangle = \langle v, v-\alpha w\rangle - \alpha\langle w, v-\alpha w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle - \overline{\alpha}\langle v,w\rangle - \alpha\langle w,v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle w,w\rangle = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v,w\rangle - \alpha\overline{\langle v,w\rangle} + |\alpha|^2\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}.\end{aligned}$$

Die reelle Zahl $\|v-\alpha w\|^2$ ist nicht-negativ, und es folgt

$$\|v\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2} \geq 0.$$

Somit folgt $\|v\|^2\|w\|^2 \geq |\langle v,w\rangle|^2$, was die gewünschte Ungleichung (6.19) impliziert. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\|v-\alpha w\| = 0$ und somit $v = \alpha w$ ist. □

Übung 6.135 (Schreibstil). — Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in dem Sie folgt vorgehen: Es seien Vektoren v und w in $\mathbb{R}^n$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass $f(x) = \|v + xw\|^2$ als ein Polynom von Grad 2 in x mit reellen Koeffizienten aufgefasst werden kann und finden Sie dazu die Koeffizienten.
2. Das Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ nimmt nur nicht-negative Werte an, und hat damit höchstens eine reelle Nullstelle. Folgern Sie, dass die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ von f nicht-positiv ist.
3. Berechnen Sie die Diskriminante von f.

Übung 6.136 (Schreibstil). — Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in dem Sie folgt vorgehen: Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$|\langle v,w\rangle| \leq \tfrac{a^2}{2}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2a^2}\|w\|^2$$

erfüllen und schliessen Sie daraus auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Korollar 6.137. — *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $\langle -,-\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Die durch* (6.20) *definierte Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ist eine Norm.*

Beweis. Defnitheit und Homogenität folgen direkt aus der Definitheit und Sesquilinearität des Skalarprodukts. Es verbleibt die Dreiecksungleichung zu beweisen. Seien $v, w, \in V$. Wir benutzen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in der Abschätzung

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle &= \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle v,w\rangle) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,\end{aligned}$$

womit die Aussage nach Ziehen der Wurzel folgt. □

6.138. — Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ist $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, so nennen wir die in Korollar 6.137 behandelte Norm

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}, \qquad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \tag{6.20}$$

die von $\langle -, - \rangle$ **induzierte Norm**. Insbesondere aus dem euklidschen inneren Produkt auf $V = \mathbb{K}^n$ lässt sich nun eine Norm auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren. Die **Euklidsche Norm** auf $V = \mathbb{K}^n$ ist gegeben durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}$$

für alle $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{K}^n$. Sie wird auch die **2-Norm** genannt und als $\|\cdot\|_2$ geschrieben. Die euklidische Norm nimmt eine Sonderstellung unter allen Normen auf $\mathbb{K}^n$ ein. Auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ misst sie die „physikalische“ Länge von Vektoren. Die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist äquivalent zur 1-Norm und zur Maximumsnorm, denn es gilt

$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2$$

für alle $v \in \mathbb{K}^n$.

6.139. — Wir können den n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem $2n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren, via dem Isomorphismus reeller Vektorräume $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, \ldots, x_{2n-1} + ix_{2n}).$$

Der Isomorphismus φ hat die Eigenschaft, bezüglich den euklidischen Normen $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ und $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{C}^n$ eine **Isometrie** zu sein: Es gilt

$$\|v\|_2 = \|\varphi(v)\|_2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

6.5.2 Folgenkonvergenz in normierten Vektorräumen

Wir schreiben weiterhin $\mathbb{K}$ für einen Körper der entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf V. Wir untersuchen Konvergenz von Folgen in V, mit besonderem Augenmerk auf den Fall in dem $\| \cdot \|$ die Euklidische Norm auf $V = \mathbb{K}^n$ ist.

6.140. — Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum und sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf V. Die Norm $\| \cdot \|$ induziert eine Metrik auf V bezüglich welcher wir von Konvergenz von Folgen

sprechen können. Ein **Grenzwert** einer Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ in V ist demnach ein $v \in V$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$n \geq N \implies \|v_n - v\| < \varepsilon$$

gilt. Um die Abhängigkeit des Grenzwertbegriff der Norm hervorzuheben sagen wir auch, dass die Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ **bezüglich der Norm** $\|\cdot\|$ gegen v konvergiert.

Lemma 6.141. — *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ konvergierende Folge in V mit Grenzwert $w \in V$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \|w\|.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen w strebt, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, das für alle $n \neq N$ die Abschätzung $\|v_n - w\| < \varepsilon$ gilt. Die Folge $(\|v_n - w\|)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert also gegen 0. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|v_n - w\| - \|w\| \leq \|v_n\| \leq \|v_n - w\| + \|w\|$$

und das Lemma folgt damit aus dem Sandwich-Lemma für Folgen reeller Zahlen. □

Lemma 6.142. — *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf V. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in V. Falls die Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ konvergiert, dann konvergiert sie auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$. Die Grenzwerte sind in diesem Fall gleich.*

Beweis. Da die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind, existieren positive Zahlen A, B mit

$$\|v\|_1 \leq A\|v\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_2 \leq B\|v\|_1$$

für alle $v \in V$. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folgen in V die bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen $v \in V$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|v_n - v\|_1 < \varepsilon/B$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt

$$\|v_n - v\|_2 \leq B\|v_n - v\|_1 < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ gegen v. □

6.143. — Lemma 6.142, Beispiel 6.128 und die Diskussion in 6.138 zeigen, dass in $\mathbb{K}^n$ Konvergenzbegriffe bezüglich der 1-Norm, der Maximumsnorm und der euklidischen Norm äquivalent sind. Wie schon erwähnt, sind in der Tat alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent, was wir mit nachfolgenden Satz 6.147 beweisen werden. Insbesondere hängt also die Antwort auf Frage, ob eine gegebene Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{K}^n$ konvergiert, beschränkt ist, Häufungspunkte besitzt, oder eine Cauchy Folge ist, nicht von der Auswahl einer Norm ab. Sobald wir den Satz 6.147 bewisesn haben können wir folgern, dass nachstehendes Lemma 6.144, sowie Satz

6.145 und Korollar 6.146 bezüglich einer beliebigen Norm auf $\mathbb{K}^n$ gelten. Alle diese Aussagen sind im Allgemeinen falsch für unendlich dimensionale normierte Vektorräume.

LEMMA 6.144. — *Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Folge in $\mathbb{K}^d$ konvergiert genau dann bezüglich der euklidischen Norm, wenn sie koordinatenweise konvergiert.*

Beweis. Da wir bereits wissen, dass die euklidische Norm äquivalent zur Maximumsnorm ist, genügt es, das Lemma für die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ anstelle der euklidischen Norm zu zeigen. Sei $(v_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{K}^d$. Wir schreiben

$$\pi_j : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K} \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, d$$

für die kanonischen Projektionen, und zeigen, dass $(v_n)_{n=0}^\infty$ genau dann gegen $v \in \mathbb{K}^d$ konvergiert, wenn für alle $j = 1, \ldots, d$ die Folge der Komponenten $(\pi_j(v_n))_{n=0}^\infty$ gegen $\pi_j(v)$ konvergiert. Angenommen $(v_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gegen $v \in \mathbb{K}^d$ und sei $\varepsilon > 0$. Es gibt somit ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|v_n - v\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt für $j = 1, \ldots, d$

$$|\pi_j(v_n) - \pi_j(v)| = |\pi_j(v_n - v)| \leq \|v_n - v\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, womit gezeigt ist, dass $(\pi_j(v_n))_{n=0}^\infty$ gegen $\pi_j(v)$ konvergiert. Wir nehmen nun umgekehrt an, dass für jedes $j = 1, \ldots, d$ die Folge $(\pi_j(v_n))_{n=0}^\infty$ gegen $\pi_j(v)$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu $j \in \{1, \ldots, d\}$ ein $N_j \in \mathbb{N}$ mit $|\pi_j(v_n) - \pi_j(v)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_j$. Sei $N = \max\{N_1, \ldots, N_d\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\|v_n - v\|_\infty = \max\{|\pi_j(v_n) - \pi_j(v)| \mid 1 \leq j \leq d\} < \varepsilon.$$

Daraus folgt Konvergenz von $(v_n)_{n=0}^\infty$ gegen v, was das Lemma beweist. □

SATZ 6.145 (Heine-Borel). — *Sei $d \in \mathbb{N}$. Jede bezüglich der euklidischen Norm beschränkte Folge in $\mathbb{K}^d$ besitzt eine konvergierende Teilfolge, und einen Häufungspunkt.*

Beweis. Falls $\mathbb{K}$ der Körper der Komplexen Zahlen ist, so betrachten wir mittels der in 6.139 gegebenen Isometrie den Vektorraum wir $\mathbb{C}^d$ als $\mathbb{R}^{2d}$. Das ändert weder etwas an den Hypothesen, noch etwas an der Schlussfolgerung. Wir können somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ ist. Wir schreiben

$$\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, d$$

für die kanonischen Projektionen. Sei $(v_n)_{n=0}^\infty$ eine bezüglich der euklidischen Norm beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$, das heisst, es existiert ein $M > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\|v_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Folge reeller Zahlen

$$(\pi_1(v_n))_{n=0}^\infty$$

beschränkt ist, nämlich durch $|\pi_1(v_n)| \leq M$, existiert nach Korollar 6.56 eine Teilfolge $(v_{f(n)})_{n=0}^{\infty}$ derart, dass $(\pi_1(v_{f(n)}))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. Es genügt zu zeigen, dass die Folge $(\pi_1(v_{f(n)}))_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir können also die ursprünglich gegebene Folge durch diese Unterfolge ersetzen. Damit haben wir erreicht, dass $(\pi_1(v_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. In dem wir wieder eine geeignete Teilfolge aus $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ betrachten, können wir einrichten, dass auch $(\pi_2(v_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. Schliesslich erhalten wir so, formell mit einem Induktionsargument, eine konvergente Unterfolge von $(v_n)_{n=0}^{\infty}$. □

Korollar 6.146. — *Sei $n \in \mathbb{N}$. Bezüglich der euklidischen Norm ist jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergent.*

Beweis. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^d$. Dann ist $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt, und besitzt also nach dem Satz von Heine-Borel eine konvergente Teilfolge. Eine Cauchy-Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Konvergente Teilfolge besitzt. □

Satz 6.147. — *Sei $n \in \mathbb{N}$. Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$, und es bezeichne $\|\cdot\|_1$ die in 6.128 gegebene 1-Norm auf $\mathbb{K}^n$. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind. Zusammen mit Übung 6.129 beweist das den Satz.

Es bezeichne $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$, und $A = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Für jeden Vektor $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$ gilt damit

$$\|v\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \|e_k\| \leq A \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| = A\|v\|_1$$

was bereits eine der beiden geforderten Abschätzungen zeigt. Für die zweite Abschätzung betrachten wir die Menge

$$S = \{v \in V \mid \|v\|_1 = 1\}$$

und die reelle Zahl $B = \inf\{\|v\| \mid v \in S\}$. Es existiert eine Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ in S, so dass die Folge $(\|v_n\|)_{n=0}^{\infty}$ gegen B konvergiert. Da $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ für die 1-Norm beschränkt ist, enthält sie nach dem Satz von Heine-Borel eine konvergente Unterfolge. Indem dem wir $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ durch so eine Unterfolge ersetzen können wir erreichen, dass $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ bezüglich der 1-Norm gegen $w \in V$ konvergiert. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so, dass

$$n \geq N \implies \|w - v_n\|_1 \leq A^{-1}\varepsilon \implies \|w - v_n\| \leq \varepsilon$$

gilt. Wir folgern daraus, dass die Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ gegen w konvergiert. Wir folgern daraus

$$\|w\|_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad \|w\| = B$$

und deshalb gilt insbesondere $w \neq 0$ und $B > 0$. Für jeden Vektor $v \neq 0$ in V ist $\frac{1}{\|v\|_1} v$ ein Element von S, und es gilt

$$\frac{\|v\|}{\|v\|_1} = \left\| \frac{1}{\|v\|_1} v \right\| \geq B$$

also $\|v\|_1 \leq B^{-1}\|v\|$ für alle $v \neq 0$ in V. Da letztere Abschätzung auch für $v = 0$ gilt, ist damit gezeigt, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind. □

6.5.3 Stetigkeit und Integrierbarkeit vektorwertiger Funktionen

Definition 6.148. — Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$, $D \subset V$ eine Teilmenge und sei $f : D \to W$ eine Abbildung. Wir nennen f **stetig bei einem Punkt** $x_0 \in D$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|x - x_0\|_V < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_W < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ existiert. Die Funktion f ist **stetig**, falls sie bei jedem Punkt in D stetig ist.

6.149. — Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Wir nehmen an W sei endlich dimensional, und es sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von W. Sei D eine Teilmenge von V und $f : D \to \mathbb{K}^d$ eine Funktion. Für jedes $x \in D$ können wir $f(x) \in W$ in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) b_k$$

mit $f_k(x) \in \mathbb{R}$ schreiben. Wir erhalten damit Funktionen $f_k : D \to \mathbb{K}$ die wir **Komponenten** von f bezüglich der Basis B nennen. Stetigkeit von f lässt sich, genauso wie Konvergenz von Folgen, über ihre Komponenten charakterisieren.

Lemma 6.150. — *Sei $f : D \to W$ wie in 6.149. Die Funktion f ist stetig wenn und nur wenn alle ihre Komponenten bezüglich einer beliebigen Basis von W stetig sind.*

Beweis. Übung. □

Übung 6.151. — Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf V. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ genau dann äquivalent sind, wenn die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$ stetig ist, und zwar aufgefasst als Abbildung zwischen normierten Vektorräumen

$$(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2) \qquad \text{und} \qquad (V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1).$$

6.152. — Sei $(W, \|\cdot\|)$ ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Seien $a < b$ reelle Zahlen, und $f : [a, b] \to V$ eine Funktion. Wir sagen f sei **Riemann integrierbar**

falls bezüglich einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von W alle Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ von f Riemann integrierbar sind. Wir nennen in diesem Fall den Vektor

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \Big(\int_a^b f_k(x)dx \Big) b_k \tag{6.21}$$

das Integral von f.

Lemma 6.153. — *Sei $f : [a, b] \to V$ eine Funktion wie in 6.152. Sowohl der Begriff der Integrierbarkeit, als auch das Integral* (6.21) *sind unabhängig von der Wahl der Basis B.*

Beweis. Seien $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ Basen von V. Die Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ uns $g_1, \ldots, g_n$ von f bezüglich diesen Basen sind durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) b_k \qquad \text{und} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) b'_k$$

definiert. Wir nehmen an die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ seien integrierbar, und müssen zeigen, dass auch $g_1, \ldots, g_n$ integrierbar sind. Da B und B' Basen von V sind, gibt es eindeutige $x_{kl} \in \mathbb{R}$ mit

$$b_k = \sum_{l=1}^n x_{kl} b'_l$$

für alle k. Daraus folgt für alle $x \in [a, b]$ die Gleichheit

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) b_k = \sum_{k=1}^n f_k(x) \sum_{l=1}^n x_{kl} b'_l = \sum_{l=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n x_{kl} f_k(x) \Big) b'_l$$

und mit Koeffizientenvergleich somit

$$g_l(x) = \sum_{k=1}^n x_{kl} f_k(x) \tag{6.22}$$

für alle $x \in [a, b]$. Die Funktion g_l ist also eine Linearkombination der Funktionen $f_1, \ldots, f_n$, und somit integrierbar nach Satz 5.21. Die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^n \Big(\int_a^b f_k(x)dx \Big) b_k = \sum_{k=1}^n \Big(\int_a^b g_k(x)dx \Big) b'_k$$

folgt unmittelbar aus 6.22 und Linearität des Integrals. □

Übung 6.154. — Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für vektorwertige Integrale: Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ und eine Norm $\| \cdot \|$ aud $\mathbb{R}^d$ ist $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, daher integrierbar, und es gilt

$$\Big\| \int_a^b f(x)dx \Big\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx. \tag{6.23}$$

6.155. — Die Diskussion 6.152 enthält auch den wichtigen Fall von komplexwertigen Funktionen

$$f : [a, b] \to \mathbb{C}$$

wenn man $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffasst. Eine Basis von $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist $\{1, i\}$. Eine komplexwertige Funktion f ist demnach genau dann Riemann-integrierbar sind, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Das Riemann-Integral ist in diesem Fall gegeben durch

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))dx.$$

Kapitel 7

Reihen, Funktionenfolgen und Potenzreihen

Wir werden in diesem Kapitel sogenannte Reihen also „unendliche Summen“ betrachten, was uns zu den Definitionen bekannter Funktionen führen wird, insbesondere zu den Definitionen trigonometrischer Funktionen.

7.1 Reihen komplexer Zahlen

Definition 7.1. — Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, und sei A eine komplexe Zahl. Die Notationen

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

sind gleichbedeutend. Im Zusammenhang, in dem wir uns für den Grenzwert der **Partialsummen** der Folge $(a_k)_k$ interessieren, sprechen wir üblicherweise nicht von einer Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, sondern von der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

und Konvergenz dieser Reihe. Wir nennen a_n das **n-te Glied** oder den **n-ten Summanden** der Reihe. Wir nennen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergent**, falls der Grenzwert existiert, wobei wir diesen dann als **Wert der Reihe** bezeichnen. Ansonsten nennen wir die Reihe **divergent**.

Proposition 7.2. — *Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n)_n$ eine **Nullfolge**, das heisst, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Beweis. Nach Annahme haben die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ für $n \in \mathbb{N}$ einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0.$$

□

Beispiel 7.3. — Die **geometrische Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ zu $q \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

In der Tat impliziert Konvergenz der Reihe mittels Proposition 7.2, dass $|q| < 1$. Umgekehrt gilt für $|q| < 1$ auf Grund der geometrischen Summenformel in Proposition 4.7 undder Konvergenz der geometrischen Folge in Beispiel 6.78, dass

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

für $n \to \infty$.

Beispiel 7.4 (Harmonische Reihe). — Die Umkehrung von Proposition 7.2 gilt nicht. Beispielsweise ist die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent. Wir beweisen die Divergenz mit einer konkreten Abschätzung. Sei $n = 2^\ell$, dann erfüllt die Partialsumme der harmonischen Reihe für n die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^\ell} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^\ell} + \cdots + \frac{1}{2^\ell}}_{=\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\ell}{2}.\end{aligned}$$

Da $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig war, erkennen wir, dass die Partialsummen nicht beschränkt sind, und daher ist die harmonische Reihe divergent.

Lemma 7.5. — *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Insbesondere bilden konvergente Reihen einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und der Wert der Reihe stellt eine lineare Abbildung auf diesem Vektorraum nach $\mathbb{C}$ dar.

Beweis. Übung. □

Lemma 7.6. — *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Für $n \geq N$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k.$$

Insbesondere konvergieren die Partialsummen von $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren und das Lemma folgt. □

Lemma 7.7. — *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Definiere $A_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}$ und $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ für $k \geq 2$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Die K-te Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ ist

$$\sum_{k=1}^{K} A_k = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_{K-1}+1} + \ldots + a_{n_K}) = \sum_{n=1}^{n_K} a_n.$$

Somit bilden die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ eine Teilfolge der konvergenten Folge der Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Beispiel 7.8. — Die Umkehrung von Lemma 7.7 gilt im Allgemeinen nicht. Beispielsweise ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ nach Proposition 7.2 divergent, aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^{2k-1} + (-1)^{2k})$, die aus zusammengefügten Gliedern von $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ besteht, ist konvergent, da jedes Glied Null ist.

7.1.1 Reihen mit nicht-negativen Gliedern

Proposition 7.9. — *Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen Gliedern $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine monoton wachsende Folge. Falls diese Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ansonsten gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Beweis. Aus $a_{n+1} \geq 0$ folgt $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls die Partialsummen $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zusätzlich noch beschränkt sind, dann sind diese konvergent nach Satz 6.49. □

Korollar 7.10. — *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *zwei Reihen mit der Eigenschaft* $0 \leq a_k \leq b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *und insbesondere gelten die Implikationen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}\,.$$

Diese beiden Implikationen treffen auch dann zu, wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ *nur für alle hinreichend grossen* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Beweis. Aus $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt nach Monotonie der Folge der Partialsummen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k \mid n \in \mathbb{N}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Die letzte Aussage der Proposition ist nun eine Konsequenz von Lemma 7.6. □

7.11. — Man nennt unter den Annahmen des Korollars die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine Majorante der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, und letztere auch eine Minorante der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Daher spricht man auch von dem **Majoranten-** und dem **Minorantenkriterium**.

Übung 7.12. — Zeigen Sie, dass die Annahme in Korollar 7.10, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nicht-negative Glieder haben, notwendig ist.

Beispiel 7.13. — Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent. Tatsächlich gilt $a_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = b_k$ für $k \geq 2$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent, da deren n-te Partialsumme unter Auflösen einer Teleskopsumme (siehe Abschnitt 4.1.1) durch

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

gegeben ist.

Beispiel 7.14. — Wir wollen zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2n-10}{n^3 - 10n + 100}$$

konvergiert. Es gilt $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 2$, und daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n^{-1} \leq a_n \leq 3n^{-2}$ für alle $n \geq N$. Aus Korollar 7.10 und Beispiel 7.13 ergibt sich somit die Konvergenz der Reihe.

Proposition 7.15 (Verdichtungskriterium). — *Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

Beweis. Auf Grund der Monotonie der Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gilt die Ungleichung

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Partialsummen ergeben sich daher die Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{\ell=2}^{2^{n+1}} a_\ell \qquad \text{und} \qquad \sum_{\ell=2}^{2^{n+1}} a_\ell \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

und wir erhalten die Proposition durch den Grenzübergang $n \to \infty$ und Korollar 7.10. □

Beispiel 7.16. — Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ für $p \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $p > 1$. Für $p \leq 0$ ist $\frac{1}{n^p} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Reihe nach Proposition 7.2 somit divergent. Für $p \leq 1$ gilt $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Reihe divergiert nach Korollar 7.10, da die harmonische Reihe divergiert. Wir wenden nun Proposition 7.15 an. Für $p \geq 0$ ist $\left(\frac{1}{n^p}\right)_n$ eine monoton abnehmende Folge und wir erhalten aus Proposition 7.15, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann konvergiert, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$$

konvergiert. Diese geometrische Reihe konvergiert aber nach Beispiel 7.3 genau dann, wenn $p > 1$ ist.

Übung 7.17. —

1. Zeigen Sie für $p \in \mathbb{R}$, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^p}$ genau dann konvergiert, wenn $p > 1$ ist.
2. Ist die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \log(\log(n))}$ konvergent oder divergent?

Übung 7.18. — Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$. In Übung 4.6 haben wir gezeigt, dass jede ganze Zahl eine Ziffernentwicklung zur Basis q besitzt. In dieser Übung wollen wir die analoge Aussage für reelle Zahlen formulieren und beweisen. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen Übung 4.6 wollen wir sogar annehmen, dass $x \in [0, 1)$. Zeigen Sie, dass eine Folge von Ziffern $(\alpha_k)_k$ mit $\alpha_k \in \{1, \ldots, q-1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^k$ konvergiert und x darstellt im Sinne von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^{-k} = x.$$

Sind die Ziffern $(\alpha_k)_k$ zu $x \in \mathbb{R}$ wie oben eindeutig bestimmt?

7.1.2 Bedingte Konvergenz

7.19. — Wir sagen, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit komplexen Summanden **absolut konvergiert**, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **bedingt konvergent**, falls sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Beispiel 7.20. — Wir wollen zuerst zeigen, dass die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

bedingt konvergiert. Nach Beispiel 7.4 divergiert die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^{n+1}|}{n}$$

(nach unendlich). Wir müssen also nur noch Konvergenz der alternierenden Reihe beweisen. Wir betrachten zuerst zu $n \in \mathbb{N}$ die $2n$-te Partialsumme

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Die Folge $(s_{2n})_n$ ist somit monoton wachsend und beschränkt (wegen Beispiel 7.13) und konvergiert damit. Wegen $s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n}$ konvergiert aber ebenso die Folge $(s_{2n-1})_n$ und gegen den gleichen Limes.[1] Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (wieso?). Des Weiteren folgt $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{2}$, da nach obigem Argument die Partialsumme s_{2n} als Summe von positiven Summanden geschrieben werden kann, wovon der erste Term gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Satz 7.21 (Riemann'scher Umordnungssatz). — *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern, und sei $A \in \mathbb{R}$. Es existiert eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} \tag{7.1}$$

gilt.

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe. Dann gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ nach Annahme. Wir teilen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die zwei Mengen

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}, \qquad N = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0\}$$

[1] Wir werden den Wert dieser Reihe erst später berechnen können.

auf. Wir zählen die Elemente in P und N in geordneter Reihenfolge auf, also $P = \{p_0, p_1, \ldots\}$ und $N = \{n_0, n_1, \ldots\}$ mit $p_0 < p_1 < p_2 < \cdots$ sowie $n_0 < n_1 < \cdots$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{p_k} = +\infty \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} -a_{n_k} = +\infty \tag{7.2}$$

denn falls eine der beiden Reihen konvergiert, dann würde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergieren oder aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergieren. Wäre zum Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_k} = \infty$, aber $\sum_{k=1}^{\infty}(-a_{n_k}) < \infty$, dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Zu dem gegebenen $A \in \mathbb{R}$ konstruieren wir die bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv auf folgende Weise: Falls $A < 0$, setze $\varphi(0) = n_1$, und falls $A \geq 0$, setze $\varphi(0) = p_1$. Dann, angenommen wir haben bereits $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ definiert, so setzen wir $s_n = a_{\varphi(0)} + a_{\varphi(1)} + \cdots + a_{\varphi(n)}$ und

$$\varphi(n+1) = \begin{cases} \min(P \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}) & \text{falls } s_n < A \\ \min(N \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}) & \text{falls } s_n \geq A \end{cases}$$

Die so definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv durch Konstruktion, und surjektiv aufgrund der Divergenz der Reihen (7.2). Da $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen 0 strebt, konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ nach A, was (7.1) zeigt. □

Übung 7.22. — Ergänzen Sie die im Beweis von Satz 7.21 unterlassenen Details. Zeigen Sie ebenfalls, dass man für A auch eines der Symbole $-\infty$ oder $+\infty$ nehmen kann.

7.1.3 Konvergenzkriterien von Leibnitz und Cauchy

Für eine Folge $(a_n)_n$ nichtnegativer Zahlen bezeichnen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ als eine **alternierende** Reihe.

Proposition 7.23 (Leibniz-Kriterium). — *Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \tag{7.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}a_k$. Es gilt

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}, \qquad s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_{2n})_{n=0}^{\infty}$ ist also monoton fallend. Sie ist von unten durch $s_1 = a_0 - a_1$ beschränkt, und ist also konvergent. Genauso ist die Folge $(s_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend und

konvergent. Setzen wir

$$A = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \qquad \text{und} \qquad B = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

so gilt $A \geq B$ einerseits, und

$$A \leq s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \leq B + a_{2n}$$

andererseits, woraus $A = B$ folgt, da $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ gegen 0 konvergiert. Die Konvergenz der alternierenden Reihe sowie die Abschätzungen 7.3 ergeben sich daraus und aus dem Sandwich-Lemma 6.44 für Folgen reeller Zahlen. □

Satz 7.24 (Cauchy-Kriterium). — *Die Reihe komplexer Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \geq m \geq N$*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Hypothese im Satz ist gleichbedeutend damit, dass die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchy-Folge ist. Nach Satz 6.146 konvergieren Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$. □

Beispiel 7.25. — Um die Divergenz der harmonischen Reihe zu sehen, können wir auch das Cauchy-Kriterium verwenden. Wir setzen dazu $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{2N} \geq \frac{N+1}{2N} > \frac{1}{2},$$

was wegen dem Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 7.24) die Divergenz impliziert.

7.2 Absolute Konvergenz

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit absolut konvergenten Reihen auseinandersetzen und einige Konvergenzkriterien beweisen.

7.2.1 Kriterien für absolute Konvergenz

PROPOSITION 7.26. — *Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium 7.24 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq m \geq N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

gilt. Daraus folgt

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

mit der Dreiecksungleichung. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies nach dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Der zweite Teil folgt nun aus der Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und dem Grenzübergang für $n \to \infty$. □

KOROLLAR 7.27 (Majorantenkriterium von Weierstrass). — *Sei $(a_n)_n$ eine komplexe und $(b_n)_n$ eine reelle Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für alle hinreichend grossen $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, und daher auch konvergent.*

Beweis. Da endlich viele Startglieder vernachlässigt werden können, dürfen wir annehmen, dass die Ungleichung $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach dem Vergleichssatz 7.10 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dann absolut konvergent und Konvergenz folgt aus Proposition 7.26. □

KOROLLAR 7.28 (Cauchy-Wurzelkriterium). — *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut, und} \qquad \alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Beweis. Angenommen $\alpha < 1$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} < q = \frac{1+\alpha}{2} < 1$$

und somit $|a_k| < q^k$ für alle $k \geq n$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert somit absolut nach dem Majorantenkriterium 7.27 und Konvergenz der geometrischen Reihe in Beispiel 7.3. Falls $\alpha > 1$ gilt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$ für alle k. Daraus folgt aber $|a_{n_k}| > 1$, und insbesondere ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. □

Beispiel 7.29. — Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen und $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ wie im Wurzelkriterium. Falls $\alpha = 1$ gilt, dann kann anhand des Wurzelkriteriums keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gefällt werden. Nach Beispiel 6.47 gilt $\sqrt[n]{1/n} =\to 1$ für $n \to \infty$, und nach Beispiel 7.4 divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Andererseits gilt auch $\sqrt[n]{1/n^2} \to 1$ für $n \to \infty$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 7.13.

Korollar 7.30 (D'Alemberts Quotientenkriterium). — *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existiert. Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut, und} \qquad \alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Übung 7.31. — Beweisen Sie Korollar 7.30. Erklären Sie auch, wieso man nicht den Limes superior anstelle des Limes verwenden kann.

7.2.2 Umordnen von Reihen

Satz 7.32 (Umordngssatz für absolut konvergente Reihen). — *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}. \tag{7.4}$$

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium 7.24 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ für alle natürliche Zahlen $n \geq m \geq N$ gilt. Daher gilt auch

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$$

für alle $m \geq N$ nach der Dreiecksungleichung in Proposition 7.26. Sei M das Maximum der endlichen Menge $\{\varphi^{-1}(k) \mid k \leq N\}$. Für alle $n \geq M$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=0}^{n} a_{\varphi(l)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| &= \left| \sum_{l=0}^{n} a_{\varphi(l)} - \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{\ell \leq n, \\ \varphi(\ell) > N}} a_{\varphi(l)} \right| + \underbrace{\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right|}_{\leq \varepsilon} \leq \sum_{\substack{l \leq n, \\ \varphi(\ell) > N}} |a_{\varphi(l)}| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass φ eine Bijektion ist. Insbesondere treten damit, und wegen $n \geq M$, alle $k \in \{0, \ldots, N\}$ genau einmal als $\varphi(l)$ für $l \in \{0, \ldots, n\}$ auf, und die Differenz $\sum_{l=0}^{n} a_{\varphi(l)} - \sum_{k=0}^{N} a_k$ enthält nach Kürzen dieser Terme nur mehr eine Summe über gewisse a_k mit $k \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies die Gleichung (7.4).

Wenden wir dasselbe Argument wie oben auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\varphi(n)}|$ an, ergibt sich auch die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$. □

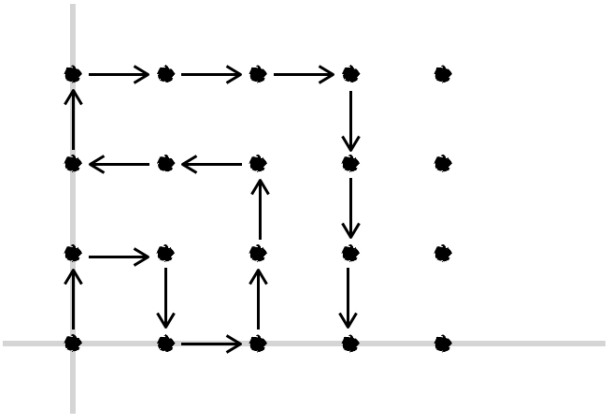
7.2.3 Produkte

Satz 7.33 (Produktsatz). — *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, und sei eine Bijektion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $\alpha(n) = (\varphi(n), \psi(n))$ gegeben. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right). \tag{7.5}$$

und die Reihe linkerhand konvergiert absolut.

Beweis. Wir wählen zuerst eine Bijektion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, geschrieben als $\alpha(n) = (\varphi(n), \psi(n))$, so dass $\{\alpha(k) \mid 0 \leq k < n^2\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zum Beispiel könnte $(\alpha(n))_{n=0}^{\infty}$ die Menge $\mathbb{N}^2$ wie im folgenden Bild durchlaufen.



Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} |a_{\varphi(k)}||b_{\psi(k)}| = \left(\sum_{l=0}^{n-1} |a_l|\right)\left(\sum_{m=0}^{n-1} |b_m|\right) \leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} |a_l|\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für eine Reihe mit nichtnegativen Termen die Folge der Partialsummen monoton wachsend ist, folgt daraus dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}||b_{\psi(k)}|$ konvergiert und damit, dass die Reihe links in (7.5) absolut konvergent ist. Die Gleichung (7.5) selbst erhalten wir aus

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \left(\sum_{l=0}^{n-1} a_l\right)\left(\sum_{m=0}^{n-1} b_m\right)$$

und Grenzwertübergangs $n \to \infty$.

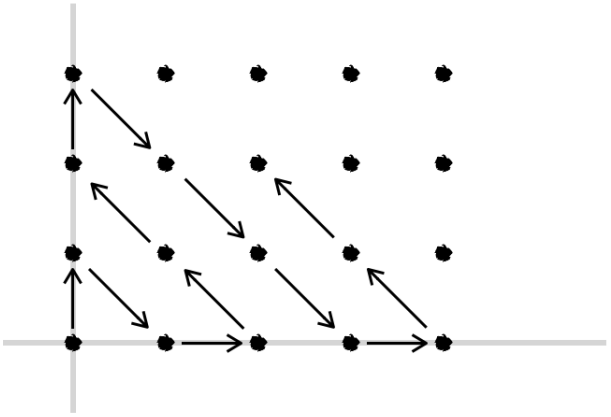
Betrachten wir eine beliebige Bijektion $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, so können wir diese als $\beta = \alpha \circ \gamma$ für eine Bijektion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ schreiben. Die Gleichung (7.5) folgt dann aus obigem und dem Umordnungssatz 7.32. □

Korollar 7.34 (Cauchy-Produkt). — *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Gliedern sind, dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right),$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right)$ absolut konvergent ist.

Beweis. Dies folgt, indem wir die Abzählung φ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aus dem Bild unten auf den Produktsatz anwenden und dann entsprechend Lemma 7.7 Glieder zusammenfassen.



Die absolute Konvergenz folgt ebenso aus Satz 7.33 und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_{n-k}b_k| < \infty.$$

□

Beispiel 7.35. — Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ absolut. Wenden wir das Cauchy-Produkt auf diese Reihe und sich selbst an, so erhalten wir

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^{n-k}q^k = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Auf diese Weise erhalten wir auch eine Summenformel für

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = q\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = q\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{q}{(1-q)^2},$$

wobei wir die Indexverschiebung $k = n-1$ durchgeführt haben.

Übung 7.36. — Formal lässt sich auch für bedingt konvergente Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right)$ bilden. Es muss jedoch nicht mehr konvergent sein: Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkts der bedingt konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

mit sich selbst divergiert.

7.3 Konvergenz von Funktionenfolgen

7.3.1 Punktweise Konvergenz

Mit dem allgemeinen Begriff der Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen, und insbesondere in normierten Vektorräumen, können wir über Konvergenz von Folgen von Funktonen sprechen, in dem wir einen geeigneten normierten Vektorraum festlegen, dessen Elemente Funktionen sind. In diesem Abschnitt führen wir zwei Begriffe von Konvergenz ein, die wir nicht in diesem Rahmen erklären können.

Definition 7.37. — Sei D eine Menge, sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert **punktweise** gegen f, falls für jedes $x \in D$ die Folge komplexer Zahlen $(f_n(x))_{n=0}^{\infty}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir bezeichnen die Funktion f in dem Fall als den **punktweisen Grenzwert** der Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

Übung 7.38. — Zeigen Sie, dass der punktweise Grenzwert einer Folge von Funktionen eindeutig bestimmt ist, falls er existiert.

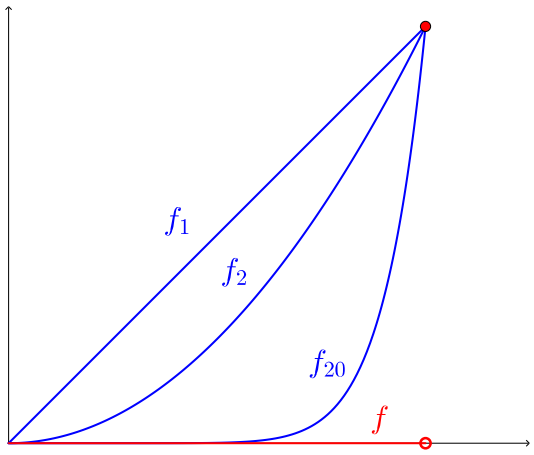
7.39. — Wir haben in Abschnitt 6.3 bereits ein Beispiel einer punktweise konvergenten Funktionenfolge gesehen, da wir die reelle Exponentialabbildung exp durch

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

für $x \in \mathbb{R}$ definiert haben. In den nachfolgenden Beispielen zeigen wir, dass im allgemeinen weder die Eigenschaft der Stetigkeit noch das Riemann-Integral unter punktweiser Konvergenz erhalten bleiben.

Beispiel 7.40. — Sei $D = [0, 1]$ und sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$. Dann konvergieren die Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ punktweise gegen die nicht stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{1\}}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$



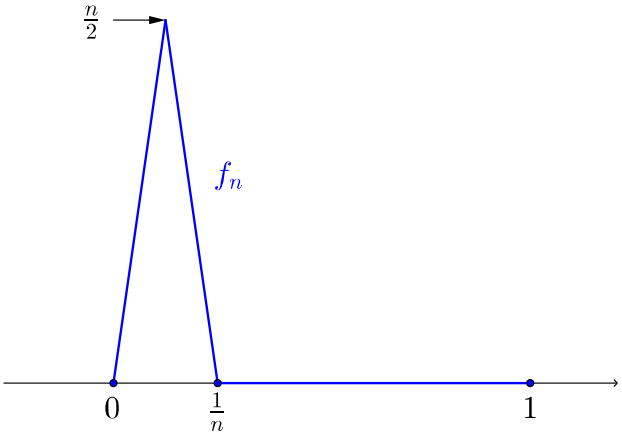
Beispiel 7.41. — Sei $D = [0,1]$ und sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ n^2(\frac{1}{n} - x) & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{für } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f_n stetig und insbesondere integrierbar. Die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die konstante Funktion $f : x \mapsto 0$. Jedoch gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{4} \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Also ist der Grenzwert der Integrale nicht gleich dem Integral der Grenzwertfunktion, obwohl alle Funktionen f_n sowie auch f stetig sind.



Beispiel 7.42. — Sei $D = [0,1]$ und für $n \geq 0$ schreibe $A_n = \{x \in D \mid n! \cdot x \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ integrierbar mit $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$. Die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, die nach Beispiel 5.19 nicht integrierbar ist.

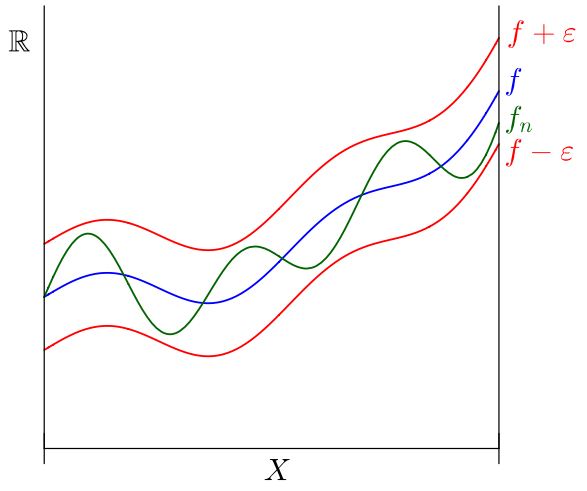
7.3.2 Gleichmässige Konvergenz

Definition 7.43. — Sei D eine Menge, sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert **gleichmässig** gegen f, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt.

7.44. — Für reellwertige Funktionen f_n, f, $\varepsilon > 0$ und x im Definitionsbereich ist die Abschätzung $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ zu $f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$ äquivalent. Dadurch lässt sich gleichmässige Konvergenz auch durch den Graphen einer Funktionenfolge und deren Limesfunktion beschreiben, wie folgende Figur zeigt: Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen f, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ der Graph von f_n für alle hinreichend grossen n im „ε-Schlauch“ um f liegt.



Übung 7.45. — Sei D eine Menge, V der Vektorraum aller beschränkten, komplexwertigen Funktonen auf D, und sei $\|\cdot\|_\infty$ die durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

gegebene Norm auf V. Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann gleichmässig gegen f konvergiert, wenn $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen f konvergiert.

Übung 7.46. — Sei D eine Menge und sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass wenn $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ auch punktweise gegen f.

Satz 7.47. — *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ die gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ gilt. Da f_n bei x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

für alle $x \in D$ gilt. Für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt daraus

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f bei x_0 stetig. Da $x_0 \in D$ beliebig war, folgt der Satz. □

Satz 7.48. — *Sei $[a, b]$ ein Intervall und sei $(f_n : [a, b] \to \mathbb{C})_{n=0}^{\infty}$ eine Folge integrierbarer Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx \,. \tag{7.6}$$

Beweis. Wir können für den Beweis annehmen dass alle Funktionen f_n und f reellwertig sind. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N mit $f - \varepsilon \leq f_n \leq f + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da f_n nach Annahme Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen u, o auf $[a, b]$ mit $u \leq f_n \leq o$ und $\int_a^b (o - u)dx < \varepsilon$. Daraus folgt, dass für die Treppenfunktionen $u' = u - \varepsilon$ und $o' = o + \varepsilon$

$$u' \leq f \leq o' \qquad \text{und} \qquad \int_a^b (o' - u')dx < \varepsilon(2b - 2a + 1)$$

gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f aus Proposition 5.14. Aus der Monotonie und Dreiecksungleichung für das Riemann-Integrals in Sätzen 5.24 und 5.26 folgt nun

$$\left| \int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx \right| = \left| \int_a^b (f - f_n)dx \right| \leq \int_a^b |(f - f_n)|dx \leq \varepsilon(b - a)$$

was Gleichung (7.6) und damit den Satz beweist. □

Übung 7.49. — Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge beschränkter, komplexwertiger Funktion auf einer Menge D, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine weitere komplexwertige Funktion auf D.

1. Angenommen es gelte $D = D_1 \cup D_2$ für zwei Teilmengen, $(f_n|_{D_1})_{n=0}^{\infty}$ strebt gleichmässig gegen $f|_{D_1}$ und $(f_n|_{D_2})_{n=0}^{\infty}$ strebt gleichmässig gegen $f|_{D_2}$. Zeigen Sie, dass dann auch $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen f strebt.

2. Zeigen Sie, dass sich Teil 1 für endliche Vereinigungen $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ verallgemeinern lässt, aber nicht für unendliche Vereinigungen.

Übung 7.50. — Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge beschränkter, komplexwertiger Funktion auf einer Menge D. Zeigen Sie, dass falls $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ strebt, dann ist auch f beschränkt. Finden Sie ein auch Beispiel in dem die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ punktweise gegen eine unbeschränkte Funktion strebt.

Übung 7.51. — Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge gleichmässig stetiger, komplexwertiger Funktionen auf D, die gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ strebt. Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in D die gegen $z \in D$ konvegiert. Zeigen Sie dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z) \tag{7.7}$$

gilt. Finden Sie ein Beispiel das zeigt, dass punktweise Konvergenz von $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen f nicht genügt um (7.7) zu folgern.

Übung 7.52. — Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge gleichmässig stetiger, komplexwertiger Funktionen auf D, die gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ strebt. Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.

7.4 Potenzreihen

7.4.1 Konvergenzradius

Definition 7.53. — Sei K ein Körper. Eine **Potenzreihe** mit Koeffizienten in K ist eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in K, suggestiv geschrieben als Reihe

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

wobei das sinnfreie Symbol T **Variable**, und das Element $a_n \in K$ **Koeffizient** von T^n genannt wird. Addition und Multiplikation von Potenzreihen ist durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) T^n \tag{7.8}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) T^n \tag{7.9}$$

definiert. Wir schreiben $K[\![T]\!]$ für den dadurch entstehenden Ring von Potenzreihen mit Koeffizienten in K.

7.54. — Eine Potenzreihe ist ein Polynom wenn und nur wenn alle bis auf endlich viele ihrer Koeffizienten Null sind. Im Gegensatz zu Polynomen können wir Potenzreihen nicht in Elementen von K auswerten. Selbst wenn K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen ist, ist es nicht klar ob wir einer formalen Potenzreihe eine Funktion auf $\mathbb{C}$, oder vielleicht auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ zuordnen können. Die Antwort auf diese Frage hängt stark von den Koeffizienten a_n ab, und wird in Satz 7.57 beantwortet.

Definition 7.55. — Sei $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ eine formale Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten. Der **Konvergenzradius** von f ist die Zahl $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder das Symbol $R = \infty$, definiert durch

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho = \infty \\ \rho^{-1} & \text{falls } 0 < \rho < \infty \\ \infty & \text{falls } \rho = 0. \end{cases}$$

Übung 7.56. — Finden Sie für jedes $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ eine Potenzreihe $f(T) \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ mit Konvergenzradius R.

Satz 7.57. — *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ eine Potenzreihe mit posivivem Konvergenzradius R, und sei r eine positive reelle Zahl mit $r < R$. Schreibe $D = \overline{B(0,r)}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für die*

Funktion gegeben durch $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_n z^k$.

1. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *konvergiert absolut für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < R$, *und divergiert für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > R$.

2. *Für* $z \in B(0, R)$, *setze* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Die Folge von Funktionen* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *konvergiert gleichmässig gegen die Funktion* $f|_D$ *auf* D.

Insbesondere definiert die Potenzreihe die stetige Abbildung $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$, und schreibe $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ wie in Definition 7.55. Es gilt

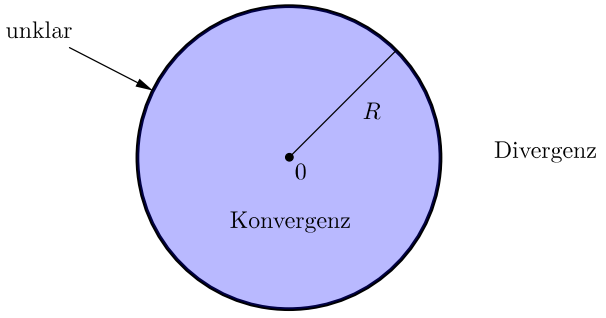
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z| = \rho|z|$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe also absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mir $\rho|z| < 1$ und divergiert falls $\rho|z| > 1$. Das ist nach Definition von R genau, was in der ersten Aussage behauptet wird.

Um gleichmässige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ auf der Kreisscheibe $D = \overline{B(0, r)}$ nachzuweisen, bemerken wir, dass nach obigem bereits $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ gilt. Daher existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \varepsilon$. Für alle $z \in D$ und $n \geq N$ gilt damit

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon.$$

Dies beweist die gleichmässige Konvergenz der stetigen Folge ststiger Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen $f|_D$ auf D. Nach Satz 7.47 ist $f|_D$ stetig. Da $r < R$ beliebig war, zeigt dies, dass $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ stetig ist. □



Beispiel 7.58. — Es ist im Allgemeinen nicht wahr, dass die Partialsummen $f_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ auf der offenen Kreisscheibe $B(0, R)$ gleichmässig gegen die durch die Potenzreihe definierte Funktion $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ streben. Wir illustrieren dies anhand der geometrischen Reihe. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $R = 1$, und die mittels der Potenzreihe definierte Funktion auf $B(0, 1)$ ist $f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$. Falls die Konvergenz der Folge der Partialsummen auf $B(0, 1)$ gleichmässig wäre, dann gäbe es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ so

dass für alle $n \geq N$ und $z \in B(0,1)$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z} \right| < 1 = \varepsilon$$

gilt. Wir setzen $n = N$ und erhalten mittels der Dreiecksungleichung daraus

$$\left| \frac{1}{1-z} \right| < 1 + \left| \sum_{k=0}^{N} z^k \right| \leq 2 + N$$

für alle $z \in B(0,1)$. Dies ist ein Widerspruch, da $\lim_{x \to 1} |\frac{1}{1-x}| = +\infty$ gilt.

Übung 7.59. — Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} T^n$$

und zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Lemma 7.60. — *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius R ist gegeben durch*

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Beweis. Aufgabe. □

Proposition 7.61. — *Sei $R \geq 0$, und seien $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ und $g(T) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius mindestens R. Dann haben auch die Summe $f(T) + g(T)$ und das Produkt $f(T)g(T)$ Konvergenzradien mindestens R.*

Beweis. Die erste Eigenschaft folgt aus Linearität des Grenzwerts. Die zweite verwendet noch Korollar 7.34. □

Beispiel 7.62. — Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mindestens Konvergenzradius 1 hat, so gilt

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + \ldots + a_n) z^n. \tag{7.10}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. In der Tat hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ Konvergenzradius 1 und für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, womit (7.10) aus Proposition 7.61 folgt.

Übung 7.63. — Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n}$.

7.4.2 Der Abel'sche Grenzwertsatz

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R, so ist es im Allgemeinen schwierig, etwas über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ auszusagen wenn $|z| = R$ gilt. Ein wichtiges Resultat in diese Richtung ist der Abel'sche Grenzwertsatz, benannt nach dem Norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802–1829). Abel starb im Alter von nur 26 Jahren an Tuberkulose.

Satz 7.64 (Abel'scher Grenzwertsatz). — *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R, derart, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergiert. Dann ist die Funktion $f : (-R, R] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ stetig, und es gilt insbesondere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{\substack{t \to R \\ t < R}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass der Konvergenzradius 1 ist, andernfalls ersetzt man a_n mit $a_n R^n$ für alle n. Wir definieren $A_n = a_0 + \ldots + a_n$. Nach Beispiel 7.62 gilt

$$\frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

für alle $t \in (-1, 1)$. Nach Annahme existiert der Grenzwert $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, und wir erhalten mit $b_n = A_n - A$ die Gleichung

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + A) t^n = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + A$$

für alle $t \in (-1, 1)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt für $t \in [0, 1)$ die Abschätzung

$$|f(t) - A| = \left| (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right| \leq \left| (1-t) \sum_{n=0}^{N} b_n t^n \right| + (1-t) \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon t^n \leq \left| (1-t) \sum_{n=0}^{N} b_n t^n \right| + \varepsilon.$$

Da die Polynomfunktion $(1-t) \sum_{n=0}^{N} b_n t^n$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist und bei 1 verschwindet, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$t \in (1-\delta, 1) \implies \left| (1-t) \sum_{n=0}^{N} b_n t^n \right| < \varepsilon$$

gilt. Daher gilt $|f(t) - A| < 2\varepsilon$ für alle $t \in (1-\delta, 1)$ und der Satz folgt. □

7.4.3 Integration von Potenzreihen

Wir haben in Abschnitt 5.3.2 das Integral von Polynomfunktionen über ein Intervall $[a, b]$

bestimmt. Wir verallgemeinern diese Resultate für Funktionen auf $[a, b]$ die durch durch konvergente Potenzreihen gegeben sind.

Satz 7.65. — *Sei* $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann hat die Potenzreihe*

$$F(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} T^{n+1}$$

denselben Konvergenzradius R, *und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

für alle $a, b \in (-R, R)$.

Beweis. Wir überprüfen zuerst die Behauptung über den Konvergenzradius. Es gilt tatsächlich

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^{-1}} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|(n+1)^{-1}}$$

da $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$ gilt und aufgrund dem Resultat aus Übung 6.60. Seien nun $a, b \in (-R, R)$ mit $a < b$. Wir betrachten die Polynomfunktionen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^n$ auf $[a, b]$ und verwenden Satz 5.41, um

$$\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} a^{k+1}$$

zu erhalten. Auf Grund von Satz 7.57 konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen f auf $[a, b]$. Es ergibt sich

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = F(b) - F(a)$$

unter Verwendung von Satz 7.48. □

7.5 Trigonometrische Funktionen

7.5.1 Die komplexe Exponentialabbildung

Wir haben in Abschnitt 6.3 die reelle Exponentiabbildung gesehen und ihre wichtigsten Eigenschaften gezeigt. Wir zeigen nun, dass wir die Exponentialabbildung alternativ durch die **Exponentialreihe**

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \tag{7.11}$$

mit definieren, und dadurch auf die gesamte komplexe Ebene fortsetzen können. Aus dem Quotientenkriterium folgt direkt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n \quad \in \mathbb{C}[\![T]\!]$$

unendlich ist, insbesondere ist also die rechte Seite von (7.11) wohldefiniert. Die Darstellung der Exponentialabbildung als Potenzreihe ist in vielen Aspekten flexibler als die Darstellung als Grenzwert. Sie wird uns später in diesem Kapitel beispielsweise dabei helfen, das Riemann-Integral der Exponentialfunktion zu berechnen.

Proposition 7.66. — *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt* (7.11).

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass für jedes $n \geq 0$ die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k!)} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{n^k} \prod_{l=0}^{k-1} (n-l) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)$$

gilt. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Es existiert, und wir fixieren $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k < \varepsilon$$

gilt. Für dieses N gilt dann auch

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right| \leq \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k < \varepsilon \tag{7.12}$$

und für $n \geq N$ ebenso

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} |x|^k \left(1 - \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right) + \varepsilon.$$

Da

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right) = 0$$

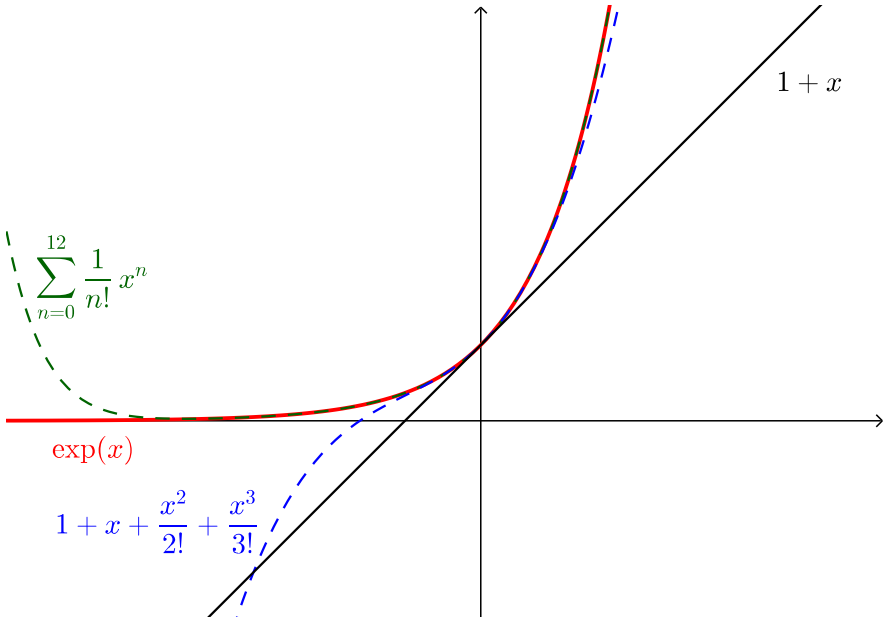
für alle $k \in \{0, \dots, N\}$ gilt, folgern wir aus letzterer Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k - \exp(x) \right| \leq \varepsilon$$

woraus gemeinsam mit (7.12)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \exp(x) \right| \leq \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right| + \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k - \exp(x) \right| \leq 2\varepsilon.$$

folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die zu beweisende Gleichung (7.11). □



Figur 7.1: Der Graph der Exponentialabbildung, sowie die Graphen einiger Partialsummen der Exponentialreihe.

Definition 7.67. — Die **komplexe Exponentialabbildung** ist die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Für eine positive reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir $a^z = \exp(z \log(a))$, und insbesondere auch $e^z = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 7.68. — *Die komplexe Exponentialabbildung* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig. Des Weiteren gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \qquad \textit{und} \qquad |\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)) \tag{7.13}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. *Insbesondere gilt* $|\exp(iy)| = 1$ *für alle* $y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ ist unendlich. Nach Satz 7.57 ist damit $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ erhalten wir aus der Cauchy-Produktformel in Korollar 7.34, dass

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w).\end{aligned}$$

gilt. Es verbleibt die Formel für den Absolutbetrag zu beweisen. Da die Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist, gilt

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overline{z}^k = \exp(\overline{z}).$$

Daraus folgt mit der Additionsformel

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z+\overline{z}) = \exp(2\operatorname{Re}(z)) = \exp(\operatorname{Re}(z))^2$$

woraus dann $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$ nach Wurzelziehen folgt. □

Proposition 7.69. — *Für alle $a < b \in \mathbb{R}$ gilt* $\int_a^b \exp(x)dx = \exp(b) - \exp(a)$.

Beweis. Wir verwenden Satz 7.65 und erhalten

$$\int_a^b \exp(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} a^{n+1} = \exp(b) - 1 - \exp(a) + 1$$

wie behauptet. □

Übung 7.70. — Zeigen Sie, dass $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Übung 7.71. — Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die Abschätzung $|\exp(z)| \leq \frac{1}{1-\operatorname{Re}(z)}$.

7.5.2 Sinus und Kosinus

7.72. — Wir definieren die **Sinusfunktion** und die **Kosinusfunktion** bei $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \tag{7.14}$$

Diese Potenzreihen 7.14 konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$, und definieren nach Satz 7.57 stetige Funktionen. Die Einschränkungen der Sinus- und Kosinusfunktion auf $\mathbb{R}$ sind reellwertig, und werden ebenso also Sinusfunktion und Kosinusfunktion bezeichnet. Die Sinusfunktion ist **ungerade**, das heisst es gilt $\sin(-z) = -\sin(z)$, und die Kosinusfunktion ist **gerade**, es gilt $\cos(-z) = \cos(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 7.73. — *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten folgende Relationen zwischen Exponenial, Sinus- und Kosinusfunktion.*

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)\,, \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,, \quad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die trigonometrischen Additionsformeln:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \tag{7.15}$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \tag{7.16}$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(iz) = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \cdots = \cos(z) + i\sin(z)$$

und analog $\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Lösen wir diese beiden Gleichungen nach $\sin(z)$ und $\cos(z)$ auf, so ergeben sich die Formeln im Satz. Um die Additionsformeln zu beweisen multiplizieren wir $\exp(iz)$ mit $\exp(iw)$ und erhalten mit der Additionsformel (7.13) für die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned}\cos(z+w) + i\sin(z+w) &= \exp(i(z+w)) \\ &= \exp(iz)\exp(iw) = (\cos(z) + i\sin(z))(\cos(w) + i\sin(w)) \\ &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) + i(\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\cos(z+w) - i\sin(z+w) &= \exp(-i(z+w)) \\ &= \exp(-iz)\exp(-iw) = (\cos(z) - i\sin(z))(\cos(w) - i\sin(w)) \\ &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) - i(\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z).\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir die Formeln (7.16) und (7.16). □

7.74. — Im Fall $z = w \in \mathbb{C}$ ergeben sich insbesondere die **Winkelverdoppelungsformeln**

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z) \qquad \text{und} \qquad \cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2.$$

Im Fall $w = -z$ folgt aus (7.16) und der Tatsache, dass der Sinus ungerade und der Kosinus gerade ist, die **Kreisgleichung** für Sinus und Kosinus

$$1 = \cos(z)^2 + \sin(z)^2$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Übung 7.75. — Seien $a < b$ eine reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b \sin(t)dt = -\cos(b) + \cos(a) \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \cos(t)dt = \sin(b) - \sin(a)$$

gilt.

Applet 7.76 (Potenzreihen)**.** *Wir betrachten die ersten Partialsummen der Potenzreihen, welche* exp, sin *und* cos *(beziehungsweise* sinh, cosh *vom nächsten Abschnitt) definieren. Durch Vergrössern des Ausschnittes können Sie die Qualität der Annäherungen der Partialsummen überprüfen. Bei den trigonometrischen Funktionen kann man auch im Bild gut erkennen, dass die Potenzreihe alternierende Reihen bilden.*

7.5.3 Die Kreiszahl

Satz 7.77. — *Es gibt genau eine Zahl* $\pi \in (0, 4)$ *mit* $\sin(\pi) = 0$. *Für diese Zahl gilt*

$$\exp(2\pi i) = 1.$$

Beweis. Die Folge reeller Zahlen $(\frac{x^n}{n!})_{n=2}^{\infty}$ ist monoton fallend für alle $x \in (0, 2]$. Aus dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen 7.23 folgen daher die Abschätzungen

$$0 < x - \tfrac{x^3}{3!} < \sin(x) < x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} \qquad \text{und} \qquad 1 - \tfrac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24}$$

für alle $x \in (0, 2]$. Es gilt $\sin(0) = 0$ und für $x = 1$ ergibt sich aus obiger Abschätzung und einer kurzen Rechnung $\sin(1) > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daher existiert nach dem Zwischenwertsatz 4.57 eine Zahl $p \in (0, 1)$ mit $\sin(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen $\sin^2(p) + \cos^2(p) = 1$ und $\cos(p) > 0$ folgt ebenso $\cos(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir definieren $\pi = 4p$. Es gilt

$$\exp(pi) = \cos(p) + i\sin(p) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

und damit

$$\exp(\pi i) = \exp(4pi) = \exp(pi)^4 = \frac{(1+i)^4}{4} = -1$$

und also $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$ und $\exp(2\pi i) = (-1)^2 = 1$ wie behauptet.

Es bleibt die Eindeutigkeit von π wie im Satz zu zeigen. Aus den obigen Abschätzungen wissen wir bereits, dass die Sinusfunktion keine Nullstelle in $(0, 2]$ besitzt. Insbesondere gilt

daher $\pi \in (2,4)$. Angenommen $s \in (2,4)$ erfüllt $\sin(s) = 0$. Wir definieren

$$r = \begin{cases} \pi - s & \text{falls } 2 < s < \pi \\ s - \pi & \text{falls } 2 < \pi < s. \end{cases}$$

Dann gilt $r \in [0,2)$ und

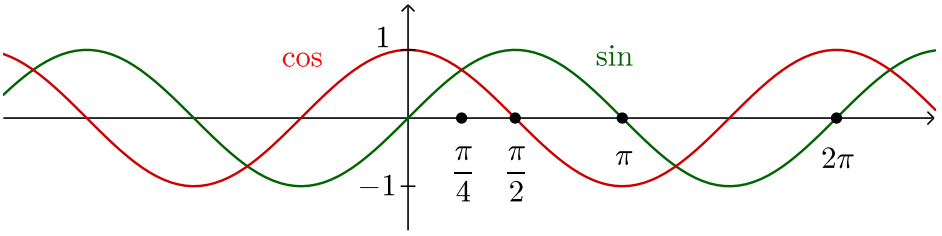
$$\sin(r) = \pm\sin(\pi - s) = \pm\big(\sin(\pi)\cos(s) - \cos(\pi)\sin(s)\big) = \pm(0-0) = 0$$

woraus $r = 0$ folgt. Daher ist $\pi \in (0,4)$ durch die Gleichung $\sin(\pi) = 0$ eindeutig bestimmt. □

Korollar 7.78. — *Es gelten*

$$\begin{array}{rclrcl} \sin(z+\frac{\pi}{2}) & = & \cos(z) & \cos(z+\frac{\pi}{2}) & = & -\sin(z) \\ \sin(z+\pi) & = & -\sin(z) & \cos(z+\pi) & = & -\cos(z) \\ \sin(z+2\pi) & = & \sin(z) & \cos(z+2\pi) & = & \cos(z) \end{array}$$

7.79. — Aus Korollar 7.78 ergibt sich, dass Sinus und Cosinus beides periodische Funktionen mit Periodenlänge 2π sind. Um für eine gegebene reelle Zahl x den numerischen Wert von $\sin(x)$ oder $\cos(x)$ zu kennen genügt es, die Werte des Sinus auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu kennen.



Übung 7.80. — Zeigen Sie, dass die Nullstellen von $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau die Punkte in $\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ sind und dass die Nullstellen von $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau die Punkte in $\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$ sind.

Übung 7.81. — Zeigen Sie die Formel

$$\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass der Sinus $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ strikt monoton wachsend und bijektiv ist.

Übung 7.82. — Zeigen Sie, dass die Zahl $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ algebraisch ist.

Übung 7.83. — Zeigen Sie: $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

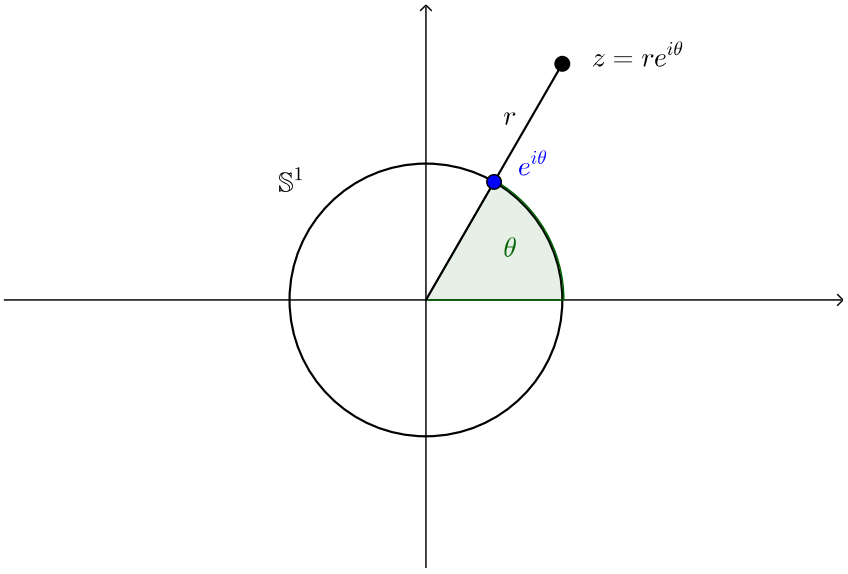
Übung 7.84. — Zeigen Sie, dass $3.1 < \pi < 3.2$ gilt. Die Verwendung eines elektronischen Hilfsmittels zur Berechnung von gewissen rationalen Zahlen kann hilfreich sein.

7.5.4 Polarkoordinaten und Multiplikation komplexer Zahlen

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion können wir komplexe Zahlen in **Polarkoordinaten** ausdrücken, das heisst, in der Form

$$z = r\exp(i\vartheta) = r\cos(\vartheta) + ir\sin(\vartheta)$$

wobei r der Abstand vom Ursprungspunkt $0 \in \mathbb{C}$ zu z ist, also der Betrag $r = |z|$ von z, und ϑ der Winkel, der zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z\mathbb{R}_{\geq 0}$ eingeschlossen ist.



Falls $z \neq 0$ gilt, so ist der Winkel ϑ eindeutig bestimmt, und wird als **Argument** von z bezeichnet und als $\vartheta = \arg(z)$ geschrieben. Die Menge der komplexen Zahlen mit Absolutbetrag Eins ist demnach

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{\exp(i\vartheta) \mid \vartheta \in [0, 2\pi)\}$$

und wird als der **Einheitskreis** in $\mathbb{C}$ bezeichnet

Proposition 7.85 (Existenz von Polarkoordinaten). — *Für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen $r > 0$ und $\vartheta \in [0, 2\pi)$ mit $z = r\exp(i\vartheta)$.*

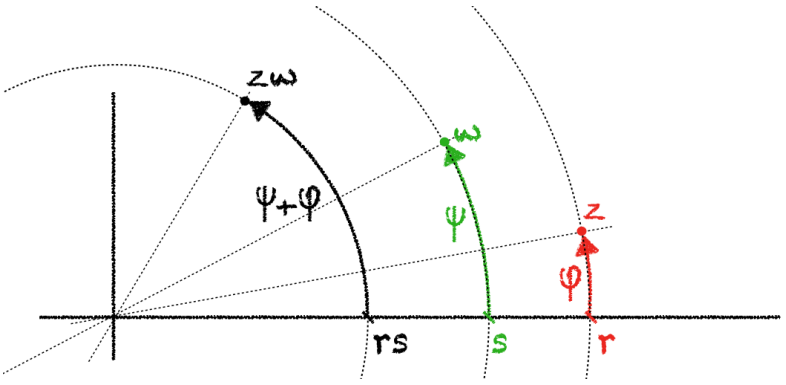
Beweis. Nach Division von z durch $r = |z| > 0$ können wir $r = |z| = 1$ annehmen, und zeigen, dass es ein eindeutiges $\vartheta \in [0, 2\pi)$ mit $z = \exp(i\vartheta)$ gibt. Wir betrachten zuerst den Fall $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ und behaupten, dass ein $\theta \in [0, \pi]$ existiert, so dass $z = \exp(i\vartheta)$ gilt. In der Tat ist $\mathrm{Re}(z) \in [-1, 1]$ und es gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\vartheta \in [0, \pi]$ mit $\mathrm{Re}(z) = \cos(\vartheta)$. Nun gilt aber auch

$$\sin(\vartheta) = \sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)} = \sqrt{1 - \mathrm{Re}(z)^2} = \mathrm{Im}(z)$$

da wir $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ angenommen haben, und somit folgt $z = \exp(i\vartheta)$. Falls $\mathrm{Im}(z) < 0$ ist, dann wenden wir obiges Argument für $-z$ an und finden ein $\vartheta \in (0, \pi)$ mit $-z = \exp(i\vartheta)$, und also $z = \exp(i(\pi + \vartheta))$.

Es bleibt die Eindeutigkrit von ϑ zu zeigen. Sind $\vartheta, \vartheta' \in [0, 2\pi)$ mit $z = \exp(i\vartheta) = \exp(i\vartheta')$, dann gilt $\exp(i(\vartheta - \vartheta')) = 1$ und daher auch $\sin(\vartheta - \vartheta') = 0$. Aus der Eindeutigkeit von π in Satz 7.77 und der Formel $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ in Korollar 7.78 ergibt sich daraus $\vartheta - \vartheta' \in \{-\pi, 0, \pi\}$. Falls $\vartheta - \vartheta' \in \{-\pi, \pi\}$, so gilt aber $\exp(i(\vartheta - \vartheta')) = -1$, und daher muss $\vartheta = \vartheta'$ gelten. □

7.86. — In Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ neu interpretieren. Sind $z = r\exp(i\varphi)$ und $w = s\exp(i\psi)$ komplexe Zahlen, dann gilt $zw = rs\exp(i(\varphi + \psi))$. Bei Multiplikation von komplexen Zahlen multiplizieren sich die Längen der Vektoren und addieren sich die Winkel.



Applet 7.87 (Geometrische Bedeutung der Komplexen Zahlen)**.** *Wir können anhand der eingezeichneten Polarkoordinatenlinien die geometrische Bedeutung der Multiplikation von komplexen Zahlen und der Inversen und der Wurzeln einer vorgegebenen Zahl erkennen. Bei Bewegung von z um den Ursprung im Wurzelmodus ist ersichtlich, warum eine stetige Definition von Wurzelfunktionen nicht möglich ist.*

Übung 7.88. — Sei $w = r\exp(i\vartheta)$ nicht Null. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^n - w$ durch

$$\left\{ \sqrt[n]{r}\exp\left(2\pi i\alpha + \tfrac{\vartheta}{n}\right) \,\middle|\, \alpha = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n} \right\}$$

gegeben sind und dass diese paarweise verschieden sind. Die n-ten Wurzeln von 1 nennen sich die n-ten **Einheitswurzeln**.

Übung 7.89. — Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Identität $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2\pi i \tfrac{k}{n}\right) = 0$.

Übung 7.90. — Verallgemeinern Sie Übung 4.17 und zeigen Sie, dass jedes Polynom vom Grad 2 mit komplexen Koeffizienten als Produkt zweier Polynome mit Grad 1 geschrieben werden kann.

7.5.5 Der komplexe Logarithmus

Wir haben den reellen Logarithmus als die inverse Abbildung von der bijektiven Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definiert. Wir wollen nun den Logarithmus für komplexe Zahlen definieren. Leider gibt es hier aber ein fundamentales Problem: die komplexe Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht injektiv, da beispielsweise $\exp(2n\pi i) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Aus diesem Grund müssen wir die Exponentialabbildung auf eine geeignete Teilmenge D von $\mathbb{C}$ einschränken, so dass die eingeschränkte Abbildung $\exp|_D : D \to \mathbb{C}^\times$ bijektiv ist. Dies kann durch viele verschiedene Teilmengen erreicht werden. Wir wollen hier zwei Möglichkeiten zeigen.

7.91. — Wir können zum Beispiel die Teilmenge

$$D_{\mathrm{Pol}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(z) \in [0, 2\pi)\}$$

betrachten. In diesem Fall entspricht das Exponential von $x + iy \in D_{\mathrm{Pol}}$ der Polarkoordinatendarstellung $z = \exp(x) \cdot \exp(iy)$ in Proposition 7.85 mit $r = \exp(x)$ und $\theta = y$. Da die Polarkoordinatendarstellung von jedem $z \in \mathbb{C}^\times$ eindeutig bestimmt ist, ist die Einschränkung $\exp|_{D_{\mathrm{Pol}}} : D_{\mathrm{Pol}} \to \mathbb{C}^\times$ bijektiv. Der Nachteil dieser Abbildung ist, dass die entsprechende Umkehrabbildung

$$z \mapsto \log(|z|) + i \arg(z)$$

bei jeder positiven reellen Zahl unstetig ist.

7.92. — Die Unstetigkeit des komplexen Logarithmus lässt sich nicht vermeiden. Mit einer anderen Wahl von D konnen wir die Unstetigkeitsstellen an eine andere Stelle platzieren. Wir definieren

$$D_{\mathrm{Haupt}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$$

Man sieht auf die gleiche Weise wie oben, dass $\exp|_{D_{\mathrm{Haupt}}} : D_{\mathrm{Haupt}} \to \mathbb{C}^\times$ bijektiv ist. In der Tat entspricht dies leicht veränderten Polarkoordinaten, wo wir einen Winkel $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ verlangen. Die entsprechende Umkehrabbildung wird der **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus genannt, und

$$\log : \mathbb{C}^\times \to D_{\mathrm{Haupt}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$$

geschrieben. Er ist auf der negativen Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$ unstetig, und stetig auf $\mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_{<0}$.

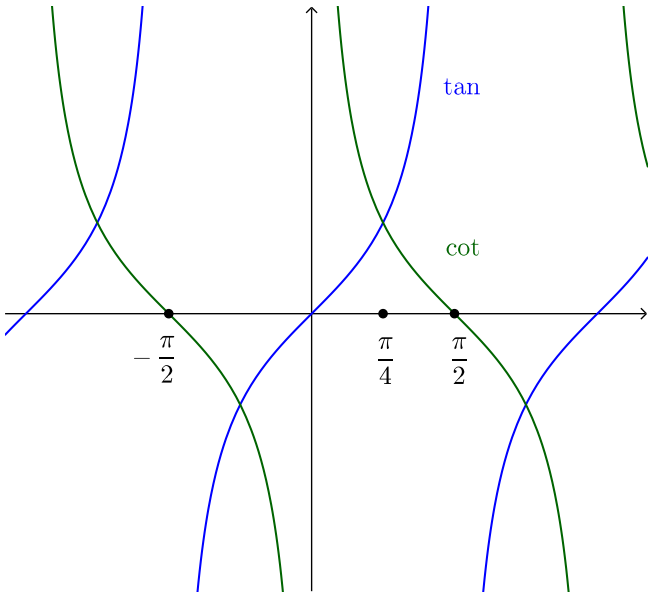
7.5.6 Weitere Trigonometrische Funktionen

Neben der Exponentialfunktion, dem Sinus und dem Kosinus gibt es weitere dazu verwandte Funktionen die man als trigonometrische Funktionen bezeichnet.

7.93. — Die **Tangensfunktion** und die **Kotangensfunktion** sind durch

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{und} \qquad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) \neq 0$, beziehungsweise mit $\sin(z) \neq 0$.



Übung 7.94. — Zeigen Sie, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ die Additionsformel

$$\tan(z+w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}$$

gilt, wo definiert. Finden und beweisen Sie eine analoge Additionsformel für den Kotangens.

7.95. — Der **Sinus Hyperbolicus** und der **Kosinus Hyperbolicus** sind die durch die Potenzreihen

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}$$

definierten Funktionen. Es gilt

$$\sinh(z) = -i\sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$$

und also $\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Der **Tangens** und der **Kotangens Hyperbolicus** sind durch

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \text{und} \qquad \coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cosh(z) \neq 0$, beziehungsweise mit $\sinh(z) \neq 0$. Die Funktionen sinh und tanh sind ungerade und cosh ist gerade. Es gelten die Additionsformeln

$$\begin{aligned} \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w), \\ \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \end{aligned}$$

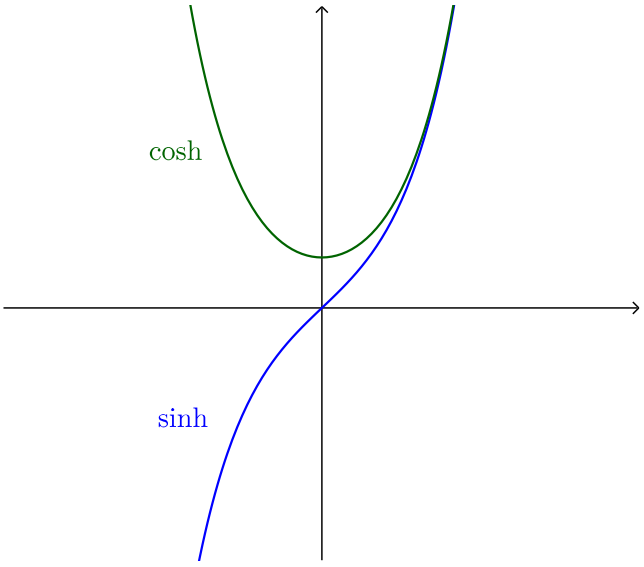
für alle $z, w \in \mathbb{C}$, sowie die Hyperbelgleichung

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus Proposition 7.69 ergibt sich

$$\int_a^b \sinh(x)dx = \cosh(b) - \cosh(a) \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b) - \sinh(a)$$

für alle $a < b \in \mathbb{R}$.



Übung 7.96. — Beweisen Sie ausgehend von den Definitionen des hyperbolischen Sinus und des hyperbolischen Kosinus die obigen Formeln.

Kapitel 8

Differentialrechnung

Wir behandeln Differentialrechnung in einer Variablen. Diese ist für das Verständnis von Funktionen auf Intervallen in $\mathbb{R}$, aber auch für die Berechnung des Riemann-Integrals von fundamentaler Bedeutung.

8.1 Die Ableitung

8.1.1 Definition und geometrische Interpretation

Wir legen für diesen Abschnitt eine nichtleere Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte fest, das heisst, jedes element $x \in D$ ist ein Häufungspunkt von D. Das typische Beispiel für so eine Teilmenge ist ein Intervall, das nicht leer ist und nicht nur aus einem Punkt besteht. Falls nicht explizit anders erwähnt, sind alle Funktionen als reellwertig vorausgesetzt. Wir überlassen es dem Leser jeweils zu entscheiden welche Definitionen und Sätze auch für komplexwertige Funktionen Sinn ergeben.

Definition 8.1. — Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Wir sagen, dass f bei a **differenzierbar** ist, falls der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{8.1}$$

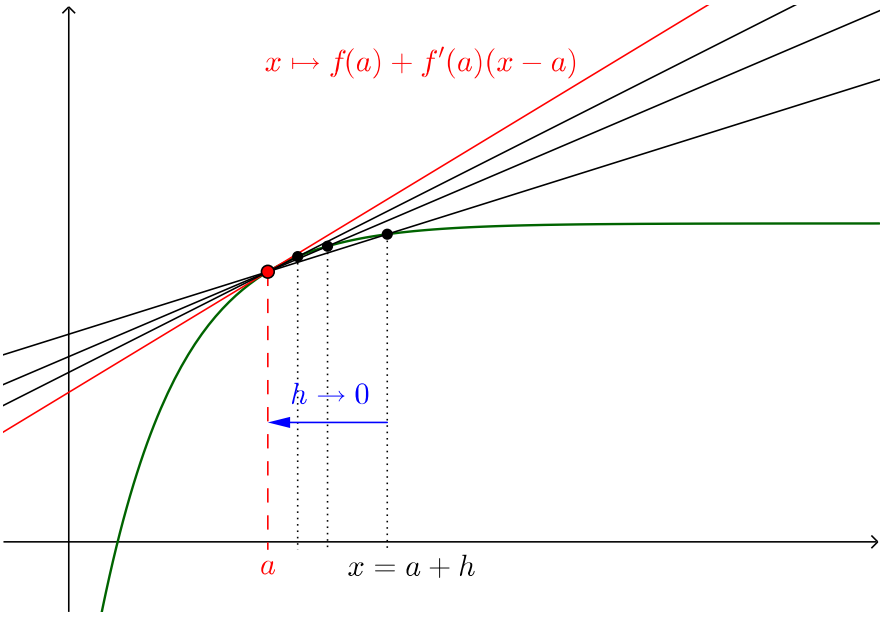
existiert. In diesem Fall nennen wir $f'(a)$ die **Ableitung** von f bei a. Falls f bei jedem Häufungspunkt von D in D differenzierbar ist, dann sagen wir auch, dass f auf D **differenzierbar** ist und nennen die daraus entstehende Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ die **Ableitung** von f.

8.2. — Alternative Notationen für die Ableitung von f sind $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{df}{dx}$ oder auch Df. Wir werden gelegentlich $\frac{\partial}{\partial x} f$ benutzen. Falls $a \in D$ ein rechtseitiger Häufungspunkt von D ist, dann ist f bei a **rechtsseitig differenzierbar**, wenn die **rechtsseitige Ableitung**

$$f'_+(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. **Linksseitige Differenzierbarkeit** und die **linksseitige Ableitung** $f'_-(a)$ werden analog über die Bewegung $x \to a$ mit $x < a$ definiert.

8.3. — Eine **affine** Funktion ist eine Funktion der Form $x \mapsto sx+r$, für reelle Zahlen s und r. Der Graph einer affinen Funktion ist eine nichtvertikale **Gerade** in $\mathbb{R}^2$. Der Parameter s in der Gleichung $y = sx + r$ wird die **Steigung** der Geraden genannt. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$, so wird die Funktion $x \mapsto f'(a)(x - a)$ **lineare Approximation** von f bei a oder die **Tangente** von f bei a genannt.



Die geometrische Interpretation der Ableitung einer reellwertigen Funktion f bei a ist also die Steigung der Tangenten des Graphen bei a. Denn wenn x gegen a strebt, nähert sich die Sekante, die durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ geht und den Differenzenquotienten als Steigung besitzt, der Tangente des Graphen bei a an.

Beispiel 8.4. — Konstante Funktionen sind überall differenzierbar und haben die Nullfunktion als Ableitung. Die Identitätsfunktion $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar und ihre Ableitung ist die konstante 1-Funktion, denn

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel 8.5. — Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist differenzierbar und ihre Ableitung ist die Exponentialfunktion. Allgemeiner behaupten wir, dass für ein festes $\alpha \in \mathbb{C}$ die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = \exp(\alpha x)$ durch $f'(a) = \alpha \exp(\alpha a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gegeben ist. In der Tat gilt für $a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(\alpha a + \alpha h) - \exp(\alpha a)}{h} = \exp(\alpha a) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(\alpha h) - 1}{h}$$

$$= \exp(\alpha a) \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k h^{k-1} = \exp(\alpha a)\alpha,$$

da die Abbildung $h \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} h^{k-1}$ nach Satz 7.57 stetig ist.

Beispiel 8.6. — Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In der Tat ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{(x+h)xh} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{\lim_{h\to 0}(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

wegen der Stetigkeit von $h \mapsto (x+h)x$ bei 0.

Definition 8.7. — Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die **höheren Ableitungen** von f, sofern sie existieren, durch

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(1)} = f', \qquad f^{(2)} = f'', \qquad \ldots, \qquad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $f^{(n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, heisst f n-**mal differenzierbar**. Falls die n-te Ableitung $f^{(n)}$ zusätzlich stetig ist, heisst f n-mal **stetig differenzierbar**. Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C^n(D)$. Es bezeichnet also $C^0(D)$ die Menge reellwertigen, stetigen Funktionen auf D, und $C^1(D)$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen deren Ableitung stetig ist. Wir nennen solche Funktionen **stetig differenzierbar** oder von **Klasse** C^1. Rekursiv definieren wir für $n \geq 1$

$$C^n(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar und } f' \in C^{n-1}(D)\}$$

und sagen $f \in C^n(D)$ sei von **Klasse** C^n. Schliesslich definieren wir

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(D)$$

und bezeichnen Funktionen $f \in C^\infty(D)$ als **glatt** oder von **Klasse** C^∞.

Beispiel 8.8. — Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \operatorname{sgn}(x)x^2$ ist differenzierbar. Die Ableitung von f ist durch $f'(x) = 2|x|$ gegeben. Das zeigt, dass f stetig ableitbar, also von Klasse C^1 ist. Da die stetige Funktion f' nicht ableitbar ist, ist f nicht von Klasse C^2.

Beispiel 8.9. — Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist glatt. Polynomfunktionen sind glatt.

8.1.2 Ableitungsregeln

Wie schon bei stetigen und Riemann-integrierbaren Funktionen möchten wir nicht immer von Hand zeigen müssen, dass eine gegebene Funktion differenzierbar ist. Stattdessen wollen wir allgemeine Regeln beweisen, auf die sich die Differenzierbarkeit verschiedener Funktionen zurückführen lässt.

Proposition 8.10. — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ bei a differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \tag{8.2}$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{8.3}$$

Insbesondere ist jedes skalare Vielfache von f bei a differenzierbar und $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dies gilt ebenso für komplexwertige Funktionen.

Beweis. Wir berechnen unter Verwendung der Eigenschaften des Grenzwerts in Abschnitt 6.4.1

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \end{aligned}$$

da g bei a stetig ist. □

Korollar 8.11. — *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ ebenso n-mal differenzierbar und es gilt $f^{(n)} + g^{(n)} = (f+g)^{(n)}$ sowie*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Insbesondere ist jedes skalare Vielfache n-mal differenzierbar und $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $n = 1$ ist das Proposition 8.10, der allgemeine Fall folgt mit Induktion über $n \geq 1$. □

Korollar 8.12. — *Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt $(1)' = 0$ und $(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \geq 1$.*

Beweis. Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ wurden bereits in Beispiel 8.4 besprochen. Die Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$ folgt über Induktion aus der Produktregel (8.3). Angenommen für $n \geq 1$ gilt bereits $(x^n)' = nx^{n-1}$. Dann folgt aus (8.3), dass $x^{n+1} = xx^n$ differenzierbar ist und

$$(x^{n+1})' = (xx^n)' = 1x^n + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$$

erfüllt, was den Induktionsbeweis abschliesst. Differenzierbarkeit einer beliebigen Polynomfunktion folgt nun aus der Linearität der Ableitung (8.2). □

Beispiel 8.13. — Der Logarithmus $f = \log : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \to \log(x)$ ist glatt. In der Tat gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$ oder allgemein $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$, was sich mit vollständiger Induktion und der Leibnitz Regel beweisen lässt.

Übung 8.14. — Sei c eine komplexe Zahl, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die durch $f(t) = \exp(cx)$ gegebene Funktion. Zeigen Sie, dass f ableitbar ist, und berechnen Sie die Ableitung f' von f. Folgern Sie aus den Spezilfällen $c = \pm 1$ und $c = \pm i$ in Beispiel 8.5, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\sin(t) = \cos(t) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\cos(t) = -\sin(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\sinh(t) = \cosh(t) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\cosh(t) = \sinh(t)$$

gilt.

Satz 8.15 (Kettenregel). — *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine bei x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 = f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine bei y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis. Wir schreiben $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_f(x)(x - x_0)$, wobei die Funktion ε_f auf D durch

$$\varepsilon_f(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{falls } x \in D \setminus \{x_0\} \\ 0 & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

für alle $x \in D$ gegeben ist, und genauso $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \varepsilon_g(y)(y - y_0)$ mit

$$\varepsilon_g(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} - g'(y_0) & \text{falls } y \in E \setminus \{y_0\} \\ 0 & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$$

für alle $y \in E$. Die Funktion ε_f ist stetig bei x_0, und die Funktion ε_g ist stetig bei y_0. Durch Einsetzen von $y = f(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \varepsilon_g(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\
&= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \Big(g'(f(x_0))\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(f(x))(f'(x_0) + \varepsilon_f(x))\Big)(x - x_0),
\end{aligned}$$

für alle $x \in D$, und damit

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{g(f((x)) - g(f((x_0))}{x - x_0} \\
&\quad = \lim_{x \to x_0} \big(g'(f(x_0))f'(x_0) + g'(f(x_0))\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(f(x))(f'(x_0) + \varepsilon_f(x))\big) \\
&\quad = g'(f(x_0))f'(x_0)
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Korollar 8.16. — *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ Teilmengen, so dass jeder Punkt in D respektive E ein Häufungspunkt von D respektive E ist. Seien $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ beides n-mal differenzierbare Funktionen. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ auch n-mal differenzierbar.*

Beweis. Folgt aus der Kettenregel und Induktion. □

Korollar 8.17 (Quotientenregel). — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Häufungspunkt und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar. Falls $g(a) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{f}{g}$ bei a differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis. Sei $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $\psi(y) = \frac{1}{y}$, welche nach Beispiel 8.6 differenzierbar ist. Wir kombinieren dies mit der Kettenregel (Satz 8.15) und erhalten, dass die Funktion $\frac{1}{g} = \psi \circ g$ bei a differenzierbar ist mit Ableitung

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g(a)^2} g'(a).$$

Verwenden wir nun die Produktregel in Proposition 8.10, so ergibt sich, dass $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ bei a differenzierbar ist und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

erfüllt, was zu zeigen war. □

Beispiel 8.18. — Wir bestimmen die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(\sin(\sin(x^2)))$ mittels mehrmaligem Anwenden der Kettenregel. Da $\exp' = \exp$ erhalten wir

$$f'(x) = \exp(g(x))g'(x),$$

wobei $g(x) = \sin(\sin(x^2))$. Ebenso ist wegen $\sin' = \cos$

$$g'(x) = \cos(h(x))h'(x),$$

wobei $h(x) = \sin(x^2)$ und $h'(x) = \cos(x^2)2x$. Dadurch erhalten wir

$$f'(x) = \exp(\sin(\sin(x^2)))\cos(\sin(x^2))\cos(x^2)2x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 8.19. — Bestimmen Sie die Ableitung von der Funktion $x \mapsto \cos((\sin(\exp(x)))^3)$.

Satz 8.20. — *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $f : D \to E$ eine stetige, bijektive Abbildung, deren inverse Abbildung $f^{-1} : E \to D$ ebenfalls stetig ist. Falls f in dem Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

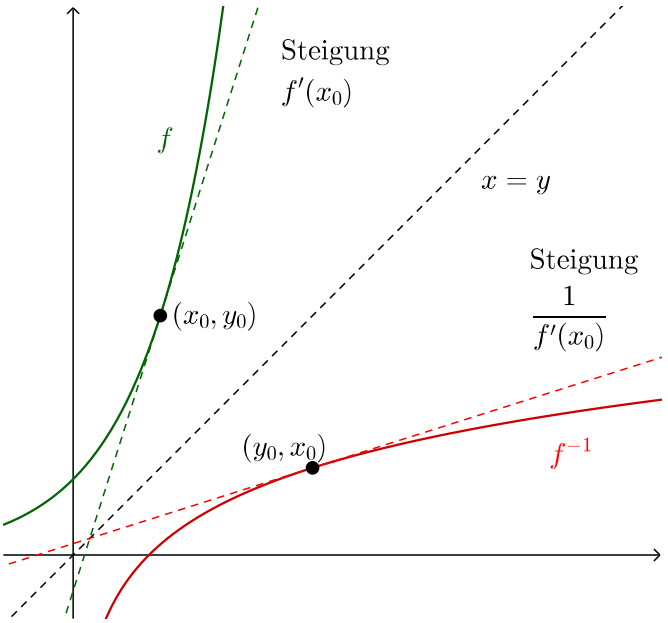
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass y_0 ein Häufungspunkt von E ist, womit man von Differenzierbarkeit bei y_0 sprechen darf. Tatsächlich ist nach Annahme x_0 ein Häufungspunkt und es existiert eine Folge $(x_n)_n$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Da f stetig ist, gilt $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$ für $n \to \infty$ und da f bijektiv ist, gilt $f(x_n) \neq y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $(y_n)_n$ eine Folge in $E \setminus \{y_0\}$, die gegen y_0 konvergiert. Dann strebt $x_n = f^{-1}(y_n)$ in $D \setminus \{x_0\}$ gegen x_0, da f^{-1} per Annahme stetig ist, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} = (f'(x_0))^{-1}$$

nach der Charakterisierung der Konvergenz einer Funktion mittels Folgen in Lemma 6.102. Da dies aber für jede Folge $(y_n)_n$ wie oben gilt, folgt der Satz wiederum aus Lemma 6.102. □



Figur 8.1: Eine intuitive Darstellung von Satz 8.20. Spiegelt man den Graphen von f und die Tangente beim Punkt (x_0, y_0) um die Gerade $x = y$ in $\mathbb{R}^2$, so erhält man den Graphen von f^{-1} und, das ist die Behauptung, die Tangente bei (y_0, x_0). Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Spiegelung einer Gerade mit Steigung m um $x = y$ Steigung $\frac{1}{m}$ hat.

Beispiel 8.21. — Die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(y) = \log(|y|)$ ist differenzierbar mit Ableitung g' gegeben durch $g'(y) = \frac{1}{y}$ für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Denn die Abbildung $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und damit folgt aus Satz 8.20, dass g bei allen Punkten $y > 0$ differenzierbar ist mit $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, wobei $x = g(y) = \log(y)$. Da $\exp' = \exp$ folgt nun

$$g'(y) = \log'(y) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}.$$

Für $y < 0$ ist $g(y) = \log(-y)$. Also folgt Differenzierbarkeit von g bei y sowie die Formel $g'(y) = -\log'(-y) = -\frac{1}{-y} = \frac{1}{y}$ aus der Kettenregel (Satz 8.15).

Beispiel 8.22. — Für ein beliebiges $s \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = x^s$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = sx^{s-1}$. In der Tat gilt $x^s = \exp(s \log(x))$ für alle $x > 0$ per Definition beliebiger Potenzen in Abschnitt 7.5.1. Mit der bereits bekannten Ableitung des Logarithmus folgt somit

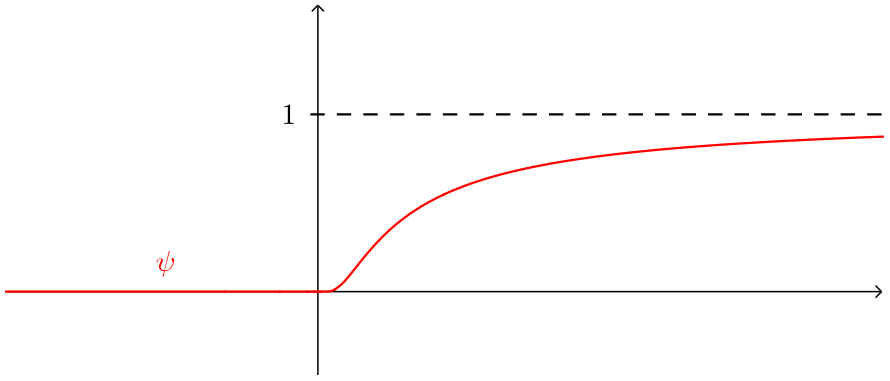
$$f'(x) = \exp(s \log(x))' = \exp(s \log(x)) s \frac{1}{x} = s \exp((s-1) \log(x)) = sx^{s-1}$$

für alle $x > 0$.

Beispiel 8.23. — Die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist glatt, das heisst, beliebig oft stetig differenzierbar.



Für $x < 0$ gibt es nichts zu zeigen, da die Ableitung der Nullfunktion die Nullfunktion ist. Für $x > 0$ ergibt sich dies mittels Induktion, der Kettenregel (Satz 8.15), Beispiel 8.6, der Produktregel in Proposition 8.10 und Korollar 8.12. In der Tat gilt für $x > 0$, dass

$$\psi'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}, \quad \psi''(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{-2}{x^3}$$

und (da die konkrete Formel für $\psi^{(n)}$ schnell kompliziert wird) allgemeiner

$$\psi^{(n)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n\left(\frac{1}{x}\right) \tag{8.4}$$

für gewisse Polynome f_n und jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ und $n = 2$ haben wir diese Darstellung der Ableitung bereits bewiesen, wobei $f_1(t) = t^2$ und $f_2(t) = t^4 - 2t^3$. Für den Induktionsschritt nehmen wir (8.4) für $n \in \mathbb{N}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}\psi^{(n+1)}(x) &= \left(\exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} f_n\left(\frac{1}{x}\right) + \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

wobei das Polynom f_{n+1} als $f_{n+1}(t) = t^2(f_n(t) - f_n'(t))$ gewählt wurde.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ψ auch in $x = 0$ beliebig oft differenzierbar ist. Dabei können wir nicht auf unsere Ableitungsregeln zurückgreifen, sondern müssen dies direkt mit der Definition der Ableitung überprüfen. Wir behaupten, dass $\psi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für den Beweis der Behauptung zeigen wir zuerst, dass für jedes Polynom f

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) f(\tfrac{1}{x}) = 0 \tag{8.5}$$

ist. Auf Grund der Linearität des Grenzwerts und da $\psi(x) = 0$ für $x < 0$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\lim_{x \searrow 0} \psi(x)x^{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir $y = \frac{1}{x}$, so erhalten wir, dass diese Behauptung wiederum zu

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y^n}{\exp(y)} = 0$$

äquivalent ist. Dies folgt aber mit dem Sandwich-Lemma aus der Ungleichung $(1 + \frac{y}{n+1})^{n+1} \leq \exp(y)$ für alle $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ (siehe Abschnitt 6.3).

Wir zeigen nun $\psi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion. Verwenden wir (8.5), so erhalten wir

$$\psi'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\psi(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \psi(x) \frac{1}{x} = 0.$$

Falls wir bereits $\psi^{(n)}(0) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wissen, dann folgt ebenso

$$\psi^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\psi(x) f_n\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \psi(x) f_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} = 0.$$

Wir haben nun also gezeigt, dass alle Ableitungen von ψ auf ganz $\mathbb{R}$ existieren und somit ist ψ glatt.

Übung 8.24. — Finden Sie für beliebige reelle Zahlen $a < b < c < d$ eine glatte Funktion φ auf $\mathbb{R}$, so dass φ gleich Null ist ausserhalb des Intervalls (a, d) und gleich 1 ist auf dem Intervall $[b, c]$.

8.2 Zentrale Sätze der Differentialrechnung

8.2.1 Lokale Extremwerte

Definition 8.25. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 ein **lokales Maximum** hat, falls es eine Umgebung U von x_0 in D gibt, auf der f durch $f(x_0)$ beschränkt ist. Genauer formuliert heisst dies, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$. Falls es sogar ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ gilt, dann hat f in x_0 ein **isoliertes lokales Maximum**. Der Wert $f(x_0)$ wird auch ein **lokaler Maximalwert** von f genannt. Ein **lokales Minimum**, ein **isoliertes lokales Minimum** und ein **lokaler Minimalwert** von f sind analog definiert.

Des Weiteren nennen wir x_0 ein **lokales Extremum** von f und $f(x_0)$ einen **lokalen Extremwert** von f, falls f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum in x_0 hat.

Proposition 8.26. — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und f eine reellwertige Funktion auf D. Angenommen f ist in einem lokalen Extremum $x_0 \in D$ differenzierbar und x_0 ist sowohl ein rechtsseitiger als auch ein linksseitiger Häufungspunkt von D. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass f ein lokales Maximum in $x_0 \in D$ hat (sonst ersetzt man f durch $-f$). Da f bei x_0 differenzierbar ist und x_0 von links und rechts angenähert werden kann, existieren sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert der Differenzenquotienten bei x_0 und beide sind gleich $f'(x_0)$. Dann ist

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

da $f(x) - f(x_0) \leq 0$ für alle x hinreichend nahe bei x_0 gilt, aber auch

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

aus dem selben Grund. Damit erhalten wir $f'(x_0) = 0$. □

Korollar 8.27. — *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f. Dann ist mindestens eine der folgenden Aussagen wahr.*

1. *x_0 ist ein in I enthaltener Endpunkt von I,*
2. *f ist bei x_0 nicht differenzierbar oder*
3. *f ist bei x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.*

Insbesondere sind alle lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion auf einem offenen Intervall Nullstellen der Ableitung.

Übung 8.28. — Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $f(x) = x^3 - x$. Finden Sie alle lokalen Extrema von f. Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $|f|$ auf $[-3, 3]$.

8.2.2 Der Mittelwertsatz

Wir wenden uns nun allgemeinen Sätzen der Differentialrechnung und deren Konsequenzen zu. Unsere erste Frage wird sein, ob die Ableitung einer differenzierbaren Funktion die Steigung gewisser Sekanten annimmt, wobei folgender Satz unser Ausgangspunkt sein wird.

Satz 8.29 (Rolle). — *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Nach dem Satz 4.70 werden Minimum und Maximum von f auf $[a, b]$ angenommen. Das heisst, es existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$. Nach Proposition 8.26 muss die Ableitung von f bei allen Extrema in (a, b) Null sein. Falls also $x_0 \in (a, b)$ oder $x_1 \in (a, b)$ gilt, dann haben wir bereits ein $\xi \in (a, b)$ gefunden mit $f'(\xi) = 0$. Falls aber x_0 und x_1 beides Endpunkte des Intervalles sind, dann muss wegen $f(a) = f(b)$ auch $f(x_0) = f(x_1)$ gelten, womit die Funktion f konstant ist, und also $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt. □

Satz 8.30 (Mittelwertsatz). — *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir definieren eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

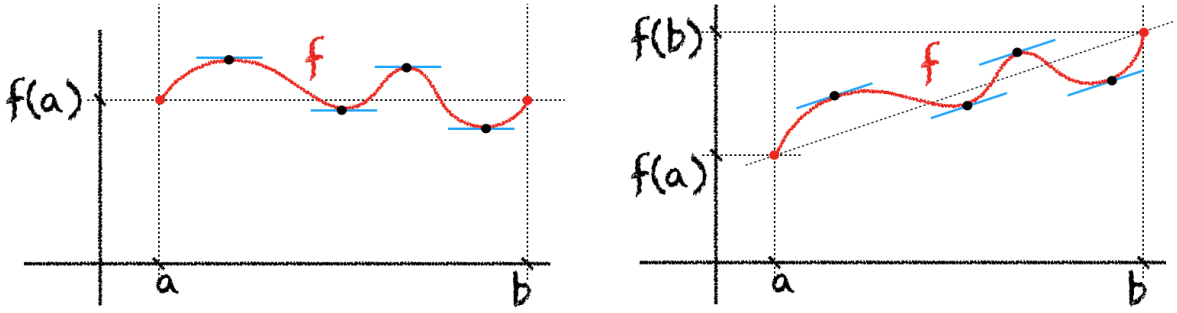
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $g(a) = f(a)$ und $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. Des Weiteren ist g stetig an den Endpunkten und differenzierbar auf (a, b) nach Proposition 8.10. Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

wie gewünscht. □

8.31. — In Worten besagt der Satz von Rolle also, dass wenn eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall an den Endpunkten den selben Wert annimmt, die Steigung irgendwo zwischen den Endpunkten Null sein muss. Wir veranschaulichen dies in folgendem Bild links.



Nach dem Mittelwertsatz gibt es also mindestens zu jeder differenzierbaren Funktion auf einem Intervall einen Punkt, an dem die Steigung der Funktion genau der durchschnittlichen Steigung ist. Dies sieht man im Bild rechts. Ebenfalls erkennbar ist hier, wie man den Beweis des Mittelwertsatzes auf den Satz von Rolle zurückführt, in dem man den Graphen der Funktion f rechts durch Scherung so modifiziert, dass danach $f(a) = f(b)$ gilt.

Übung 8.32. — Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist. Was geschieht, wenn man Kompaktheit als Hypothese fallen lässt?

Beispiel 8.33. — Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die durch $f(t) = \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ gegebene komplexwertige Funktion. An den Endpunkten des Intervalles $[0, 2\pi]$ gilt $f(0) = f(2\pi) = 1$. Die Ableitung von f nimmt jedoch nie den Wert Null an, denn es gilt nach Beispiel 8.4

$$f'(t) = i\exp(it) \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Somit sind die Aussagen des Satzes von Rolle und des Mittelwertsatzes für komplexwertige Funktionen in dieser Allgemeinheit falsch.

Satz 8.34 (Mittelwertsatz nach Cauchy). — *Seien f und g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass f und g auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{8.6}$$

Falls zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Wir definieren eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = g(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f(x)\big(g(b) - g(a)\big)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

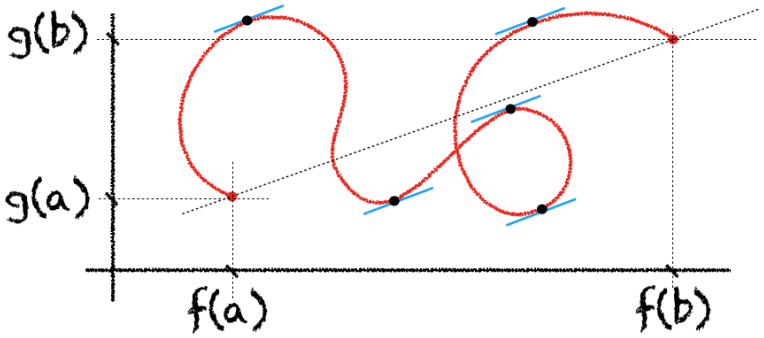
$$\begin{aligned} F(a) &= g(a)\big(f(b) - f(a)\big) - f(a)\big(g(b) - g(a)\big) = g(a)f(b) - f(a)g(b) \\ F(b) &= g(b)\big(f(b) - f(a)\big) - f(b)\big(g(b) - g(a)\big) = F(a). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle 8.29 existiert somit ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$F'(\xi) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) - f'(\xi)(g(b) - g(a)) = 0.$$

Dies beweist die erste Behauptung (8.6) des Satzes. Falls zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann folgt aus dem Satz von Rolle, dass $g(b) \neq g(a)$ gilt. Nach Division von (8.6) mit $g'(\xi)(g(b) - g(a))$ ergibt sich die zweite Behauptung des Satzes. □

8.35. — Genau wie der Mittelwertsatz 8.30 hat der Mittelwertsatz von Cauchy eine geometrische Interpretation, nur muss man dieses Mal in der zweidimensionalen Ebene suchen. Dort besagt der Mittelwertsatz von Cauchy unter den getroffenen Annahmen, dass die Kurve $t \mapsto (f(t), g(t))$ eine Tangente besitzt, die parallel zur Gerade durch die Punkte $(f(a), g(a))$, $(f(b), g(b))$ ist.



8.2.3 Korollare des Mittelwertsatzes und Kurvendiskussion

Der Mittelwertsatz erlaubt es uns, bekannte Eigenschaften von Funktionen mittels der Ableitung zu charakterisieren.

Proposition 8.36. — *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall das nicht leer ist und nicht aus einem einzigen Punkt besteht. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$f' \geq 0 \iff f \text{ ist monoton wachsend}$$

Die Funktion f ist genau dann streng monoton wachsend, wenn es kein nichtleeres, offenes Intervall $J \subseteq I$ gibt mit $f'|_J = 0$.

Beweis. Angenommen f sei monoton wachsend. Dann gilt für jedes $x \in I$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

da für $h > 0$ auch $f(x+h) - f(x) \geq 0$ gilt. Ist umgekehrt f nicht monoton wachsend, so existieren zwei Punkte $x_1 < x_2$ in I mit $f(x_2) > f(x_1)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi \in [x_1, x_2]$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, woraus $f'(\xi) < 0$ folgt. Ist f monoton wachsend aber nicht streng monoton, so existieren $x_1 < x_2 \in I$ so, dass f auf dem Intervall $J = (x_1, x_2)$ konstant ist. Damit gilt dann $f'|_J = 0$. Existiert umgekehrt ein Intervall $J = (x_1, x_2)$ auf dem f' null ist, so folgt wegen $f'|_J \geq 0$ und $f'|_J \leq 0$ aus dem bereits gezeigten, dass $f|_J$ sowohl monoton steigend als auch monoton fallend ist. Also ist $f|_J$ konstant, und damit ist f nicht streng monoton. □

Korollar 8.37. — *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann konstant, wenn f differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.*

Beweis. Die Ableitung einer konstanten Funktion ist die Nullfunktion. Gilt umgekehrt $f' = 0$, also $f' \geq 0$ und $-f' \geq 0$, so ist nach Proposition 8.36 sowohl f als auch $-f$ monoton steigend, woraus folgt, dass f konstant ist. □

Übung 8.38. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Polynomfunktion ist, wenn f glatt ist und es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^{(n)} = 0$.

Definition 8.39. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heisst f **konvex**, falls für alle $a < b \in I$ und alle $t \in (0, 1)$ die Ungleichung

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \tag{8.7}$$

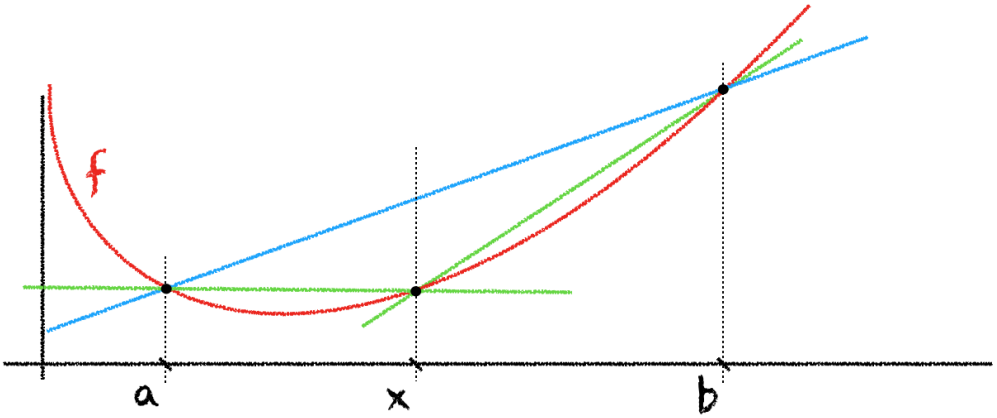
gilt. Wir sagen, dass f **streng konvex** ist, falls in (8.7) eine strikte Ungleichung gilt. Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst (**streng**) **konkav**, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist.

8.40. — Die Ungleichung (8.7) ist geometrisch folgendermassen zu verstehen: Sind $a < b$ Punkte im Definitionsbereich von f, dann liegt der Graph von f im Intervall $[a, b]$ unterhalb der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Konvexität kann man auch mittels Steigung von Sekanten charakterisieren. Nämlich ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex, wenn für alle $a < x < b \in I$ die Ungleichung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \tag{8.8}$$

gilt. Geometrisch bedeutet diese Ungleichung, dass die Steigung der Geraden durch die Punkte

$(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ kleiner ist, als die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(b, f(b))$.



Übung 8.41. — Zeigen Sie, dass die Ungleichung (8.7) für alle $t \in (0, 1)$ äquivalent zur Ungleichung (8.8) für alle $x \in (a, b)$ ist.

Proposition 8.42. — *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.*

Beweis. Angenommen f sei monoton wachsend. Für drei Punkte $a < x < b$ in I existieren nach dem Mittelwertsatz $\xi \in (a, x)$ und $\zeta \in (x, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Aus der Monotonie von f' folgt damit die Ungleichung (8.8). Ist f' streng monoton, so gilt $f(\xi) < f(\zeta)$, und wir erhalten (8.8) mit einer strikten Ungleichung.

Angenommen f ist konvex und $a < b$ sind zwei Punkte in I. Dann folgt aus (8.8), dass für alle genügend kleinen $h > 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq \frac{f(b-h) - f(a+h)}{(b-h) - (a+h)} \leq \frac{f(b) - f(b-h)}{h}, \tag{8.9}$$

gilt, woraus mit Grenzwertübergang $h \to 0$ die Ungleichung $f'(a) \leq f'(b)$ folgt. Falls f streng konvex ist so gelten in (8.9) strikte Ungleichungen. Für $h \to 0$ ist die linke Seite von (8.9) monoton fallend, und sie rechte Seite monoton steigend, womit nach Grenzübergang $f'(a) < f'(b)$ folgt. □

Übung 8.43. — Überprüfen Sie die letzten Aussagen im Beweis von Proposition 8.42. Ein alternativer Beweis davon ergibt sich durch folgende Überlegung: Ist f' nicht streng monoton, dann ist f' auf einem Intervall $J = (a, b)$ konstant. Auf diesem Intervall ist dann f durch eine affine Polynomfunktion gegeben, und also nicht streng konvex. Geben Sie die Details dazu.

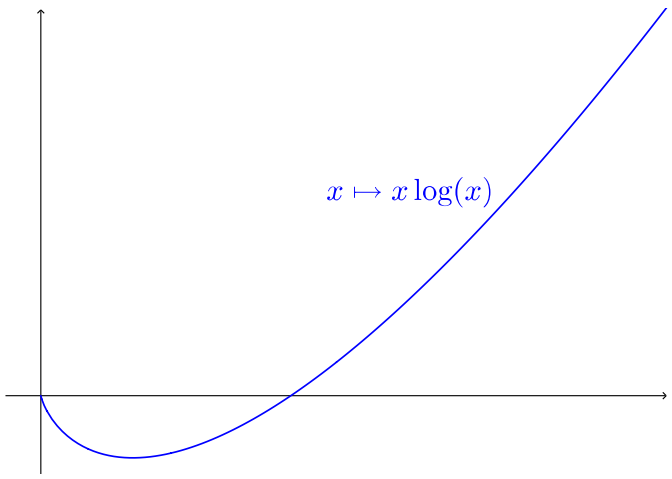
Korollar 8.44. — *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konvex. Falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex.*

Beweis. Ergibt sich aus Proposition 8.36 und Proposition 8.42. □

Übung 8.45. — Die Funktion $f : x \in (0, \infty) \mapsto x \log(x)$ ist streng konvex. Dies ergibt sich aus Korollar 8.44, da f glatt ist und

$$f'(x) = \log(x) + x\frac{1}{x} = \log(x) + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

für alle $x > 0$. Des Weiteren wissen wir bereits aus Beispiel 6.114, dass $\lim_{x\to 0} x \log(x) = 0$. Zuletzt bemerken wir, dass $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, was alles im Graphen von f ersichtlich ist.



Lemma 8.46 (Jensen'sche Ungleichung). — *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n t_k = 1$. Dann gilt*

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k). \tag{8.10}$$

Beweis. Wir verwenden Induktion über $n \geq 2$. Für $n = 1$ haben wir $\sum_{k=1}^1 t_k x_k = x_1$, $\sum_{k=1}^1 t_k f(x_k) = f(x_1)$ und (8.10) ist trivialerweise erfüllt. Für $n = 2$ ist (8.10) gerade (8.7) (mit $t_1 = 1 - t$ und $t_2 = t \in [0, 1]$). Angenommen die Aussage ist für $n \geq 2$ erfüllt. Seien $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ und $t_1, \ldots, t_{n+1} \in [0, 1]$. Falls $t_{n+1} = 0$ folgt (8.10) direkt aus der Annahme für n. Also angenommen $t_{n+1} > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n-1} t_k x_k + (t_n + t_{n+1})\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} t_k f(x_k) + (t_n + t_{n+1}) f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} t_k f(x_k) + (t_n + t_{n+1}) \left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} f(x_{n+1}) \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} t_k f(x_k)$$

per Induktionsannahme angewendet auf $x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{t_n}{t_n+t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n+t_{n+1}} x_{n+1}$ und Konvexität von f. □

Übung 8.47. — Zeigen Sie die Ungleichung

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

für das harmonische, das arithmetische und das geometrische Mittel von $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.

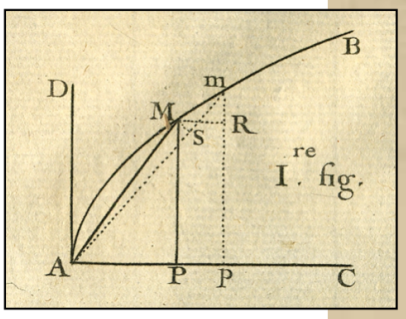
Übung 8.48. — Sei $\varphi : [0,1] \to I$ stetig und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, konvexe Funktion. Beweisen Sie die Integralform der Jensen'schen Ungleichung

$$f\left(\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 f(\varphi(t))dt.$$

Übung 8.49 (Minima von konvexen Funktionen). — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein (globales) Minimum ist.

8.2.4 Die Regel von l'Hôpital

Die Familie von Resultaten, zusammengefasst bekannt als *Regel von l'Hôpital (oder l'Hospital)*, ist benannt nach dem französischen Mathematiker und Adligen Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661–1704). Sie geht vermutlich auf Johann Bernoulli zurück, wurde aber von l'Hôpital in seinem Lehrbuch *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* publiziert. L'Hôpital's einflussreiches Buch war die erste systematische Behandlung der Infinitesimalrechnung. Seine Herangehensweise und Argumentation ist durch und durch geometrisch - l'Hôpital kennt weder einen strengen Grenzwertbegriff noch einen Begriff von Differenzierbarkeit.



DE'FINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en eſt appellée la
Fig. 1. *Différence.* Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ſes appliquées la droite *PM*; & ſoit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela poſé, ſi l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* ſera la difference de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour baſe l'arc *Mm*, ſera la différence du ſegment *AM*; & le petit eſpace *MPpm*, celle de l'eſpace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

COROLLAIRE.

1. IL eſt évident que la différence d'une quantité conſtante eſt nulle ou zero: ou (ce qui eſt la même choſe) que les quantités conſtantes n'ont point de différence.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puiſſe être conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui eſt la même choſe) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, leſquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par éxemple que la portion de courbe *Mm* & l'arc de cercle *MS* puiſſent être conſidérés comme des lignes droites à cauſe de leur infinie petiteſſe, en ſorte que le petit triangle *mSM* puiſſe être cenſé rectiligne.

Figur 8.2: Aus [Hos1715], Section I. L'Hôpital erklärt Differentiale, und dass die Ableitung einer konstanten Funktion Null ist. Anschliessend die Erklärung von Differnzierbarkeit.

SATZ 8.50 (Regel von de l'Hôpital). — *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Angenommen die folgenden Hypothesen sind erfüllt.*

1. *Die Funktionen f und g sind differenzierbar.*
2. *Es gilt $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
3. *Es gilt $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.*
4. *Der Grenzwert $A = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.*

Dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Beweis. Nach Hypothese (3) können wir f und g stetig auf $[a, b)$ fortsetzen, in dem wir $f(a) = g(a) = 0$ setzen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Hypothese (4) ein $\delta > 0$ so, dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

für alle $\xi \in (a, a + \xi)$ gilt. Für ein beliebiges $x \in (a, a + \delta)$ wenden wir den Mittelwertsatz 8.34 auf $[a, x]$ an und finden, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

für ein $\xi \in (a, x) \subseteq (a, a + \delta)$ gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war beweist dies den Satz. □

8.51. — Satz 8.50 ist eine von mehreren Versionen der Regel von l'Hôpital. Es ist insbesondere die Hypothese (3) die verschiedene Möglichkeiten bietet: Anstelle eines Grenzwertes $x \to a$ oder $x \to b$ kann man auch einen Grenzwert für $x \to -\infty$ oder $x \to \infty$ betrachten. Aussage und Beweis bleiben dabei essentiell gleich. Man kann alternativ auch annehmen, dass die Grenzwerte in (3) beides uneigentliche Grenzwerte sind, also zum Beispiel dass $\lim g(x) = \pm\infty$ und $\lim f(x) = \pm\infty$ mit beliebigen Vorzeichen gilt. Diese Fälle kann man auf die im Satz 8.50 angegeben Variante zurückführen, in dem man die Funktionen $\frac{1}{f}$ und $\frac{1}{g}$ betrachtet.

Übung 8.52. — Seien $a < b$ reelle Zahlen. Formulieren und beweisen Sie die Regel von l'Hôpital für den Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ gilt. Illustrieren Sie mit einem Beispiel.

Übung 8.53. — Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von l'Hôpital's Regel.

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^{-3} e^x$ (e) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\sqrt{\ln x}} \left(\sqrt{\ln x}\right)^x}{\sqrt{x}^{\ln x} (\ln x)^{\sqrt{x}}}$

Übung 8.54. — Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Angenommen $x_0 \in [a, b]$ ist ein Punkt, so dass f auf $[a, b] \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist und angenommen der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass f bei x_0 differenzierbar ist und dass f' bei x_0 stetig ist.

Übung 8.55. — Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie die Formel

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

für alle $x \in I$. Überprüfen Sie anhand der Vorzeichenfunktion $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$, dass die Existenz des obigen Grenzwerts nicht zweimalige Differenzierbarkeit impliziert.

8.3 Ableitung trigonometrischer Funktionen

In diesem Abschnitt studieren wir die Ableitung und Monotonieeigenschaften trigonometrischer Funktionen. Zukünftig werden wir die hier präsentierten Resultate meist ohne Referenz auf diesen Abschnitt verwenden.

8.3.1 Sinus und Arcussinus

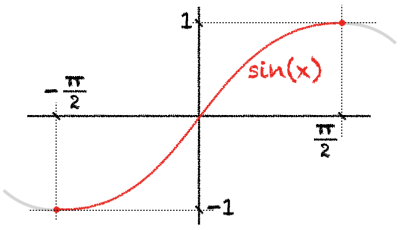
8.56. — Nach Übung 8.14 sind $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, und es gelten die Formeln

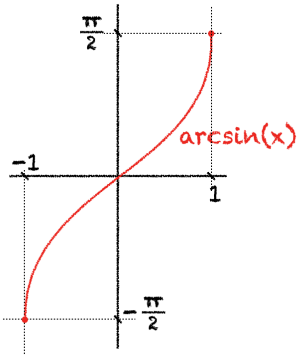
$$(\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

Nach Satz 7.77 und Übung 7.80 sind die Nullstellen von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Menge $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ und es gilt $\cos(0) = 1$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass $\cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt. Die Funktion

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \tag{8.11}$$

ist deshalb streng monoton steigend, und bijektiv, da $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ gilt. Die folgende Graphik zeigt den Graphen des eingeschränkten Sinus (8.11).





Die Einschränkte Sinusfunktion (8.11) besitzt demnach eine Umkehrfunktion, die wir mit

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

bezeichnen und **Arcussinus** nennen.

8.57. — Nach dem Satz 8.20 über die Differenzierbarkeit der inversen Funktion ist der Arcussinus bei s differenzierbar, falls die Ableitung des Sinus bei $x = \arcsin(s)$ nicht Null ist. In der Tat verschwindet die Ableitung des Sinus $\sin' = \cos$ genau an den Randpunkten $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ von $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $s = \sin(x)$ ergibt sich nach Satz 8.20

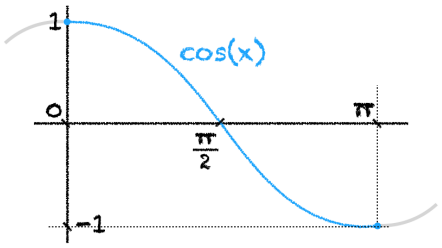
$$\arcsin'(s) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}},$$

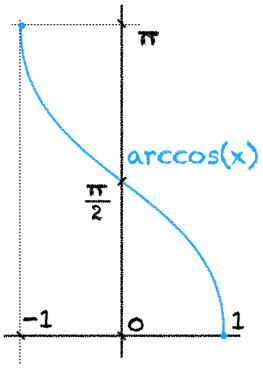
da $\cos(x)$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ positiv ist und somit $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2} = \sqrt{1 - s^2}$ unter Verwendung von $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

8.58. — Die Diskussion 8.56 über Monotonie des Sinus kann analog für den Cosinus durchgeführt werden. Es ergibt sich, dass der Cosinus bei 0 ein lokales Extremum annimmt, auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ konkav ist und auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ konvex (nach oben gekrümmt) ist. Insbesondere ist die Eingeschränkte Cosinusfunktion

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

bijektiv.





Die Umkehrabbildung heisst **Arcuscosinus** und wird als

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

geschrieben. Ebenso wie für den Arcussinus können wir die Ableitungsregeln für die Umkehrabbildung anwenden und erhalten bei $s = \cos(x)$ für $x \in (0, \pi)$

$$\arccos'(s) = \frac{1}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - s^2}},$$

da der Sinus auf $(0, \pi)$ positiv ist.

8.3.2 Tangens und Arcustangens

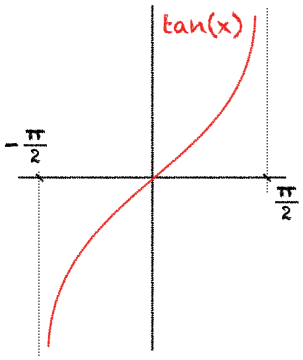
8.59. — Wir betrachten die Einschränkung $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ der Tangensfunktion. Mit der Quotientenregel in Korollar 8.17 ergibt sich

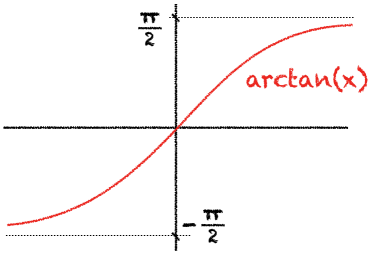
$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Insbesondere ist $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Des Weiteren gilt

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt damit, dass die Tangensfunktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.





Die Umkehrabbildung

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

wird als **Arcustangens** bezeichnet. Nach Satz 8.20 ist der Arkustangens differenzierbar und es gilt bei $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $s = \tan(x)$

$$\arctan'(s) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x).$$

Des Weiteren gilt

$$1 + s^2 = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Daraus folgt schlussendlich, dass für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\arctan'(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

gilt.

8.60. — Der Kotangens und seine Umkehrfunktion verhalten sich ähnliches. Die Einschränkung $\cot|_{(0,\pi)} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

wird **Arkuskotangens** genannt und hat die Ableitung

$$\operatorname{arccot}'(s) = -\frac{1}{1 + s^2}$$

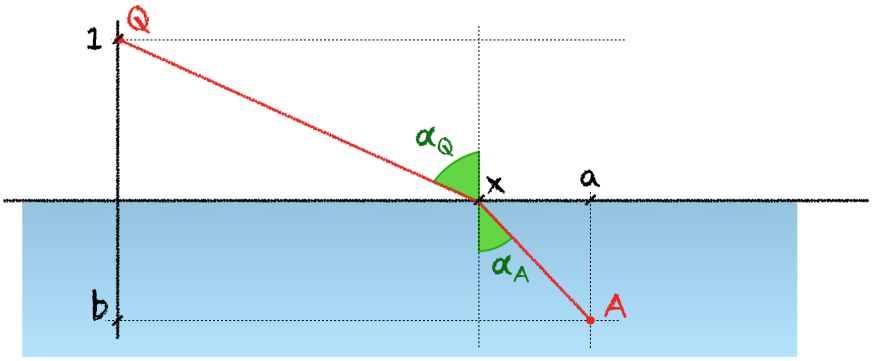
für alle $s \in \mathbb{R}$.

Beispiel 8.61 (Brechungsgesetz von Snellius). — Wir leiten das Brechungsgesetz von Snellius (1580-1624) der geometrischen Optik aus dem Fermat-Prinzip her. Das Fermat-Prinzip besagt, dass das Licht immer den Weg der kürzesten Reisezeit „wählt“. Gegeben sei eine

geradlinige Grenze zwischen Medien L = Luft und D = Diamant. Sei c_L und c_D die Lichtgeschwindigkeit in diesen beiden Medien unter Normbedingungen bei der Wellenlänge von $589nm$ - das ist sichtbares Licht im gelb-orangen Bereich. Diese Geschwindigkeiten sind cirka

$$c_L = 0.999708c \qquad \text{und} \qquad c_D = 0.414c$$

wobei $c = 299792458ms^{-1}$ die universelle Naturkonstante der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Wir wählen einen Punkt Q im Medium L als Lichtquelle und wollen den Weg, den das Licht zu einem Punkt A im Medium D nimmt, bestimmen.



Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die Grenze zwischen den beiden Medien genau die x-Achse und Q der Punkt $(1, 0)$ auf der positiven Hälfte der y-Achse ist, und $A = (a, b)$ mit $a > 0$ und $b < 0$ ist. Die Reisezeit des Lichts, das zuerst geradlinig von Q nach $(x, 0)$, dem Ort des Grenzübertritts, und dann nach Brechung von $(x, 0)$ nach A geht, ist durch

$$t(x) = \frac{1}{c_L}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{c_D}\sqrt{b^2+(a-x)^2}$$

gegeben. Die so beschriebene Funktion $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und die Abbildung ist durch

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{1+x^2}} - \frac{a-x}{c_2\sqrt{b^2+(a-x)^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Diese hat genau eine Nullstelle, bei der die Funktion t ihr Minimum annimmt. Ausgedrückt in Winkeln $\alpha_A = \arctan(x)$ und $\alpha_Q = \arctan((a-x)b^{-1})$ ist diese Nullstelle durch

$$\frac{x}{c_L\sqrt{1+x^2}} = \frac{a-x}{c_D\sqrt{b^2+(a-x)^2}} = 0 \iff \frac{\sin(\alpha_A)}{\sin(\alpha_Q)} = \frac{c_D}{c_L}$$

beschrieben. Die Gleichung, welche die Winkel α_A, α_Q und die Lichtgeschwindigkeiten c_1, c_2 in Verbindung bringt, wird das Brechungsgesetz von Snellius genannt.

Übung 8.62. — Beweisen Sie die alle Aussagen in Beispiel 8.61.

8.3.3 Hyperbolische Funktionen

Wir führen die analoge Diskussion für die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

durch.

8.63. — Es gilt $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist nach Proposition 8.36 der Sinus Hyperbolicus streng monoton wachsend. Da $\lim\limits_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ gilt, erhalten wir nach dem Zwischenwertsatz 4.57, dass

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die Umkehrabbildung

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

nennen wir den **Areasinus Hyperbolicus**. Nach dem Satz zur Differenzierbarkeit der inversen Funktion ist arsinh differenzierbar und es gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $s = \sinh(x)$

$$\operatorname{arsinh}'(s) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Der Areasinus Hyperbolicus besitzt im Gegensatz zu den Umkehrfunktionen arcsin, arccos und arctan eine geschlossene Form. In der Tat gilt

$$\operatorname{arsinh}(s) = \log\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, wobei man beachten sollte, dass der Ausdruck rechts für alle $s \in \mathbb{R}$ Sinn ergibt. Kurzes Nachrechnen ergibt für $s \in \mathbb{R}$ und $x = \log(s + \sqrt{1+s^2})$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{1+s^2} - \frac{1}{s + \sqrt{1+s^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{1+s^2} - \frac{s - \sqrt{1+s^2}}{s^2 - 1 - s^2}\right) = s$$

wie gewünscht.

8.64. — Der Kosinus Hyperbolicus erfüllt $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und $\cosh''(x) = \cosh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist der Kosinus Hyperbolicus streng konvex nach Korollar 8.44 und hat ein globales Minimum bei 0 nach Korollar 8.27. Für $x > 0$ gilt $\cosh'(x) > 0$ und somit ist cosh auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton wachsend. Da $\cosh(0) = 1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \cosh(x) = +\infty$, folgt, dass

$$\cosh : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$$

streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die Umkehrabbildung

$$\operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

wird der **Areakosinus Hyperbolicus** genannt, ist auf $\mathbb{R}_{>1}$ differenzierbar und erfüllt

$$\operatorname{arcosh}'(s) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$$

für $s > 1$ und $s = \cosh(x)$ mit $x > 0$. Des Weiteren gilt

$$\operatorname{arcosh}(s) = \log\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right)$$

für alle $s > 1$. Der Nachweis der obigen Eigenschaften des Areakosinus Hyperbolicus und der noch folgenden Eigenschaften überlassen wir Interessierten.

8.65. — Der **Areatangens Hyperbolicus** ist die Umkehrfunktion

$$\operatorname{artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{artanh}(x) = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

der streng monoton wachsenden Bijektion $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$. Nach dem Satz zur inversen Funktion 8.20 ist artanh differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{artanh}'(s) = \frac{1}{1 - s^2}$$

für alle $s \in (-1, 1)$.

Übung 8.66. — Überprüfen Sie alle in 8.63, 8.64 und 8.65 aufgestellten Behauptungen.

8.4 Erste Differentialgleichungen

Die Möglichkeit, Differentialgleichungen aufzustellen und zu lösen ist der Daseinsgrund der Analysis schlechthin. Differentialgleichungen beschreiben Probleme im gesamten Spektrum der Physik, und darüber hinaus. Thermodynamik, Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Hydrodynamik, et cetera, aber auch Baustatik, moderne Ökonomie oder Informationstechnologie wären ohne Differentialgleichungen nicht denkbar.

Wir wollen hier weder den Versuch unternehmen zu definieren was eine Differentialgleichung ist (eine gute allgemeine Definition gibt es sowieso nicht), noch systematisch Differentialgleichungen lösen, sondern anhand einiger konkreter Beispiele aufzeigen, um was es geht.

8.4.1 Stammfunktionen

8.67. — Das einfachste nichttriviale Differentialgleichungsproblem ist die Frage nach einer Stammfunktion. Gegeben sei eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir möchten wissen, alle differenzierbaren Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$ finden, für die

$$u' = g \tag{8.12}$$

gilt. Eine jede solche Funktion u, falls Sie existiert, nennen wir **Stammfunktion** von g. Eine Stammfunktion braucht allgemein weder zu existieren, noch eindeutig zu sein.

Übung 8.68. — Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Übung 8.69. — Wir betrachten die Menge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$. Beschreiben Sie die Menge aller differenzierbaren Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$ für die $u'(x) = x$ für alle $x \in D$ gilt.

8.70. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, das nicht nur aus einem isolierten Punkt besteht. Die Ableitung können wir als lineare Funktion

$$D : C^1(I) \longrightarrow C^0(I) \qquad u \mapsto D(u) = u'$$

auffassen. Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Stammfunktion von $g \in C^0(I)$ wird von diesem Standpunkt zu einem Problem in linearer Algebra: Wir müssen das Bild und den Kern von D bestimmen. Der Kern

$$\ker(D) = \{u \in C^1(I) \mid u' = 0\} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}_I$$

ist der eindimensionale Vektorraum $\mathbb{R}\mathbb{1}_I$ der konstanten Funktionen auf I nach Korollar 8.37. Der Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung 9.2, den wir im nächsten Kapitel beweisen, sagt aus dass die lineare Abbildung D surjektiv ist. Folglich ist die induzierte lineare

Abbildung

$$\overline{D} : C^1(I)/\mathbb{R}\mathbb{1}_I \longrightarrow C^0(I) \qquad [u] \mapsto \overline{D}([u]) = u'$$

bijektiv. Wir nennen die zu $\overline{D}$ inverse lineare Funktion das **unbestimmte Integral**. Zu gegebenem $g \in C^0(I)$ ist also das unbestimmte Integral von g ein Element des Quotientenraumes $\overline{D} : C^1(I)/\mathbb{R}\mathbb{1}_I$, also die Klasse einer Funktion $u \in C^1(I)$ modulo konstante Funktionen, mit der eigenschaft dass $u' = g$ gilt.

8.71. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, das nicht nur aus einem isolierten Punkt besteht, und $g \in C^0(I)$. Die übliche Schreibweise für das unbestimmte Integral von g ist

$$\int g(x)dx = u(x) + C \tag{8.13}$$

wobei C als unbestimmte konstante Funktion gelesen werden soll. Man bezeichnet C als **Integrationskonstante**. A priori hat die Notation (8.13) nichts mit dem Riemann Integral zu tun, und ist gleichbedeutend mit der Aussage $u' = g$.

Beispiel 8.72. — Es gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$\int x^s dx = \begin{cases} \frac{1}{s+1}x^{s+1} + C & \text{falls } s \neq -1 \\ \log|x| + C & \text{falls } s = -1 \end{cases}$$

nach Beispiel 8.21. Aus verschiedenen anderen Beispielen für Ableitungen erhalten wir

$$\int \exp(x)dx = \exp(x) + C \qquad \int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$$

Weitere spezielle unbestimmte Integrale findet man in Tafelwerken. Im nächsten Kapitel werden wir verschiedene Techniken zum Bestimmen von Stammfunktionen besprechen.

8.4.2 Grobe Klassifikation von Differentialgleichungen

Das Differentialgleichungsproblem für die Stammfunktion 8.67 lässt sich beliebig verkomplizieren. Wir zeigen ein paar in der Physik relevante Differentialgleichungsprobleme und führen allgemein gebräuchliche Terminologie ein.

8.73. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, das nicht nur aus einem isolierten Punkt besteht, und seien $f, g \in C^0(I)$. Wir möchten eine Funktion $u \in C^1(I)$ finden, für die

$$u'(x) + f(x)u(x) = g(x) \tag{8.14}$$

gilt. Dieses Differentialgleichungsproblem ist beispielsweise beim Modellieren von Populationswachstum oder von radioaktivem Zerfall relevant. Wir nennen (8.14) eine **inhomogene**, **lineare** Differentialgleichung erster **Ordnung**. Die Terminologie erklärt sich wie folgt: Linearität bezieht sich auf die linke Seite von (8.14) da diese einen linearen Ausdruck in u darstellt. Wir können wie für das Stammfunktionsproblem eine lineare Abbildung, nämlich

$$L : C^1(I) \longrightarrow C^0(I) \qquad\qquad u \mapsto L(u) = u' + fu$$

betrachten, und deren Kern und Bild studieren. Inhomogenität bezieht sich auf die rechte Seite von (8.14), wo eine Funktion g steht die a priori nicht Null ist. Für $g = 0$ würden wir von einer **homogenen** Differentialgleichung sprechen. Erster Ordnung bedeutet, dass in (8.14) nur eine erste Ableitung, und keine höheren Ableitungen von u vorkommen.

Beispiel 8.74. — Die **Bessel-Gleichung** mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung

$$x^2u''(x) + xu'(x) + (x^2 - \alpha^2)u(x) = 0$$

für die wir eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R})$ suchen. Die Bessel-Gleichung ist linear, homogen, zweiter Ordnung. Lösungen dieser Geleichung sind Bessel Funktionen, denen besonders in den Fällen $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $\alpha + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ physikalische Bedeutung zukommt. Sie beschreiben Wärmeleitung oder Wellen in einem zylinderförmigen Medium, und treten auch in der Quantenmachanik in der Lösung der radialen Schrödinger-Gleichung auf. Ein verwandtes Beispiel ist die **Airy-Gleichung**

$$u''(x) - \alpha^2 xu(x) = 0$$

Die Airy-Funktion ist eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung. Sie steht in Zusammenhang mit der Schrödinger Gleichung für ein Teilchen in einem dreiecksförmigen Potential.

8.75. — Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung, homogen oder inhomogen, sind allgemein schwer, aber nicht unmöglich zu lösen, sofern in so einer Gleichung

$$f_n(x)u^{(n)}(x) + \cdots + f_1(x)u'(x) + f_0(x)u(x) = g(x)$$

die Koeffizienten $f_0, f_1, \ldots, f_n \in C^0(I)$ nicht allzu pathologisch sind. Insbesondere wenn die Koeffizienten f_k Polynomfunktionen sind, so gibt es eine gut verstandene algebraische Theorie wie solche Differentialgleichungen zu lösen sind. Ein besonders einfacher, und trotzdem nützlicher Fall ist jener, in dem die Koeffizienten f_n Konstanten sind, also

$$a_nu^{(n)}(x) + \cdots + a_1u'(x) + a_0u(x) = g(x)$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$. Man spricht dann von einer linaren Differentialgleichung der Ordnung n mit **konstanten Koeffizienten**. Viele Differentialgleichungen aus der klassischen Mechanik sind dieser Art, etwa die Gleichung für eine gedämpfte Schwingung die wir in 8.87 ausführlich

besprechen.

8.76. — Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(x) + f(x)u(x) + g(x)u(x)^n = h(x)$$

für eine ganze Zahl $n \geq 2$ heisst **Bernoulli-Gleichung**. Sie ist nicht linear. Der Spezialfall $n = 2$ ist die **Ricatti-Gleichung** die oft als Beispiel für verschiedene Pathologien bei nichtlinearen Differentialgleichungen zitiert wird. Der Spezialfall davon mit $f = g = \pm 1$ und $n = 2$ ist die Logistische Differentialgleichung, deren Lösungen Sättigungsprozesse beschreiben. Weitere Beispiel für nichtlineare Differentialgleichungen sind die **Thomas–Fermi-Gleichung**

$$u''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} u(x)^{\frac{3}{2}}$$

aus der Quantenmechanik, oder für $\alpha > 0$ die **De Boer-Ludford-Gleichung**

$$u''(x) - xu(x) = 2u(x)|u(x)|^{\alpha}$$

aus der Plasmaphysik. Nichtlineare Differntialgleichungen sind allgemein sehr schwer zu lösen. Es gibt keine allgemeinen Techniken um solche Probleme anzugehen, weder praktisch noch in der Theorie. In der Industrie greift man deshalb oft auf numerische Methoden zurück.

8.77. — Wir haben bis jetzt nur von einzelnen Differentialgleichungen gesprochen. Es ist klar, dass man auch Systeme von Differentialgleichungen studieren kann und muss. Oft verlangt man von den Lösungen u einer Differentialgleichung auch noch, dass sie gewisse einfache Bedingungen wie $u(0) = 0$ oder $u'(0) = 1$ erfüllen. Diese nennt man **Randbedingungen**. Schliesslich bemerken wir, dass wir bis jetzt nur von Differentialgleichungen für Funktionen in einer Variablen gesprochen haben - sogenannten **gewöhnlichen** Differentialgleichungen. Viele Probleme in der Physik verlangen aber das betrachten von Funktionen in mehreren Variablen, die wir bezüglich jeder dieser Variablen ableiten können und damit sogenannte **partielle** Differentialgleichungen bilden können.

8.4.3 Lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Wir zeigen in diesem Abschnitt Rezepte, wie man lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, sowie homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen kann. Wir legen ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ fest, das nicht leer ist und nicht aus einem einzelnen Punkt besteht.

Lemma 8.78. — *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Die Lösungen $u : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung $u' + fu = 0$ sind genau die skalaren Vielfachen der Funktion $x \mapsto \exp(-F(x))$.*

Beweis. Sei $A \in \mathbb{R}$. Für die Funktion $u : x \mapsto A\exp(-F(x))$ gilt

$$u'(x) = A\exp(-F(x))(-F'(x)) = -f(x)A\exp(-F(x)) = -f(x)u(x)$$

für alle $x \in I$, und somit $u'(x)+f(x)u(x) = 0$. Sei nun $u \in C^1(I)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $u'(x)+f(x)u(x) = 0$. Wir definieren $v \in C^1(I)$ durch $v(x) = \exp(F(x))u(x)$ und berechnen

$$v'(x) = \exp(F(x))f(x)u(x) + \exp(F(x))u'(x) = \exp(F(x))(f(x)u(x) - f(x)u(x)) = 0$$

für alle $x \in I$. Daher ist auf Grund von Korollar 8.37 die Funktion v konstant, sagen wir mit Wert $A \in \mathbb{R}$, und es gilt $u(x) = A\exp(-F(x))$ für alle $x \in I$ wie gewünscht. □

8.79. — Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Angenommen $u_0 \in C^1(I)$ sei eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$u'(x) + f(x)u(x) = g(x). \tag{8.15}$$

Dann ist jede weitere Lösung u von (8.15) von der Form $u = u_0 + v$, wobei v die homogene Gleichung $v'(x) + f(x)v(x)$ erfüllt. Da wir homogene Gleichungen mit Lemma 8.78 lösen können, müssen wir nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (8.15) finden, um sie vollständig zu lösen. Ein nützlicher Trick, um eine Lösung von (8.15) zu finden, ist die **Variation der Konstanten**. Hierbei geht man davon aus, dass in der Lösung $v(x) = A\exp(-F(x))$ der homogenen Gleichung $A = A(x)$ eine differenzierbare Funktion der Variable x statt einer Konstante ist. Das heisst, wir setzen $v(x) = A(x)\exp(-F(x))$ für alle $x \in I$. Damit ergibt sich durch Nachrechnen

$$y'(x) + f(x)y(x) = A'(x)\exp(-F(x))$$

und wir wollen also $A'(x)\exp(-F(x)) = g(x)$ lösen. Dies führt zu $A'(x) = g(x)\exp(F(x))$ und

$$A(x) = \int g(x)\exp(F(x))dx + C$$

Zusammenfassend kann man also eine allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (8.15) durch

$$u(x) = A(x)\exp(-F(x)) = \exp(-F(x))\int g(x)\exp(F(x))dx + C\exp(-F(x))$$

angeben. Die Schwierigkeit in einem konkreten Fall wird also sein, Stammfunktionen F von f und A von $g(x)\exp(F(x))$ zu bestimmen.

Beispiel 8.80. — Wir möchten das Anfangswertproblem

$$u'(x) - 2xu(x) = \exp(x^2) \qquad u(0) = 1$$

auf $\mathbb{R}$ lösen. Der Diskussion 8.79 folgend setzen wir $f(x) = -2x$ und $g(x) = \exp(x^2)$, und wählen als Stammfunktion von f die Funktion $F(x) = -x^2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $v' - 2xv = 0$ ist somit $v = A\exp(x^2)$ für $A \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung zu finden, brauchen wir eine Stammfunktion $A(x)$ der Funktion $g(x)\exp(F(x)) = 1$. Wir setzen $A(x) = x$, womit eine spezielle Lösung durch $u_0(x) = A(x)v(x) = x\exp(x^2)$ gegeben ist. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung somit von der Form

$$u(x) = u_0(x) + Cv(x) = x\exp(x^2) + C\exp(x^2)$$

Unter Verwendung der Randbedingung $u(0) = 1$ erhalten wir $u(0) = A = 1$ und somit ist die eindeutig bestimmte Lösung des obigen Anfangswertproblems durch $u(x) = (x+1)\exp(x^2)$ gegeben.

Übung 8.81. — Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u' - \left(\tfrac{4}{x} + 1\right)u = x^4 \qquad u(1) = 1$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$.

8.82. — Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind empfindlich schwieriger zu lösen als Gleichungen erster Ordnung. Wir wollen den einfachsten Typ einer Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachten, nämlich lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir versuchen also alle $u \in C^2(I)$ zu bestimmen, für die

$$u'' + a_1u' + a_0u = g \tag{8.16}$$

für vorgegebene $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und $g \in C^0(I)$ gilt. Es empfiehlt sich, für die weitere Diskussion ein paar Beispiele zur homogenen Gleichung

$$u'' + a_1u' + a_0u = 0 \tag{8.17}$$

zu betrachten.

Beispiel 8.83. — Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung $u'' = 0$ sind genau die affinen Polynomfunktionen, also $u(x) = C_1x + c_2$. Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung $u'' - u' = 0$ sind genau die Funktionen der Form

$$u(x) = C_1 + C_2\exp(x)$$

für Konstanten C_1 und C_2. Lösungen der homogenen Differentialgleichung $u'' + u = 0$ sind genau die Funktionen der Form $u(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ für Konstanten C_1 und C_2. Falls wir komplexwertige Funktionen zulassen, so können wir auch Funktionen der Form

$$u(x) = D_1 \exp(ix) + D_2 \exp(-ix)$$

für komplexe Konstanten D_1 und D_2 als Lösungen der Differentialgleichung $u'' + u = 0$ betrachten.

Übung 8.84. — Überprüfen sie die in 8.83 gemachten Behauptungen.

8.85. — Obige Beispiele legen den Ansatz $u(x) = \exp(\alpha x)$ für eine komplexe Zahl α als Lösung der homogenen Differentialgleichung (8.17) nahe. Dabei müssen wir $\alpha \in \mathbb{C}$ derart wählen, dass

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = \alpha^2 u + a_1 \alpha u + a_0 u = 0$$

gilt. Mit anderen Worten muss α eine Nullstelle des sogenannten **charakteristischen Polynoms**

$$p(T) = T^2 + a_1 T + a_0$$

sein. Wir unterscheiden drei Fälle, je nach dem ob die Diskriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_0$ positiv, negativ oder Null ist.

Fall 1: $\Delta > 0$. In diesem Fall hat das charakteristische Polynom $p(T)$ zwei verschiedene reelle Wurzeln α und β. Die Funktionen $x \mapsto \exp(\alpha x)$ und $x \mapsto \exp(\beta x)$ sind damit reellwertig und linear unabhängig. Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (8.17) sind genau die Funktionen der Form

$$u(x) = C_1 \exp(\alpha x) + C_2 \exp(\beta x)$$

für reelle Konstanten C_1, C_2.

Fall 2: $\Delta < 0$. In diesem Fall hat das charakteristische Polynom $p(T)$ zwei verschiedene, zueinander konjugierte komplexe Wurzeln $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$. Die Funktion $x \mapsto \exp((\alpha + i\beta)x)$ ist eine komplexwertige Lösung von (8.17). Der Real- und Imaginärteil davon sind reellwertige Lösungen. Dies liefert die Lösungen

$$u(x) = C_1 \exp(\alpha x) \sin(\beta x) + C_2 \exp(\alpha x) \cos(\beta x)$$

von (8.17), für reelle Konstanten C_1, C_2.

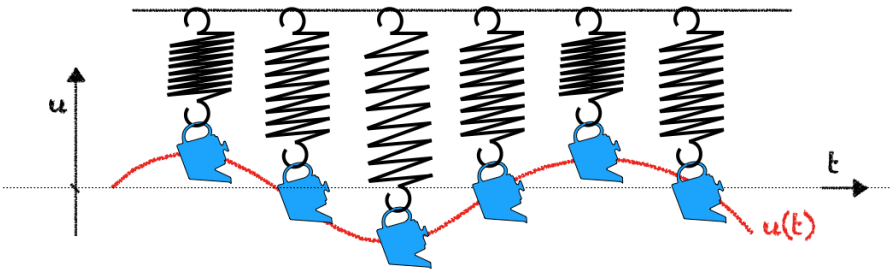
Fall 3: $\Delta = 0$. In diesem Fall hat das charakteristische Polynom $p(T)$ nur eine, reelle Nullstelle α. Damit ist schon einmal $x \mapsto \exp(\alpha x)$ eine Lösung von (8.17). Eine weitere, dazu linear unabhängige Lösung ist $x \mapsto x \exp(\alpha x)$, wie man direkt nachprüfen kann. Dies liefert die Lösungen

$$u(x) = C_1 \exp(\alpha x) + C_2 x \exp(\alpha x)$$

von (8.17), für reelle Konstanten C_1, C_2.

Übung 8.86. — Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung (8.17) auf $\mathbb{R}$ einen zweidinemsionalen linearen Unterraum von $C^2(I)$ bilden. Folgern Sie, dass die in 8.85 beschriebene Methode alle Lösungen von (8.17) liefert.

Beispiel 8.87. — Wir hängen ein Gewicht an eine Feder an, so dass es frei in vertikaler Richtung schwingen kann, und wollen die Position $u(t)$ des Gewichts als Funktion der Zeit t bestimmen. Das Koordinatensystem wählen wir so, dass $u = 0$ dem Gleichgewichtszustand entspricht, wo sich das Gewicht nicht bewegt. Nach den Newtonschen Grundgesetzen der Bewegung ist die zweite Ableitung u'' multipliziert mit der Masse m des Gewichts gleich der Kraft, die auf das Gewicht wirkt.



Eine Komponente dieser Kraft entsteht durch die Ausdehnung der Feder und orientiert sich in Richtung Ruhezustand. Nach dem Hookeschen Gesetz ist diese Kraft durch $-ku$ gegeben, wobei die reelle Zahl $k > 0$ Federkonstante genannt wird. Weiter wirken üblicherweise Reibungkräfte auf die Bewegung. Wir nehmen an, dass die entsprechende Krafteinwirkung durch $-du'$ gegeben ist, wobei $d \geq 0$ die Dämpfungskonstante ist. Die Differentialgleichung, die die Bewegung $u(t)$ der Masse beschreibt, ist somit $mu'' = -du' - ku$, oder

$$u'' + \frac{d}{m}u' + \frac{k}{m}u = 0$$

was also eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Wir setzen zur Vereinfachung der Notation $m = 1$. Das charakteristische Polynom obiger Differentialgleichung ist dann

$$p(T) = T^2 + dT + k$$

mit Diskriminante $\Delta = d^2 - 4k$. Falls $\Delta < 0$ gilt, also falls die Reibungskräfte im Vergleich zur Federstärke klein sind, erhalten wir ein als Lösung

$$u(t) = \exp\big(-\tfrac{d}{2}t\big)\big(A\sin(\gamma t) + B\cos(\gamma t)\big),$$

mit $\gamma = \sqrt{\left|\frac{d^2}{4} - k\right|}$. Die Konstanten A und B hängen von der Anfangsposition $u(0)$ und der Anfangsgschwindigkeit $u'(0)$ der Masse ab. Im Fall $d = 0$ ist die Schwingung ungedämpft, und u eine periodische Funktion. Falls die Reibung im Vergleich zur Federstärke gross ist und $\Delta > 0$ gilt, so verschwindet das oszillierende Verhalten, und das Gewicht bewegt sich monoton gegen seinen Ruhezustand. Solch ein Verhalten ist etwa bei einem Türschliess-Mechanismus erwünscht.

Kapitel 9

Die Ableitung und das Riemann Integral

In diesem Kapitel werden wir die Zusammenhänge zwischen dem Riemann Integral aus Kapitel 5 und der Ableitung aus Kapitel 8 untersuchen. Diese Zusammenhänge sind für die weitere Theorie von fundamentaler Bedeutung.

9.1 Der Fundamentalsatz

Wir legen für diesen Abschnitt ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ fest, das nicht leer ist und nicht aus einem einzelnen Punkt besteht. Integrierbar heisst Riemann-integrierbar.

9.1.1 Der Fundamentalsatz und Korollare

Definition 9.1. — Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst **lokal integrierbar** falls für alle $a < b \in I$ die eingeschränkte Funktion $f|_{[a,b]}$ integrierbar ist. Für $a, x \in I$ schreiben wir

$$\int_a^x f(t)dt = \begin{cases} \int_a^x f(t)dt & \text{falls } a < x, \text{ im Sinne von Definition 5.12} \\ 0 & \text{falls } a = x \\ -\int_x^a f(t)dt & \text{falls } a > x, \text{ im Sinne von Definition 5.12} \end{cases}$$

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, so nennen wir die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ein **partikuläres Integral** von f.

Satz 9.2. — *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei F ein partikuläre Integral von f. Falls f bei $x_0 \in I$ stetig ist, so ist F bei x_0 differenzierbar, und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wir verwenden dies in Kombination mit der Dreiecks-Ungleichung für das Integral, Satz 5.26, und der Intervalladditivität des Integrals. Für $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon dt \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Analog gilt für $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I$ die Abschätzung

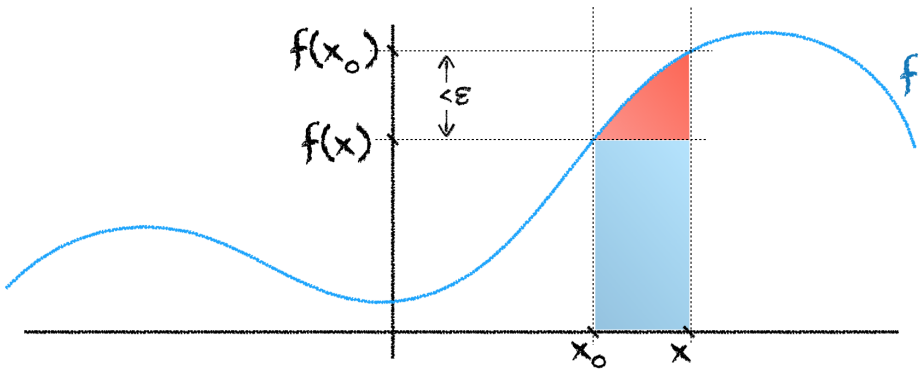
$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} (f(t) - f(x_0))dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

und damit den Satz. □

9.3. — Illustration 9.1 zeigt die essentielle Abschätzung im Beweis von Satz 9.2. Der Wert $F(x) - F(x_0)$ lässt sich schreiben als $f(x_0)(x - x_0)$ plus die Fläche in Rot, die kleiner ist als $\varepsilon(x - x_0)$. Somit ist $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$, bis auf einen Fehler kleiner als ε, durch $f(x_0)$ gegeben.



Figur 9.1

Satz 9.2, wie aufgestellt oder in Form von einem der nachfolgenden Korollare, ist als **Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung** bekannt und geht auf die Arbeiten von Leibniz, Newton und Barrow zurück, die weitgehend die Ausgangspunkte der Analysis

darstellen. Isaac Barrow (1630–1677) war Theologe, aber auch Physik- und Mathematikprofessor in Cambridge. Sein berühmtester Student ist Isaac Newton.

Korollar 9.4. — *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das partikuläre Integral von f eine Stammfunktion von f, und jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ von f hat die Form*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \tag{9.1}$$

für alle $x \in I$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Nach Satz 5.45 ist f integrierbar. Nach Satz 9.2 ist das partikuläre Integral

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

differenzierbar auf I und eine Stammfunktion von f. Da I ein Intervall ist unterscheidet sich nach Korollar 8.37 jede weitere Stammfunktion um eine Konstante von dieser. □

Korollar 9.5. — *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Nach Korollar 9.4 gilt (9.1). Setzen wir $x = a$ erhalten wir für die Konstante $C = F(a)$ und das Korollar folgt nun indem wir $x = b$ in (9.1) einsetzen. □

Korollar 9.6. — *Sei $F : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

Beweis. Die Funktion $F_0 : x \mapsto \int_a^x F'(t)dt$ ist nach Korollar 9.4 ebenso wie F eine Stammfunktion von F'. Nach Korollar 9.4 existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = F_0(x) + C$ für alle $x \in I$. Setzen wir $x = a$ ein, so erhalten wir daraus $F(a) = C$, und somit gilt

$$F(x) = F(a) + F_0(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

für alle $x \in [a, b]$, wie zu zeigen war. □

Übung 9.7. — Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und bei höchstens endlich vielen Punkten unstetig. Zeigen Sie, dass die durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für gegebene funktion $F : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, und bis auf endlich viele Ausnahmen bei allen Punkten $x \in I$ differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$.

Übung 9.8. — Zeigen Sie, dass alle obigen Resultate für komplexwertige Funktionen zutreffen.

Übung 9.9. — Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in (a, b)$ existiert mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Können Sie zwei verschiedene Beweise finden?

Übung 9.10. — Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, reellwertige Funktion deren Ableitung integrierbar ist. Zeigen Sie, dass $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$ für alle $x \in I$ gilt.

9.1.2 Ableiten und Integrieren von Potenzreihen

Wir wenden den Fundamentalsatz an, um zu zeigen, dass sich Potenzreihen nicht nur integrieren (siehe Satz 7.65), sondern auch ableiten lassen.

Korollar 9.11. — *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

für alle $x \in (-R, R)$, wobei die Potenzreihe rechts ebenfalls Konvergenzradius R hat.

Beweis. Sei $g(x)$ die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k + 1)c_{k+1}x^k$ und sei S der zugehörige Konvergenzradius. Nach Satz 7.57 ist g auf $(-S, S)$ stetig und nach Satz 7.65 darf $g(x)$ gliedweise integriert werden. Genauer gesagt besagt Satz 7.65, dass $G : (-S, S) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + 1)c_{k+1}}{k + 1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}x^{k+1}$$

wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius S darstellt. Nach Korollar 9.4 gilt weiters, dass G eine Stammfunktion von $g = G'$ darstellt. Da dies aber abgesehen vom ersten Glied der Reihe genau die Potenzreihe f ist, stimmen die Konvergenzradien $R = S$ überein, f ist differenzierbar und $f'(x) = G'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ für alle $x \in (-R, R)$. □

Übung 9.12. — Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie, dass $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ glatt ist und finden Sie eine Darstellung von $f^{(n)}$ durch eine Potenzreihe für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Übung 9.13. — Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten und positiven Konvergenzradien R_f, R_g. Sei $R = \min\{R_f, R_g\}$ und angenommen $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (-R, R)$. Zeigen Sie, dass dann $c_n = d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $R_f = R_g$ gilt.

Übung 9.14. — Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir wollen zeigen, dass

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $x \in (-1,1)$, wobei die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \notin \mathbb{N}$ die Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Konvergenzradius 1 hat.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von g und zeigen Sie, dass $f(x) = (1+x)^\alpha$ und $g(x)$ die Differentialgleichung

$$y' = \alpha \frac{y}{1+x}$$

erfüllen.

(c) Berechnen Sie die Ableitung von $\frac{g(x)}{f(x)}$ und schliessen Sie die Behauptung.

Beispiel 9.15. — Wir haben bereits in Beispiel 7.20 gesehen, dass die alternierende harmonische Reihe konvergiert, was auch aus dem Leibniz-Kriterium 7.23 folgt. Mit den Resultaten von Kapitel 7 konnten wir den Wert der Reihe aber nicht bestimmen. Nun können wir mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Integral- und Differentialrechnung die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$$

nachweisen. Wir beginnen hierfür mit

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

für alle $x \in (-1,1)$, wobei die Reihe rechts Konvergenzradius 1 hat. Nach Korollar 9.6 und Satz 7.65 folgt daraus die Identität

$$\log(1+x) = \log(1) + \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

für alle $x \in (-1,1)$. Da die Potenzreihe rechts auch für $x = 1$ konvergiert, ist die Funktion

$$f : x \in (-1,1] \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

nach dem Abelschen Grenzwertsatz (Satz 7.64) auch bei $x = 1$ stetig. Da die Funktion mit Definitionsbereich $(-1,1]$ definiert durch $\log(1+x)$ für $x \in (-1,1]$ ebenfalls stetig ist und für $x \in (-1,1)$ mit $f(x)$ übereinstimmt, ist

$$\log(2) = \lim_{x \nearrow 1} \log(1+x) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Beispiel 9.16. — Wir verwenden obige Methode nochmals, um

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \tag{9.2}$$

zu beweisen. Nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 7.23) ist die Reihe (9.2) konvergent. Wir beginnen die Berechnung ihres Wertes mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

für $x \in (-1,1)$. Nach Korollar 9.6 gilt

$$\arctan(x) = \arctan(0) + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Stetigkeit des Arkustangens bei $x = 1$, der Abelsche Grenzwertsatz 7.64 und die Identität $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ zeigen (9.2).

Manchmal führen obige Methoden zur Bestimmung eines unbestimmten Integrals einer Funktion zu keinem Ergebnis. Dies kann daran liegen, dass die gesuchte Stammfunktion sich nicht mit den bisher bekannten Funktionen ausdrücken lässt.

Beispiel 9.17 (Integralsinus). — Der **Integralsinus** ist die Stammfunktion $\mathrm{Si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der stetigen Funktion

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

mit der Normalisierung $\mathrm{Si}(0) = 0$. Er lässt sich als Potenzreihe schreiben, denn nach Satz 7.65 gilt

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 9.18 (Integralkosinus). — Der Integralkosinus $\mathrm{Ci} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Stammfunktion von $x \in (0, \infty) \mapsto \frac{\cos(x)}{x} \in \mathbb{R}$ mit der Normalisierung $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Ci}(x) = 0$.

Dabei möchten wir auf folgende Übung verweisen, die zeigt, dass der Integralkosinus so wohldefiniert ist.

Übung 9.19. — Sei F eine Stammfunktion von $x \in (0, \infty) \mapsto \frac{\cos(x)}{x} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existiert. Drücken Sie Ci als Summe einer Konstanten (der sogenannten Euler-Mascheroni Konstanten), der Logarithmusfunktion und einer Potenzreihe aus.

Unter Verwendung uneigentlicher Integrale werden wir später weitere wichtige Funktionen kennenlernen, die sich nicht in Termen bekannter Funktionen ausdrücken lassen – siehe zum Beispiel 9.50.

9.2 Integrationsmethoden

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir erinnern daran, dass die Notation

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bedeutet, dass F eine Stammfunktion von f ist. Im Ausdruck $F(x) + C$ wird C als eine unbestimmte Konstante gelesen - genannt **Integrationskonstante** . Da der Defintionsbereich I von f ein Intervall ist unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f um eine Konstante, was die Notation einigermassen sinnvoll macht. Man nennt $F(x) + C$ das **unbestimmte Integral** von f. Unbestimmte Integrale spezieller Funktionen findet man in Tafelwerken oder mittels Computeralgebrasystemen. In diesem Abschnitt zeigen wir allgemeine Methoden, um Stammfunktionen, oder eben unbestimmte Integrale, zu bestimmen.

9.20. — Wir legen für den gesamten Abschnitt 9.2 ein nichtleeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, das nicht nur aus einem isolierten Punkt besteht. Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, so sind alle Funktionen in diesem Abschnitt reellwertige Funktionen mit Definitionsbereich I, die auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq I$ integrierbar sind. Alle Resultate gelten analog für komplexwertige Funktionen, mit essentiell den selben Beweisen.

9.2.1 Partielle Integration

9.21. — Seien f und g Funktionen, a und b reelle Zahlen. Aus der Linearität der Ableitung folgt

$$\int af(x) + bg(x)dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx + C$$

Auf ähnliche Weise lassen sich prinzipiell jede Eigenschaft der Differentiation in eine Eigenschaft für unbestimmte Integrale übersetzen. Aus der Produktregel ergibt sich die partielle Integration.

9.22. — Seien f und g Funktionen mit Stammfunktionen F, beziehungsweise G. Aus der Produktregel für die Ableitung in Proposition 8.10 folgt $(FG)' = fG + Fg$. Als **partielle Integration** bezeichnet man die daraus folgende Identität

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx + C. \tag{9.3}$$

In der Leibniz-Notation ist $f = \frac{dF}{dx}$ und $g = \frac{dG}{dx}$. Deswegen schreibt man partielle Integration oft auch als

$$\int FdG = FG - \int GdF + C,$$

was als Kurzform der Formel (9.3) verstanden werden sollte.

Beispiel 9.23. — Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int x\exp(x)dx$. Dafür setzen wir $F(x) = x$ und $g(x) = \exp(x)$. Eine Stammfunktion von g ist $G(x) = \exp(x)$. Damit erhalten wir

$$\int x\exp(x)dx = x\exp(x) - \int 1\cdot\exp(x)dx + C = x\exp(x) - \exp(x) + C.$$

Wir bemerken, dass es genügt, in solchen Berechnungen nur eine Integrationskonstante C zu verwenden, da mehrere solche in eine einzige zusammengefasst werden können.

Beispiel 9.24. — Wir berechnen das Integral $\int \log(x)dx$. Sei $F(x) = \log(x)$ und $g(x) = 1$. Dann ist $G(x) = x$ eine Stammfunktion von g, womit wir

$$\int \log(x)\cdot 1dx = \log(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}xdx + C = x\log(x) - x + C.$$

erhalten. Dies kann man wiederum durch Ableiten verifizieren.

Übung 9.25. — Geben Sie eine rekursive Formel zur Berechnung der unbestimmten Integrale

$$\int x^n\exp(x)dx\,, \qquad \int x^n\sin(x)dx\,, \qquad \int x^n\cos(x)dx$$

für $n \in \mathbb{N}$ an.

Übung 9.26. — Berechnen Sie

$$\int x^s\log(x)dx\,, \qquad \int e^{ax}\sin(bx)dx$$

für alle $s, a, b \in \mathbb{R}$. Beachten Sie hierbei, dass der Fall $s = -1$ getrennt zu behandeln ist.

9.2.2 Substitution

9.27. — Sei J ein weiteres Intervall und sei $f : I \to J$ eine differenzierbare Funktion. Ist $G : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $g = G'$, so gilt nach der Kettenregel in Satz 8.15 gilt $G(f(x))' = g(f(x))f'(x)$ für alle $x \in I$. Daraus ergibt sich

$$\int (g\circ f)(x)f'(x)dx = G(f(x)) + C.$$

Die Funktion G ist eine Stammfunktion von g, es gilt also $G(u) = \int g(u)du$. Als **Substitutionsregel** bezeichnen wir die Identität

$$\int (g\circ f)(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)du + C \tag{9.4}$$

wobei $u = f(x)$. Die Substitutionsregel wird auch **Variablenwechsel** genannt, da man sozusagen die Variable u in $\int g(u)du$ durch $u = f(x)$ ersetzt hat.

Beispiel 9.28. — Mit $u = f(x) = 1 + x^2$ und also $f'(x) = 2x$ finden wir :

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}2xdx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\log|u| = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

Mit $u = f(x) = \frac{x}{2}$ und also $du = f'(x)dx = \frac{1}{2}dx$, sowie einer zweiten Substitution $v = \tan(u)$, $dv = \frac{1}{\cos(u)^2}du$ berechnen wir

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \int \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}dx = \int \frac{1}{\tan(u)\cos(u)^2}du =$$
$$= \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \log|v| + C = \log\left|\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Beispiel 9.29. — Wir möchten für fixes $r > 0$ das unbestimmte Integral $\int \sqrt{r^2 - x^2}dx$ berechnen. Auf Grund der trigonometrischen Identitäten $\sqrt{r^2 - r^2\sin(\theta)^2} = r\cos(\theta)$ bietet es sich an, die Funktion

$$f : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to (-r, r) \qquad\qquad f(\theta) = r\sin(\theta)$$

für die Substitution zu verwenden. Die Funktion f ist bijektiv, mit Umkehrfunktion $x \mapsto \arcsin(\frac{x}{r})$. Die Ableitung von f ist durch $f'(\theta) = r\cos\theta$ gegeben, und also auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ungleich 0. Gemeinsam mit dem Satz 8.20 über die Ableitung der inversen Funktion erhalten wir daraus

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int (r\cos(\theta))f'(\theta)d\theta = r^2\int \cos(\theta)^2 d\theta = r^2\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta$$
$$= \tfrac{r^2}{2}\left(\theta + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + C = \tfrac{r^2}{2}\arcsin\left(\tfrac{x}{r}\right) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + C,$$

wobei wir Winkelverdoppelungsformeln für $\cos(2\theta)$ und $\sin(2\theta)$ verwendet haben.

9.30. — Substitutionen wie in den Beispielen 9.28 und 9.29 nennt man **trigonometrische Substitutionen**. Wir werden bei diesen Berechnungen nicht immer so sorgfältig argumentieren und vielmehr der Leibniz Notation vertrauen, doch muss immer Invertierbarkeit der Funktion gegeben sein wenn wir die alte Variable durch die neue Variable ausdrücken. Für die folgende Auflistung der trigonometrischen Substitutionen sei $n \in \mathbb{Z}$.

- In Ausdrücken der Form $(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ für $a > 0$ führt wie bereits im obigen Beispiel oft die Substitution $x = a\sin(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zum Ziel, wobei sich damit $\mathrm{d}x = a\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ und $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a\cos(\theta)$ ergibt.
- In Ausdrücken der Form $(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}$ für $a > 0$ führt oft die Substitution $x = a\tan(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zum Ziel, wobei sich damit $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ und $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(\theta)}$ ergibt.
- Obwohl dies keine trigonometrische Substitution darstellt, bemerken wir noch Folgendes. Falls ein „einzelnes“ x vor dem Ausdruck $(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ oder dem Ausdruck $(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}$ steht, ist die Substitution $u = a^2 - x^2$ respektive $u = a^2 + x^2$ teilweise viel einfacher.

Beispiel 9.31 (Trigonometrische Substitution). — (i) Es gilt für $a > 0$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^3(\theta)}{a^3} a \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{a^2}\int \cos(\theta)d\theta = \tfrac{1}{a^2}\sin(\theta) + C$$
$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C,$$

wobei wir $x = a\tan(\theta)$, $\sqrt{a^2+x^2} = a\frac{1}{\cos(\theta)}$, $\mathrm{d}x = a\frac{1}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ verwendet haben. (Veranschaulichen Sie sich die Substitution und obige Identitäten in einem Bild.)

(ii) Es ist

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\tfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

wobei $u = 1-x^2$, $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$.

Beispielsweise lassen sich gewisse unbestimmte Integrale mit hyperbolischen Substitutionen berechnen. Sei $n \geq -1$. In Ausdrücken der Form $(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}$ für $a \in \mathbb{R}$ führt oft die Substitution $x = a\cosh(u)$ zum Ziel, wobei sich damit $\mathrm{d}x = a\sinh(u)\,\mathrm{d}u$ und $(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} = a\sinh(u)$ ergibt.

Beispiel 9.32. — Wir berechnen

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \sinh^2(u)\,\mathrm{d}u = \cosh(u)\sinh(u) - \int \cosh^2(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \cosh(u)\sinh(u) - \int \sinh^2(u) + 1\,\mathrm{d}u + C$$
$$= \cosh(u)\sinh(u) - u - \int \sinh^2(u)\,\mathrm{d}u + C,$$

wobei $x = \cosh(u)$ und $\mathrm{d}x = \sinh(u)\,\mathrm{d}u$. Nach Auflösen ergibt sich somit

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \sinh^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\cosh(u)\sinh(u) - u}{2} + C = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh}(x)}{2} + C.$$

Eine andere Methode, die wir hier kurz erwähnen möchten, ist die sogenannte Halbwinkelmethode (oder auch Weierstrass-Substitution). Diese ist dann nützlich, wenn man das Integral einer rationalen Funktion in $\cos(x)$ und $\sin(x)$ wie zum Beispiel $\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)+2017}$ in die Integration einer rationalen Funktion in $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ umwandeln möchte (siehe auch Beispiel 9.28).

Übung 9.33. — Wir möchten das unbestimmte Integral $\int \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ mit der Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ berechnen. Zeigen Sie dafür zuerst die Identitäten

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Zeigen Sie anschliessend, dass das obige Integral nach Substitution zu einem Integral einer rationalen Funktion in u wird und berechnen Sie es.

Manchmal führt man auch die eine oder die andere Substitution durch, weil in der zu integrierenden Funktion eine verschachtelte Funktion vorliegt und man einfach keine andere Methode zur Verfügung hat. Zum Beispiel bei dem Integral $\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ steht keine der erwähnten Methoden zur Verfügung, doch ist man versucht $u = \sqrt{x}$ zu setzen um zu sehen was sich daraus ergibt. Dies führt in der Tat zum Erfolg (wieso?). Ebenso in dem Integral der Form $\int \frac{1}{1+\exp(x)}\,\mathrm{d}x$ führt der Ansatz $u = \exp(x)$ zu einem unbestimmten Integral einer rationalen Funktion (wieso?).

9.2.3 Leibniz-Notation

9.34. — Wir werden immer wieder die Leibniz-Notation in der Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integrale verwenden. Diese Notation verpackt in einem natürlichen Formalismus partielle Integration

$$\int u dv = uv - \int v du + C$$

und Substitution

$$\int g(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int g(u)du \qquad \text{und} \qquad \int g(u(x))dx = \int g(u)\frac{dx}{du}du,$$

wobei wir in der zweiten Formulierung der Substitution vorraussetzen, dass $u : I \to J$ bijektiv mit nicht verschwindender Ableitung ist. Diese Hypothese erlaubt es, im linken Integral mit $1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ multiplizieren, und die erste Formulierung der Substitutionsregel anzuwenden. Wie wir gesehen haben, sind diese Regeln Umformulierungen der Produktregel für die Ableitung und der Kettenregel für die Ableitung, gemeinsam mit der Ableitungsregel für die inverse Abbildung.

9.35. — Bei konkreten Integralberechnungen verwenden wir mitunter auch Gleichungen, die $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}u$ miteinander verbinden. Zum Beispiel bei der trigonometrischen Substitution $x = a\sin\theta$ (für $x \in (-a, a)$ und $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) verwenden wir auch die Formel $\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, die formal gesehen keine Bedeutung hat (und deswegen auf keinen Fall in dieser Form in Beweisen auftreten sollte), doch eben im Zuge der Substitution in der Formulierung der Leibniz-Notation einen bequemen Zwischenschritt darstellt.

Übung 9.36 (Substitution für Riemann-integrierbare Funktionen). — Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ mit Endpunkten $a < b$ und $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist für jede Riemann-integrierbare Funktion $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ auch $t \in [a, b] \mapsto g \circ f(t)f'(t)$ Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b g \circ f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

9.2.4 Integration rationaler Funktionen

Eine Funktion der Form $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ für Polynome p und $q \neq 0$ nennt man **rationale Funktionen**. In diesem Abschnitt zeigen wir ein Verfahren um das unbestimmte Integral einer rationalen Funktione $f = \frac{p}{q}$ zu berechnen, auf einem Intervall I auf dem q keine Nullstellen hat. Durch Polynomdivision mit Rest können wir $f = \frac{p}{q}$ in die Form $f = g + \frac{r}{q}$ bringen, wobei g und r Polynome mit $\deg r < \deg q$ gilt. Die Polynomfunktion g ist einfach zu integrieren. Wir werden deshalb stets annehmen, dass der Grad von p kleiner als der Grad von q ist.

9.37. — Wir beginnen damit, einige elementare Rationale Funktionen zu integrieren. Sei a eine reelle Zahl, $a \neq I$, und sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \log|x-a| + C \tag{9.5}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \tag{9.6}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{9.7}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(a^2+x^2) + C \tag{9.8}$$

$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^n} dx = \frac{1}{2(1-n)}(a^2+x^2)^{1-n} + C \tag{9.9}$$

Die Integrale (9.5) und (9.6) berechnet man mit Substitution $u = x - a$, für (9.7) substituiert man $u = \frac{x}{a}$. Um (9.8) und (9.9) zu berechnen kann man $u = a^2 + x^2$ substituieren.

9.38. — Um eine allgemeine rationale Funktion zu integrieren, verwenden wir die sogenannte **Partialbruchzerlegung** rationaler Funktionen. Seien $p(T)$ und $q(T) \in \mathbb{R}[T]$ teilerfremde Polynome, mit $q \neq 0$ und $\deg p < \deg q$. Das Polynom q faktorisieren wir in $n \geq 0$ lineare und $m \geq 0$ quadratische Faktoren

$$q(T) = (T-a_1)^{k_1} \cdots (T-a_n)^{k_n} (T^2 + b_1 T + c_1)^{l_1} \cdots (T^2 + b_n T + c_m)^{l_m}$$

Die rationale Funktion $\frac{p(T)}{q(T)}$ kann, rein formal, eindeutig als Linearkombination von rationalen Funktionen der Form

$$\frac{1}{(T-a_i)^k}, \quad \frac{1}{(T^2+b_jT+c_j)^l}, \quad \frac{T}{(T^2+b_jT+c_j)^l}$$

mit $k \leq k_i$ beziehungsweise $l \leq l_j$ geschrieben werden.

Beispiel 9.39. — Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int \frac{x^4+1}{x^2(x+1)}\, dx$. Als erstes führen wir Division mit Rest durch

$$\frac{T^4+1}{T^3+T^2} = T - 1 + \frac{T^2+1}{T^2(T+1)}$$

Um die Partialbruchzerlegung von $\frac{T^2+1}{T^2(T+1)}$ zu erhalten, setzen wir

$$\frac{T^2+1}{T^2(T+1)} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T} + \frac{C}{T+1}$$

für noch unbekannte reelle Zahlen A, B, C. Um A, B, C zu bestimmen, multiplizieren wir mit $T^2(T+1)$, was

$$x^2 + 1 = A(T+1) + BT(T+1) + CT^2$$

liefert, und vergleichen Koeffizienten. Die Lösung des sich daraus ergebenden linearen Gleichungssystems ist $A = 1$, $B = -1$ und $C = 2$. Zusammenfassend gilt also

$$\frac{T^4+1}{T^2(T+1)} = T - 1 + \frac{1}{T^2} + \frac{-1}{T} + \frac{2}{T+1}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{x^2(x+1)}dx = \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x+1}dx \\ = \frac{x}{2} - x - \frac{1}{x} - \log|x| + 2\log|x+1| + C\end{aligned}$$

Beispiel 9.40. — Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$. Man beachte dabei, dass das Polynom x^2+2x+2 keine reellen Nullstellen hat. Für die Partialbruchzerlegung machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$$

Nun multiplizieren wir mit $x(x^2+2x+2)$ und erhalten

$$1 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)x.$$

Für $x = 0$ ergibt sich $A = \frac{1}{2}$. Daher ist

$$1 = (\tfrac{1}{2} + B)x^2 + (1+C)x + 1$$

und $B = -\frac{1}{2}$ und $C = -1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\log|x| - \tfrac{1}{2}\int \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\log|x| - \tfrac{1}{2}\int \frac{u+1}{u^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\log|x| - \tfrac{1}{4}\log|u^2+1| - \tfrac{1}{2}\arctan(u) + D \\ &= \tfrac{1}{2}\log|x| - \tfrac{1}{4}\log((x+1)^2+1) - \tfrac{1}{2}\arctan(x+1) + D,\end{aligned}$$

wobei wir $u = x + 1$ gesetzt haben und (9.8) und (9.9) verwendet haben.

In manchen Fällen kann obiges Verfahren auch auf das Integral $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$ führen, was wir mit der trigonometrischen Substitution $\tan(u) = \frac{x}{a}$ (siehe unten) behandeln können. Eine andere, allgemeinere Herangehensweise möchten wir in folgender Bemerkung für Interessierte behandeln.

9.41 (Integration rationaler Funktionen mit mehrfachen komplexen Nullstellen). — Wie oben schon bemerkt, kann man nach der Partialbruchzerlegung ein Integral einer rationalen Funktion auf die Integration von Ausdrücken der Form $\frac{1}{(x-a)^k}$ oder von $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und für Konstanten $a, A, B, b, c \in \mathbb{R}$ zurückführen, wobei die Polynome der Form $x^2 + bx + c$ keine rellen Nullstellen haben. Für die Berechnung eines Integrals des zweiten Typs mit $k > 1$ möchten wir hier einen Algorithmus erläutern, wobei wir uns auf den Fall $x^2 + bx + c = x^2 + 1$ beschränken (auf welchen man den allgemeinen Fall mit quadratischem Ergänzen zurückführen kann).

Seien also $k > 1$ und ein Polynom q von Grad kleiner als $2k$ gegeben. Dann ist das unbestimmte Integral $\int \frac{q(x)}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x$ immer von der Form

$$\frac{p(x)}{(x^2+1)^{k-1}} + \alpha \arctan(x) + \beta \log(x^2+1) + C. \tag{9.10}$$

für ein Polynom p von Grad kleiner $2k - 2$ und Konstanten α, β. Durch Ableiten, auf den gemeinsamen Nenner bringen und Vergleich der Koeffizienten lässt sich somit die Stammfunktion ermitteln.

Übung 9.42. — Wir möchten in dieser Übung den oben erklärten Algorithmus genauer erklären und beginnen mit einem konkreten Beispiel.

(i) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Sei nun $k > 1$ und q ein Polynom von Grad kleiner als $2k$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Ableitung von $\frac{p(x)}{(x^2+1)^{k-1}}$ für ein beliebiges Polynom p von Grad kleiner als $2k - 2$ durch

$$\frac{(x^2+1)p'(x) - 2(k-1)xp(x)}{(x^2+1)^k}$$

gegeben ist.

(iii) Berechnen Sie die Matrixdarstellung M der Abbildung

$$\phi : p(x) \mapsto (x^2+1)p'(x) - 2(k-1)xp(x)$$

bezüglich der Basis der Monome.

(iv) Schliessen Sie auf die Darstellung in (9.10), indem Sie zeigen, dass das Bild von ϕ zusammen mit $(x^2+1)^{k-1}$ und $2x(x^2+1)^{k-1}$ den Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich $2k-1$ aufspannt.

9.2.5 Bestimmte Integrale mit uneigentlichen Integrationsgrenzen

Wir haben bis jetzt nur Funktionen auf Kompakten Intervallen $[a,b]$ integriert. In diesem Abschnitt erweitern wir den Integralbegriff, um auch über das Riemann-Integral von Funktionen auf unbeschränkten und nicht unbedingt abgeschlossenen Intervallen, etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}dx$$

sprechen zu können. Alle obigen Regeln zur Berechnung von Stammfunktionen lassen sich nach dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung eins zu eins auch für das Riemann-Integral, welches im Gegensatz zum unbestimmten Integral auch das bestimmte Integral genannt wird, anwenden. Um ein bestimmtes Integral auszurechnen können wir also mit obigen Methoden zuerst das unbestimmte Integral berechnen und dann Korollar 9.5 zur Berechnung des Riemann-Integrals zu verwenden. Falls wir nur an einem einzigen bestimmten Integral interessiert sind, ist es oft einfacher, die Ausdrücke ausserhalb des Integrals so früh wie möglich zu berechnen.

9.43. — Sei f eine reellwertige Funktion. Wir benutzen im Folgenden die Notation

$$[f]_a^b = f(b) - f(a)$$

für beliebige Elemente a, b des Definitionsbereichs von f. Sind nun $a < b$ reelle Zahlen und u, v stetig differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Denn, ist F eine Stammfunktion von uv' und G eine Stammfunktion von $u'v$ ist, dann gilt $F(x) = u(x)v(x) - G(x) + C$ für alle $x \in [a,b]$ für eine gewisse Konstante C, wie man durch Ableiten überprüfen kann. Somit ist nach Korollar 9.5

$$\int_a^b uv'dx = [F]_a^b = [uv]_a^b - [G]_a^b + [C]_a^b = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx + 0.$$

wie behauptet. Bei einer Substitution in Abschnitt 9.2.2 müssen wir die Grenzen für ein Riemann-Integral enstsprechend der Substitution anpassen. Seien I und J Intervalle, $f : I \to J$ stetig differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ mit Endpunkten $a < b$ in I gilt dann

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

In der Tat, is G eine Stammfunktion von g auf J , dann ist nach der Kettenregel $G \circ f$ eine Stammfunktion der Funktion $(g \circ f)f' : I \to \mathbb{R}$. Nach Korollar 9.5 gilt also

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = [G \circ f]_a^b = [G]_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Die Annahme der Stetigkeit an g kann abgeschwächt werden.

Definition 9.44. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Setze $a = \inf(I)$ und $b = \sup(I)$ und wähle $x_0 \in I$. Wir definieren das **uneigentliche Integral** als die Summe von Grenzwerten

$$\int_a^b f(x)x = \lim_{x \to a} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x \to b} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

falls beide dieser Grenzwerte existieren. In dem Fall sagen wir auch, dass das uneigentliche Integral **konvergiert**. Ansonsten nennen wir das uneigentliche Integral **divergent**. Wir benutzen die üblichen Konventionen für die Symbole $-\infty$ und $+\infty$.

Beispiel 9.45. — Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 9.46. — Es gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{falls } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{falls } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Insbesondere ist das obige uneigentliche Integral genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$. In der Tat gilt

$$\int_1^b x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_1^b = \frac{1}{-\alpha+1}b^{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ [\log(x)]_1^b = \log(b) & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

und

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{-\alpha+1} b^{-\alpha+1} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha < 1 \\ 0 & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{b \to \infty} \log(b) = +\infty.$$

Übung 9.47. — Berechnen Sie $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ für $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beispiel 9.48. — Falls das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergiert, so können wir es als Grenzwert

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx \tag{9.11}$$

berechnen. Umgekehrt kann jedoch dieser Grenzwert existieren ohne dass das uneigentliche Integral konvergiert, zum Beispiel für die Funktion $f(x) = x^3$. Den Grenzwert (9.11), falls er existiert, nennt man **Cauchy-Haupwert**.

Lemma 9.49. — *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative, lokal integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mid b > a\right\}.$$

Beweis. Die Funktion $b \in [a, \infty) \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist monoton wachsend. Wenn das Supremum $S = \sup\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mid b > a\right\}$ Unendlich ist, dann divergiert das uneigentliche Integral auf Grund der Monotonie gegen Unendlich. Wenn $S < \infty$ ist, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $B > a$ mit

$$S - \varepsilon \leq \int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x \leq S.$$

Insbesondere gilt für $b > B$ auf Grund der Monotonie und der Definition von S dieselbe Ungleichung auch für $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dies beweist die Konvergenz des uneigentlichen Integrals. □

Beispiel 9.50. — Wir wollen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

besprechen, wobei die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ die *Gaussche Glockenkurve* genannt wird. Auf Grund von Lemma 9.49 reicht es aus eine „Majorantenfunktion“ zu finden, die ein konvergentes uneigentliches Integral definiert. Für $x \in [1, \infty)$ gilt zum Beispiel $x^2 \geq x$ und daher $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$, woraus

$$\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty$$

folgt. Dies zeigt die Konvergenz des zweiten uneigentlichen Integrals, auf Grund der Symmetrie der Funktion ist daher auch $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergent. Wir werden den Wert I dieses Integral erst im zweiten Semester berechnen können. Doch wollen wir noch erwähnen, dass die streng monoton wachsende Funktion

$$\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto I^{-1} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

die Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung $\frac{1}{\sqrt{2}}$ genannt wird. Diese Funktion lässt sich nicht durch die sonst üblichen Funktionen ausdrücken und ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Statstik und in vielen Anwendungen

von fundamentaler Bedeutung.

Satz 9.51 (Integraltest für Reihen). — *Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.

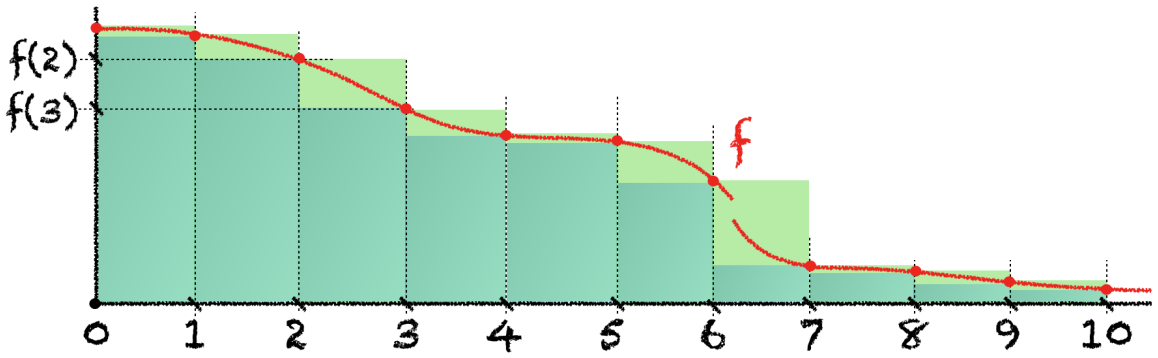
Beweis. Auf Grund der Monotonie von f ist, nach Satz 5.35, die Funktion f lokal integrierbar. Wir betrachten die Funktionen $u, o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$o(x) = f(\lfloor x \rfloor) \qquad \text{und} \qquad u(x) = f(\lceil x \rceil)$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ für die die Abrundungsfunktion, und für die $\lceil \cdot \rceil$ die Aufrundungsfunktion steht. Es gilt $u \leq f \leq o$, und damit für alle $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^{N} f(x)dx \leq \int_0^{N+1} f(x)dx \leq \int_0^{N+1} o(x)dx = \sum_{n=0}^{N} f(n),$$

was auch in folgendem Bild ersichtlich ist. Die Aussage des Satzes ergibt sich daraus mit Grenzübergang $N \to \infty$. □



Übung 9.52. — Verwenden Sie obigen Satz, um den p-Test in Beispiel 7.16 zu erhalten. Imitieren Sie die Methodik im Beweis von Satz 9.51, um die Divergenzrate

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log(N) + O(1)$$

für $N \to \infty$ für die harmonische Reihe zu beweisen.

Übung 9.53. — Entscheiden Sie für welche $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} x \sin(x^p)dx$ konvergiert.

Übung 9.54. — Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und beschränkt. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert und gleich dem Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist, wobei man f auf beliebige Weise auf den Punkt b erweitert.

Beispiel 9.55. — Wir berechnen das uneigentliche Integral $\int_0^1 \log(x)dx$ mittels

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x)dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \log(x)x &= \lim_{a\to 0}\left[x\log(x) - x\right]_a^1 \\ &= \lim_{a\to 0}(\log(1) - 1 - a\log(a) + a) = -1\end{aligned}$$

nach Beispiel 6.114.

Beispiel 9.56. — Wir betrachten das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$. Dieses ist uneigentlich, da $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \to 0$ unbeschränkt ist. Wir erhalten in diesem Fall

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0}\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0}\log(1) - \log(a) = +\infty.$$

Das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ divergiert, und wir können ihm den Wert $+\infty$ zuweisen.

Übung 9.57. — Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ und $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx$.

Übung 9.58. — Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige, lokal integrierbare Funktion. Wir nennen das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ **absolut konvergent**, falls $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergent ist. Zeigen Sie, dass absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^\infty f(x)dx$ auch die Konvergenz dieses Integrals impliziert.

9.2.6 Die Gamma-Funktion

9.59. — Die **Gamma-Funktion** Γ ist für $s \in (0, \infty)$ durch das konvergente uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx \tag{9.12}$$

definiert. Um zu überprüfen dass dieses uneigentliche Integral konvergiert untersuchen wir die Integrationsgrenzen 0 und ∞ getrennt. Für $0 < a < b$ finden wir

$$\int_a^b x^{s-1}\exp(-x)dx = \tfrac{1}{s}\left[x^s\exp(-x)\right]_a^b + \tfrac{1}{s}\int_a^b x^s\exp(-x)dx. \tag{9.13}$$

mit partieller Integration. Wir erhalten

$$\int_0^b x^{s-1}\exp(-x)dx = \lim_{a\to 0}\left(\tfrac{1}{s}\left[x^s\exp(-x)\right]_a^b + \tfrac{1}{s}\int_a^b x^s\exp(-x)dx\right) =$$

$$= \tfrac{1}{s} b^s \exp(-b) + \frac{1}{s} \int_0^b x^s \exp(-x) dx,$$

wobei das Integral rechts ein eigentliches Riemann-Integral darstellt. Um die obere Integrationsgrenze zu untersuchen bemerken wir, dass ein $R > 0$ existiert, derart, dass $\exp(x) > x^{s+2}$ für alle $x > R$ gilt. Damit erhalten wir

$$\int_0^\infty x^s \exp(-x) dx \leq \int_0^R x^s \exp(-x) dx + \int_R^\infty x^{-2} dx < \infty$$

was zeigt, dass (9.13) auch unter Grenzwertübergang $b \to \infty$ konvergiert. Konkret erhalten wir

$$\int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x) dx = \lim_{b \to \infty} \left(\tfrac{1}{s} b^s \exp(-b) + \frac{1}{s} \int_0^b x^s \exp(-x) dx \right) = \frac{1}{s} \int_0^\infty x^s \exp(-x) dx.$$

Dies zeigt, dass die Gamma-Funktion die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{9.14}$$

für alle $s \in (0, \infty)$ erfüllt.

9.60. — Die Gamma-Funktion interpoliert die Fakultätsfunktion auf $\mathbb{N}$. In der Tat gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 \exp(-x) dx = \exp(0) - \lim_{x \to \infty} \exp(-x) = 1$$

und damit

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6 \end{aligned}$$

und also $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion. Es ist im Moment noch nicht klar, ob die Gamma-Funktion stetig ist. Es wird sich herausstellen, dass Γ sogar glatt ist. Auch können wir beispielsweise den Wert $\Gamma(\frac{1}{2})$ mit den uns bis jetzt bekannten Integrationsmethoden nicht berechnen, werden jedoch später mittels einem zweidimensionalen Integral sehen, dass dieser $\sqrt{\pi}$ ist.

Übung 9.61. — Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ definiert man

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx. \tag{9.15}$$

Überprüfen Sie, dass das Integral 9.15 für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ konvergiert. Zeigen Sie dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{9.16}$$

gilt. Verwenden Sie anschliessend die Funktionalgleichung um für ganze Zahlen n rekursiv $\Gamma(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ mit $\mathrm{Re}(z) > n$ zu definieren, so dass schliesslich $\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ definiert ist, und (9.16) auf dem ganzen Definitionsbereich erfüllt.

9.62. — David Hilbert (1862–1943) verwendete in seinem Artikel [Hil1893] von 1893 uneigentliche Integrale im Stile der Gamma-Funktion, um zu beweisen, dass e (wie erstmals von Hermite in 1873 bewiesen) und π (wie erstmals von Lindemann 1882 bewiesen) transzendent sind. Wir bemerken dabei, dass sich die blosse Irrationalität dieser Zahlen deutlich einfacher beweisen lässt. Transzendenzbeweise sind im Allgemeinen deutlich schwieriger. Wie schwierige derartige Aussagen tatsächlich sind, illustriert vielleicht die Tatsache, dass immer noch nicht bekannt ist, ob $e+\pi$ eine transzendente Zahl ist oder nicht. Hilbert's Beweis der Transzendenz von e und π ist mit den uns bisher bekannten Hilfsmitteln allerdings gut lesbar, weswegen wir Ihnen einen Blick auf diese Lektüre und die damit verbundene Zeitreise empfehlen möchten.

9.3 Taylorreihen

9.3.1 Taylor Approximation

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer reellwertigen differenzierbaren Funktio n f auf einem Intervall gibt die Steigung der Tangente des Graphen von f bei x_0 an. Die entsprechende affine Funktion

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

approximiert die Funktion f bis auf einen Fehler $f(x) - y(x) = o(x - x_0)$ für $x \to x_0$. Die Güte der Approximation kann erhöht werden, indem man statt affine Approximationen höhere polynomiale Approximationen betrachtet.

9.63. — Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $f : D \to \mathbb{C}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Die n-te **Taylor-Approximation** von f um einen Punkt $x_0 \in D$ ist die Polynomfunktion

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{9.17}$$

Die Koeffizienten wurden dabei gerade so gewählt, dass $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt. Falls f glatt ist, dann ist die **Taylorreihe** von f um $x_0 \in D$ definiert als die Potenzreihe

$$L(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} T^k. \tag{9.18}$$

Ist R der Konvergenzradius dieser Reihe, so konvergiert nach Satz 7.57 die Reihe reeller Zahlen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{9.19}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Abstand kleiner R von x_0 und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > R$. Oft nennt man auch die Reihe (9.19) **Taylorreihe**.

Satz 9.64 (Taylor-Approximation). — *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes, Intervall und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in D$. Dann gilt für alle $x \in D$*

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt, \tag{9.20}$$

wobei P_n die in (9.17) *definierte n-te Taylor-Approximation von f ist.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich mit Induktion über n und partieller Integration. Ist $n = 0$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt nach Korollar 9.6

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = P_0(x) + \int_{x_0}^{x} f^{(1)}(t)dt.$$

Ist f zweimal stetig differenzierbar, so können wir auf obiges Integral partielle Integration mit $u(t) = f'(t)$ und $v(t) = t - x$ anwenden und erhalten

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)dt = P_1(x) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\frac{(x-t)^1}{1!}dt.$$

Wir sehen also wie sich ausgehend vom Fundamentalsatz mittels partieller Integration der nächste Fall des Satzes ergibt. Angenommen die Aussage des Satzes stimmt für $n - 1 \geq 0$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt auf Grund der Induktionsvorraussetzung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

für alle $x \in D$. Wir setzen $u(t) = f^{(n)}(t)$ und $v(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$, bemerken $v'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ und wenden partielle Integration an, um

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - \left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

zu erhalten. Dies beweist den Induktionsschritt und damit den Satz. □

9.65. — Der Satz gilt auch für Funktionen auf halboffenen Intervallen $[x_0, a)$ oder $(a, x_0]$, mit demselben Beweis. Das Integral in der Formel 9.20 nennt man **Restglied**. Die Annahme im Satz, dass f eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion ist, ist essentiell, denn damit ist $f^{(n+1)}$ eine stetige Funktion, und das Integral der stetigen Funktion $t \mapsto f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$ existiert.

Korollar 9.66 (Taylor-Abschätzung). — *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{C}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und seien $x_0, x \in D$ zwei Punkte. Wir setzen $M_{n+1} = \max\left\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x\right\}$. Dann gilt*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Insbesondere ist $f(x) - P_n(x) = O((x - x_0)^{n+1})$ für $x \to x_0$.

Beweis. Schreibe $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Die Fälle $x \leq x_0$ und $x \geq x_0$ können essentiell geich behandelt werden, also nehmen wir an es gelte $x \geq x_0$. Dann gilt

$$|R_n(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f^{(n+1)}(t)|\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq \frac{M_{n+1}}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt$$

$$= \frac{M_{n+1}}{n!}\left[-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{M_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

wie behauptet. □

9.67. — Wir hätten andere Versionen des obigen Satz zu Taylor-Approximationen bereits in Abschnitt 8.2 für reellwertige Funktionen beweisen können. Dies sogar unter der etwas schwächeren Annahme an die $(n+1)$-te Ableitung, dass diese bloss zwischen x_0 und x existieren soll und nicht unbedingt stetig sein muss. Unter dieser Voraussetzung gibt es ein ξ_C zwischen x_0 und x, so dass das sogenannte **Restglied nach Cauchy** durch

$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_C)(x-\xi_C)^n(x-x_0)$$

gegeben ist. Es gibt unter denselben Voraussetzungen auch ein ξ_L zwischen x_0 und x, so dass das **Restglied nach Lagrange** durch

$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_L)(x-x_0)^{n+1}$$

gegeben ist. Wir verweisen dafür auf folgende Übung.

Übung 9.68. — Gegeben sei ein nicht-leeres Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$, Zahlen $x, x_0 \in (a,b)$ und eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion

$$F : t \in (a,b) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

durch $t \in (a,b) \mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$ gegeben ist.

(b) Wenden Sie den Mittelwertsatz 8.30 auf die obige Funktion F an, um die Formel $R^f_{x_0,n}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_C)(x-\xi_C)^n(x-x_0)$ für das Restglied nach Cauchy zu beweisen.

(c) Verwenden Sie den Mittelwertsatz 8.34 für obiges F und die Funktion $g : t \mapsto (x-t)^{n+1}$, um die Formel $R^f_{x_0,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_L)(x-x_0)^{n+1}$ für das Restglied nach Lagrange zu beweisen.

Beispiel 9.69. — Wir können die Taylor-Approximation verwenden um die Diskussion in Abschnitt 8.2.1 und Korollar 8.27 zu verfeinern. Sei $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, nicht-leeres Intervall und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Angenommen $x_0 \in (a,b)$ erfüllt

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Dann gelten folgende Implikationen.

- Falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist und n gerade ist, so nimmt f in x_0 ein lokales Maximum an.
- Falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist und n gerade ist, so nimmt f in x_0 ein lokales Minimum an.
- Falls $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und n ungerade ist, so ist x_0 kein lokales Extremum von f.

Alle drei Aussagen folgen aus der Taylor-Approximation in Theorem 9.64, die in diesem Fall für $x \in (a, b)$ die Form

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

annimmt. Falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f^{(n)}(t) > 0$ für alle $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wir betrachten nun mehrere Fälle. Ist $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, so ist obiges Integral positiv und damit $f(x) > f(x_0)$. Ist $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $n - 1$ gerade, so ist obiges Integral (auf Grund der umgekehrten Reihenfolge der Integrationsgrenzen) negativ, womit $f(x) < f(x_0)$ gilt und x_0 kein lokales Extremum von f ist. Ist hingegen $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $n - 1$ ungerade, so ergibt sich auf dieselbe Weise $f(x) > f(x_0)$, womit f ein lokales Minimum in x_0 annimmt. Für $f^{(n)}(x_0) < 0$ können wir obige Diskussion auf $-f$ anwenden.

Applet 9.70 (Taylor-Approximationen)**.** *Wir stellen einige Taylor-Approximationen bei verschiebbaren Fusspunkten zu bekannten Funktionen dar.*

9.3.2 Analytische Funktionen

Definition 9.71. — Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren von I. Eine glatte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *analytisch* bei x_0 falls ein $\delta > 0$ existiert, derart, dass die Taylor-Reihe von f um x_0 einen Konvergenzradius $> \delta$ hat, und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ gilt. Wir sagen f sei analytisch auf I falls f analytisch in jedem Punkt von I ist.

9.72. — Analytische Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind also dadurch charakterisiert, dass es zu jedem Punkt x_0 im Inneren von I eine Potenzreihe gibt, die in einer Umgebung von x_0 gegen f konvergiert. Eine Abschätzung, die garantiert dass die Taylorreihe von f im Punkt x_0 gegen f konvergiert ist, dass für ein $\delta > 0$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f^{(n+1)}(x)| \leq cA^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und zwei Konstanten $c, A \geq 1$ gilt. Eine Abschätzung dieser Art findet man beispielsweise für $\exp, \sin, \cos$ und Kombinationen dieser Funktionen.

Beispiel 9.73. — Wir betrachten die Funktion

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases},$$

die nach Beispiel 8.23 glatt ist und $\psi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Die Taylorreihe der Funktinon ψ im Punkt $x_0 = 0$ ist also die Nullreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}(x - x_0)^n$$

mit unendlichem Konvergenzradius, die gegen die Funktion 0 konvergiert. Da $\psi(x) > 0$ für alle $x > 0$ gilt, konvergiert die Taylorreihe in keiner noch so kleinen Umbebung von 0 gegen ψ, und also ist ψ nicht analytisch im Punkt $x_0 = 0$.

Übung 9.74. — Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, derart, dass Konstanten $c, A \geq 1$ mit

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq cA^n \qquad \text{für alle } x \in [a, b] \tag{9.21}$$

existieren. Zeigen Sie, dass f analytisch auf (a, b) ist.

1. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\exp, \sin, \sinh$ die Eigenschaft (9.21) besitzen.
2. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen sind die (9.21) erfüllen. Zeigen Sie, dass auch $f + g$ und $f \cdot g$ diese Eigenschaft haben.

Übung 9.75. — Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$, wobei für $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

9.76. — Analytische Funktionen haben im Zusammenhang mit „holomorphen Funktionen“ auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ eine schöne, geschlossene Behandlung, die in der Vorlesung „Funktionentheorie“ im zweiten Studienjahr thematisiert wird. Der komplexe Blickwinkel erklärt zum Beispiel, warum die analytische Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ bei $x_0 = 0$ eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 1 besitzt, obwohl die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

9.3.3 Das Newton-Verfahren

Als Anwendung von Theorem 9.64 diskutieren wir das Newton-Verfahren zur numerischen Berechnung einer Nullstelle einer gegebenen Funktion.

9.77. — Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Insbesondere ist f streng Monoton wachsend. Angenommen es gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es auf Grund des Zwischenwertsatzes 4.57 ein eindeutiges $z \in I$ mit $f(z) = 0$. Beginnend mit einem gewählten Punkt $x_0 \in [a, b]$ definieren wir rekursiv $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch

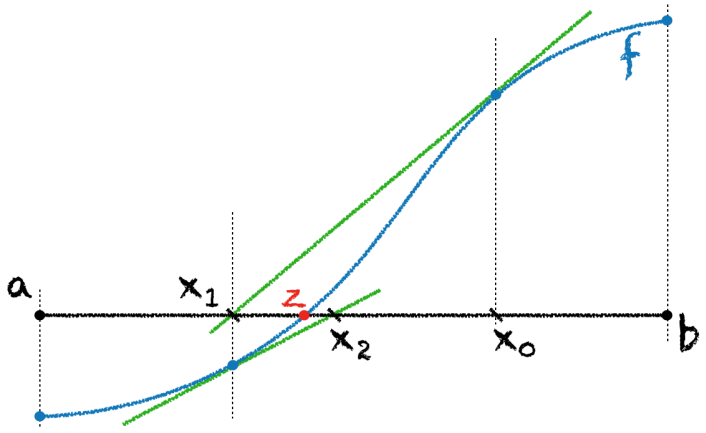
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{9.22}$$

falls $x_n \in [a, b]$. Falls $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $[a, b]$. Falls diese Folge konvergiert, dann ist ihr Grenzwert die Nullstelle von f. In der Tat, ist z der Grenzwert von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, so gilt

$$z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

und somit $f(z) = 0$. Unter geeigneten Voraussetzungen ist die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ wohldefiniert und konvergiert sehr rasch gegen z.

9.78. — Die geometrische Interpretation der Rekurrenzformel (9.22) ist die folgende: In einem ersten Schritt approximiert man die Nullstelle von f durch eine grobe Abschätzung x_0. Der Punkt x_1 ist dann der Schnittpunkt der Tangente an f im Punkt $f(x_0)$ mit der x-Achse. Unter geeigneten Voraussetzungen liegt x_1 näher an der Nullstelle von f als x_0. Im nächsten Schritt definiert man x_2 als Schnittpunkt der Tangente an f im Punkt $f(x_1)$ mit der x-Achse, und so fort.



9.79. — Das Konvergenzverhalten der Folge $(x_n)_n$ ist im Allgemeinen sehr chaotisch. Unter etwas stärkeren Annahmen können wir zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und

die Konvergenzgeschwindigkeit untersuchen. Wir nehmen zusätzlich an, dass f zweimal stetig differenzierbar ist und definieren

$$M = \max\left\{|f''(t)| \mid t \in [a,b]\right\} \qquad \text{und} \qquad m = \min\left\{|f'(t)| \mid t \in [a,b]\right\}$$

Nun wenden wir Korollar 9.66 an, um den Fehlerterm $R_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ bei der Approximation von f durch die Tangente an $f(x_0)$ abzuschätzen. Bei der Nullstelle z von f ergibt dies

$$|R_1(z)| \leq \frac{M|z - x_0|^2}{2} \tag{9.23}$$

Des Weiteren gilt $0 = f(z) = f(x_0) + f'(x_0)(z - x_0) + R_1(z)$ per Definition. Dividieren wir diese Gleichung durch $f'(x_0)$ so erhalten wir

$$0 = z - x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{R_1(z)}{f'(x_0)} = z - x_1 + \frac{R_1(z)}{f'(x_0)}.$$

Mit der Abschätzung (9.23) ergibt dies

$$|x_1 - z| = \left|\frac{R_1(z)}{f'(x_0)}\right| \leq \tfrac{M}{2m}|x_0 - z|^2 \tag{9.24}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass $\varepsilon < \frac{m}{M}$ und $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq [a,b]$ gilt, und wähle $x_0 \in [a,b]$ mit $|x_0 - z| < \varepsilon$. Dann folgt aus (9.24) die Abschätzung

$$|x_1 - z| \leq \tfrac{M}{2m}\,|x_0 - z|^2 \leq \tfrac{M}{2m}\,|x_0 - z|\varepsilon \leq \tfrac{1}{2}|x_0 - z| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher liegt x_1 auch in $[a,b]$ und ist bereits näher an z als x_0. Analog beweist man, dass $|x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2}\,|x_n - z|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, was mit vollständiger Induktion auch

$$|x_n - z| \leq 2^{-n}|x_0 - z|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigt. Insbesondere konvergiert die Folge $(x_n)_n$ und wir können das Newton-Verfahren verwenden, um die Nullstelle mit hoher Genauigkeit zu approximieren.

Übung 9.80. — Wir können die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens genauer analysieren. Wir haben gezeigt, dass sich der Fehler in jedem Schritt mindestens halbiert. Wir betrachten nun das Argument etwas genauer, und behalten dementsprechend obige Notation. Sei $\beta = \frac{M}{2m}$. Zeigen Sie für den mit β gewichteten Abstand $\beta|x_n - z|$ die Abschätzung

$$\beta|x_n - z| \leq (\beta|x_0 - z|)^{2^n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Übung 9.81. — Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um $\sqrt{5}$ auf dreissig Dezimalstellen genau zu berechnen. Benutzen Sie einen Computer um Grundrechenoperationen in den rationalen Zahlen durchzuführen.

9.3.4 Numerische Integration

Viele Integrale lassen sich nicht in Ausdrücken der uns bisher bekannten Funktionen darstellen. Besonderes in diesen Fällen sind Abschätzungen zur numerischen Berechnung von Integralen nützlich.

Satz 9.82. — *Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $n \in \mathbb{N}$, und $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$.*

(a) (Rechtecksregel) Falls f stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\big(f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})\big) + F_1,$$

wobei der Fehler F_1 durch $|F_1| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max\{|f'(x)| \mid x \in [a, b]\}$ beschränkt ist.

(b) (Sehnentrapezregel) Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) + F_2,$$

wobei der Fehler F_2 durch $|F_2| \leq \frac{(b-a)^3}{6n^2} \max\{|f''(x)| \mid x \in [a, b]\}$ beschränkt ist.

(c) (Simpson-Regel) Falls f viermal stetig differenzierbar ist und n gerade ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots \\ + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) + F_3,$$

wobei der Fehler F_3 durch $|F_3| \leq \frac{(b-a)^5}{45n^4} \max\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a, b]\}$ beschränkt ist.

9.83. — Der Fehler für das Rechtecksverfahren verhält sich wie $O_f(n^{-1})$ für $n \to \infty$, für das Sehnentrapezverfahren wie $O_f(n^{-2})$ und für das Simpson-Verfahren wie $O_f(n^{-4})$. Alle drei obigen Approximationsverfahren sind sogenannte **Newton-Cotes-Verfahren**. Die wesentliche Idee eines solchen Verfahrens ist die folgende: zuerst schreibt man

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

und approximiert dann jedes Integralstück durch einen Ausdruck der Form

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{l=1}^{K} w_l f(z_l) + \text{Fehlerterm}$$

für Gewichte $w_1, \ldots, w_K \in [0,1]$ mit $\sum_{l=1}^{K} w_l = 1$ und Stützpunkte $z_1, \ldots, z_K \in [x_k, x_{k+1}]$. Beispielsweise nimmt man für die Sehnentrapezregel zwei Stützpunkte, nämlich die beiden Endpunkte des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$, mit den Gewichten $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$. Die Summe der Fehler, die auf den Stücken $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ zustandekommen, ergeben dann den Gesamtfehler der Approximation. Obiger Satz gibt demnach an, wie dieser Fehler kontrolliert werden kann. Die Simpson-Regel lässt sich wie folgt als Newton-Cotes-Verfahren auffassen. Für die äquidistante Zerlegung des Intervalles $[a,b]$ mit den Punkten $y_k = a + k\frac{b-a}{m}$ für $k = 0, \ldots, m$ betrachtet man auf $[y_k, y_{k+1}]$ die Gewichte $w_1 = \frac{1}{6}$, $w_2 = \frac{4}{6}$ und $w_3 = \frac{1}{6}$ und die Stützpunkte y_k, $\frac{y_k+y_{k+1}}{2}$ und y_{k+1}. Das dazugehörige Newton-Cotes-Verfahren ist genau das Simpson-Verfahren.

Beweis von Satz 9.82. Für (a) verwenden wir den Mittelwertsatz, wonach es für jedes $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ein $\xi_x \in (x_k, x_{k+1})$ gibt mit $f(x) - f(x_k) = f'(\xi_x)(x - x_k)$. Insbesondere gilt

$$|f(x) - f(x_\ell)| = |f'(\xi_x)|(x - x_\ell) \leq hM_1$$

für $h = \frac{1}{n}(b-a)$ und $M_1 = \max\{f'(t) \mid \ t \in [a,b]\}$. Damit erhalten wir

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - f(x_k)h \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|dx \leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)dx \leq \frac{h^2 M_1}{2}.$$

Durch Summation und die Dreiecksungleichung erhalten wir daraus

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)h \right| \leq \frac{nh^2}{2} M_1 = \frac{(b-a)^2}{2n} M_1.$$

Für (b) betrachten wir den Mittelpunkt $\tilde{x} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$ und definieren $M_2 = \max\{|f''(x)| \mid \ x \in [a,b]\}$. Nach Korollar 9.66 gilt für die Approximation durch das erste Taylor-Polynom um $\tilde{x}$

$$\big|f(t) - \big(f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(t - \tilde{x})\big)\big| \leq \frac{M_2}{2!} \ |t - \tilde{x}|^2 \leq \frac{M_2}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{M_2}{8} h^2$$

für alle $t \in [x_k, x_{k+1}]$. Wir verwenden dies für die Endpunkte $t = x_k$ und $t = x_{k+1}$ des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$, und erhalten

$$\left| \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} - f(\tilde{x}) \right| \leq \frac{M_2 h^2}{8}, \tag{9.25}$$

aus der Dreiecksungleichung, in dem wir linkerhand $f'(\tilde{x})(x_k - \tilde{x}) = -f'(\tilde{x})(x_{k+1} - \tilde{x})$ imnnerhalb vom Betragszeichen dazu und wieder abzählen. Genauso erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - f(\tilde{x})h\right| &= \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - f(\tilde{x})\big)dt\right| \\ &= \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - (f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(t-\tilde{x}))\big)dt\right| \\ &\le \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-\tilde{x})^2 dt = \frac{M_2}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s^2 ds = \frac{M_2 h^3}{3\cdot 8} \end{aligned} \tag{9.26}$$

Wir multiplizieren (9.25) mit h und summieren sowohl (9.25) als auch (9.26) über k in $\{0,\dots,n-1\}$. Daraus folgt mit Intervalladditivität des Riemann-Integrals

$$\left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right| \le n\left(\frac{M_2h^3}{8} + \frac{M_2h^3}{3\cdot 8}\right) = \frac{(b-a)^3 M_2}{6n^2}.$$

Für (c) betrachten wir wieder zuerst zu $k \in \{0,\dots,\frac{n}{2}-1\}$ die Punkte x_{2k}, x_{2k+1} und x_{2k+2} und verwenden Korollar 9.66 bei x_{2k+1}. Dies ergibt für $t \in [x_{2k}, x_{2k+2}]$

$$\begin{aligned}&\left|f(t) - \left(f(x_{2k+1}) + f'(x_{2k+1})(t-x_{2k+1}) + \frac{f''(x_{2k+1})}{2}(t-x_{2k+1})^2 + \frac{f'''(x_{2k+1})}{6}(t-x_{2k+1})^3\right)\right| \\ &\qquad \le \frac{M_4(t-x_{2k+1})^4}{4!} \le \frac{M_4h^4}{4!},\end{aligned} \tag{9.27}$$

wobei $M_4 = \max\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Durch Integration über $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ erhalten wir

$$\left|\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)dt - \left(2hf(x_{2k+1}) + \frac{f''(x_{2k+1})}{2}\int_{-h}^{h} s^2 ds\right)\right| \le \frac{M_4}{4!}\int_{-h}^{h} s^4 ds$$

oder auch

$$\left|\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)dt - \left(2hf(x_{2k+1}) + \frac{f''(x_{2k+1})}{3}h^3\right)\right| \le \frac{M_4h^5}{60}$$

Setzen wir $t = x_{2k}$ und $t = x_{2k+2}$ in Gleichung (9.27), so erhalten wir

$$\frac{h}{3}\left|\big(f(x_{2k}) + f(x_{2k+2})\big) - \big(2f(x_{2k+1}) + f''(x_{2k+1})h^2\big)\right| \le \frac{h\cdot 2\cdot M_4h^4}{3\cdot 24} = \frac{M_4h^5}{36},$$

da sich die linearen und kubischen Terme gegenseitig aufheben. Daher gilt

$$\begin{aligned}&\left|\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)dt - \tfrac{h}{3}\big(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\big)\right| \\ &\quad = \Bigg|\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)dt - \tfrac{h}{3}\big(6f(x_{2k+1}) + f''(x_{2k+1})h^2\big) + \tfrac{h}{3}\big(2f(x_{2k+1}) + \\ &\qquad + f''(x_{2k+1})h^2\big) - \tfrac{h}{3}\big(f(x_{2k}) + f(x_{2k+2})\big)\Bigg| \\ &\qquad \le \tfrac{1}{60}M_4h^5 + \tfrac{1}{36}M_4h^5 = \tfrac{2}{45}M_4h^5.\end{aligned}$$

Nach Summation über $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ ergibt sich die Folge $1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 2, 4, 1$ der Gewichte für die Funktionswerte in der Simpson-Regel wie im Satz und die Abschätzung genau wie im Beweis von (b) oben. $\square$

Übung 9.84. — Erklären Sie unter Verwendung der Simpson-Regel, wie man $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ auf beliebig viele Dezimalstellen genau bestimmen kann.

9.4 Anwendungen

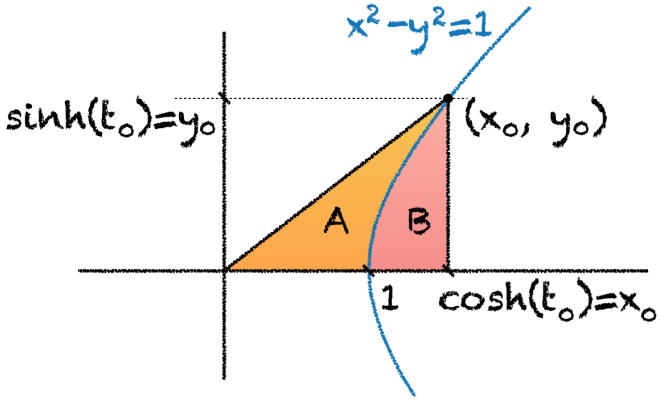
9.4.1 Flächeninhalte

Wir besprechen hier nochmals Beispiele für Flächenberechnungen, welche unter anderem den Namen der Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen erklären.

Beispiel 9.85. — Wir berechnen den Flächeninhalt des Kreises mit Radius $r > 0$. Dieser ist durch $2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$ definiert, und gemeinsam mit Bespiel 9.29 ergibt sich daraus

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx = 2\left[\tfrac{1}{2}r^2\arcsin\left(\tfrac{x}{r}\right)+\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}\right]_{-r}^{r} = r^2\pi$$

Beispiel 9.86. — Wir verwenden die Funktion $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t)=(\cosh(t),\sinh(t))$ um die Hyperbel $\{(x,y)\mid x^2-y^2=1, x>0\}$ zu parametrisieren. Wir wollen für ein vorgegebenes $x_0\geq 1$ den Flächeninhalt des Gebietes A zwischen dem Ursprung und einem Teil der Hyperbel berechnen.



Dieser ist der Flächeninhalt des gesamten Dreiecks $A\cup B$ minus dem Flächeninhalt von B. Letztere Fläche ist durch $\int_1^{x_0}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ gegeben. Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir die hyperbolische Substitution $x=\cosh(t)$, $dx=\sinh(t)dt$ und erhalten

$$\int_1^{x_0}\sqrt{x^2-1}dx = \int_0^{t_0}\sinh^2(t)dt = \int_0^{t_0}\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}dt = \left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}-\frac{1}{2}t\right]_0^{t_0}$$
$$= \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)-\frac{1}{2}t\right]_0^{t_0} = \frac{1}{2}x_0y_0-\frac{1}{2}t_0.$$

Somit ist der Flächeninhalt des gesuchten Gebiets

$$\frac{1}{2}t_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(x_0) = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(y_0).$$

Dies erklärt die Namen **Areasinus Hyperbolicus** und **Areakosinus Hyperbolicus** der Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen.

9.4.2 Bogenlänge

9.87. — Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nennt man **Weg** oder **Kurve** von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Dabei fassen wir $t \in [a, b]$ als Zeitparameter und $\gamma(t)$ als die Position zum Zeitpunkt t auf. Falls alle Komponenten $t \mapsto \gamma_k(t)$ von $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ stetig differenzierbar sind, interpretieren wir für einen Zeitpunkt $t \in [a, b]$ den Vektor

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

als **Geschwindigkeitsvektor**, und die Grösse

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_d'(t)^2}$$

als die **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt $t \in [a, b]$. Die **Länge** des Weges γ die zwischen den Zeiten a und b zurückgelegt wurde, definieren wir als

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2} dt.$$

Anders formuliert ist also die Länge des zurückgelegten Weges das Integral über die Geschwindigkeitsfunktion.

Beispiel 9.88. — Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Wegen $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ sind der Start- und der Endpunkt von γ gleich. Eingeschränkt auf $[0, 2\pi)$ ist Γ injektiv, und durchläuft den Einheitskreis einmal. Die Länge von γ kann man deshalb auch als den Umfang des Einheitskreises auffassen. Die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt $t \in [0, 2\pi]$ ist

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2} = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 1.$$

Deswegen gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

womit also die Länge von γ, oder eben der Umfang des Einheitskreises, glrich 2π ist. Dies gilt analog für Teilstrecken, und definiert den Begriff **Winkel** als Bogenlänge am Einheitskreis.

9.89. — Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Eine stetig differenzierbare **Reparametrisierung** von γ ist ein Weg der Form $\gamma \circ \psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, wobei $\psi : [c, d] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare, monotone wachsende, bijektive Funktion ist. Intuitiv ausgedrückt ist eine Reparametrisierung eines Weges also ein Weg mit denselben Endpunkten $\gamma(\psi(c)) = \gamma(a)$ und $\gamma(\psi(d)) = \gamma(b)$ und der immer in dieselbe Richtung wie γ läuft, wegen Monotonie. Man kann deswegen erwarten, dass jede Reparametrisierung eines Weges dieselbe Bogenlänge hat. Einen Weg γ der nie stationär ist, das heisst falls $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, nennt man **regulär**. Wir wollen auch zeigen, dass ein regulärer Weg so reparametrisiert werden kann,

dass der neue Weg Einheitsgeschwindigkeit hat.

Lemma 9.90. — *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann hat jede Reparametrisierung von γ dieselbe Bogenlänge wie γ. Falls $\|\gamma'(t)\|_2 > 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt, so gibt es eine Reparametrisierung von γ mit Einheitsgeschwindigkeit.*

Beweis. Sei $\psi : [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare, monotone wachsende, bijektive Funktion. Dann gilt

$$\int_c^d \|(\gamma \circ \psi)'(s)\|_2 ds = \int_c^d \|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\|_2 ds = \int_c^d \|\gamma'(\psi(s))\|_2 \psi'(s) ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

und also $L(\gamma \circ \psi) = L(\gamma)$. Um die zweite Aussage zu beweisen, konstruieren wir eine geeignete Reparametrisierung. Schreibe $L = L(\gamma)$ und

$$\varphi : [a,b] \to [0,L], \qquad \varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|_2 du.$$

Wegen $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 > 0$ für alle $t \in [a,b]$ sowie $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = L$ ist $\varphi : [a,b] \to [0,L]$ eine streng monoton wachsende, stetig differenzierbare Bijektion. Insbesondere ist $\psi = \varphi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$ ebenfalls streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Zur Zeit $s \in [0,L]$ berechnen wir nun die Geschwindigkeit von $\gamma \circ \psi$. Ist $t = \psi(s)$, so gilt wegen $\psi'(s) > 0$ auch

$$\|(\gamma \circ \psi)'(s)\|_2 = \|(\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\|_2 = \psi'(s)\|(\gamma'(t)\|_2 = \frac{1}{\varphi'(t)}\|(\gamma'(t)\|_2 = 1.$$

Somit hat die Reparametrisierung $\gamma \circ \psi$ die gewünschte Eigenschaft. □

Beispiel 9.91. — Wir wollen nochmals die Bogenlänge des Kreises berechnen. Doch verwenden wir diesmal die Gleichung $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ als Definition des oberen Halbkreises. Die Bogenlänge des Kreises ist demnach gegeben durch das Integral

$$2\int_{-1}^1 \sqrt{1+f'(x)^2} dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4(\arcsin(1) - 0) = 2\pi.$$

Übung 9.92. — Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer, nie stationärer Weg, das heisst, es gilt $\|\gamma'(t)\|_2 > 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass es essentiell nur eine Reparametrisierung von γ mit Einheitsgeschwindigkeit gibt, nämlich die, die im Beweis von Lemma 9.90 konstruiert wurde. Was bedeutet hier „essentiell“?

Übung 9.93. — In dieser Übung wollen wir noch eine weitere Begründung für die Definition der Bogenlänge eines Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ geben. Hierfür interpretieren wir $\|v-w\|_2$ als den

Abstand zweier Punkte $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wie betrachten das Supremum

$$L = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{N} \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}\|_2 \;\middle|\; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \right\}$$

das über alle Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ von $[a, b]$ genommen wird. Nehmen Sie nun an, dass γ stetig differenzierbar ist und zeigen Sie $L = L(\gamma)$.

9.94. — Für einen Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann ein Integral der Form

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|_2 dt$$

eine physikalische Bedeutung haben. Zum Beispiel kann der Weg einen verbogenen Draht mit konstanter Dichte $1g/m$ beschreiben. In diesem Fall gibt

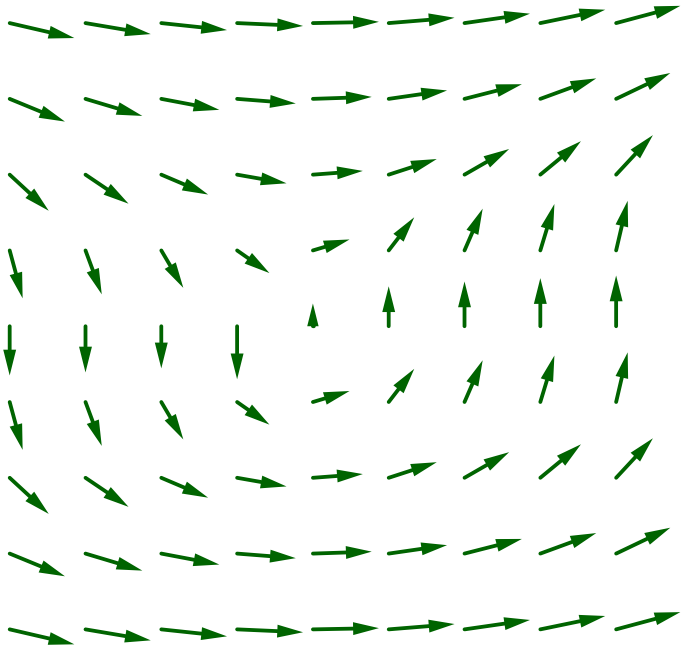
$$\frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b \gamma(t)\|\gamma'(t)\|_2 dt$$

den Schwerpunktes des Drahtes an.

9.4.3 Wegintegrale von Vektorfeldern

Wir kommen nun zu einem weiteren Typ von Wegintegralen, der sowohl für die Physik als auch für die weitere Analysis wichtig sein wird. Hierfür betrachten wir einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$. Wir interpretieren die Ableitung $\gamma'(t)$ als den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t, der eben nicht nur die augenblickliche Geschwindigkeit als eindimensionale Grösse angibt, sondern auch die Richtung der Bewegung beschreibt.

Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion, welche wir als ein **Kraftfeld** interpretieren und bei jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ die Richtung und Stärke einer Krafteinwirkung angibt. Wir nennen in diesem Zusammenhang F ein **Vektorfeld** und visualisieren für $d = 2$ dieses durch eine Ansammlung von Vektoren bei Punkten im Definitionsbereich, siehe folgendes Bild.



Das innere Produkt $\langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle$ gibt damit die Leistung (in $W = Nm/s$) an, die bei Bewegung mit vorgeschriebener Geschwindigkeit von der Krafteinwirkung zum Zeitpunkt t geleistet wird. Hierbei kann es vorkommen, dass Krafteinwirkung und Geschwindigkeit ähnliche Richtungen haben und das innere Produkt positiv ist. Ebenso kann es aber vorkommen, dass Krafteinwirkung und Geschwindigkeit entgegengesetzt sind und das innere Produkt negativ ist. In diesem Sinne berechnet das sogenannte **Wegintegral**

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \, dt$$

die Arbeit, die von der Krafteinwirkung insgesamt geleistet wurde.

Wir werden im zweiten Semester derartige Integrale nochmals genauer untersuchen und dann zum Beispiel folgende Frage beantworten können: Wie kann man einem Kraftfeld f ansehen, ob das Wegintegral nur von Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ abhängt und nicht von der Wahl des konkreten Weges von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$?

Beispiel 9.95 (Abhängigkeit von der Wahl des Weges). — Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (y, x^2)$. Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (t, t^2)$ für $t \in [0, 1]$. Dann ist das Wegintegral von f über den Weg γ von $\gamma(0) = (0, 0)$ nach $\gamma(1) = (1, 1)$ durch

$$\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2 + 2t^3)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{5}{6}$$

gegeben. Verwenden wir allerdings den Weg $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\eta(t) = (t^2, t)$ für $t \in [0,1]$, so sind zwar Anfangs- und Endpunkte unverändert, doch ist das Wegintegral durch

$$\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (2t^2 + t^4)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$$

gegeben.

Applet 9.96 (Wegintegral)**.** *Wir stellen sowohl das Vektorfeld f, einen verschiebbaren Weg γ mit animiertem Punkt $\gamma(t)$, die Ableitung $\gamma'(t)$ und darunter den Graph der Funktion $t \in [0,1] \mapsto \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$ dar.*

9.4.4 Volumen und Oberflächen von Rotationskörpern

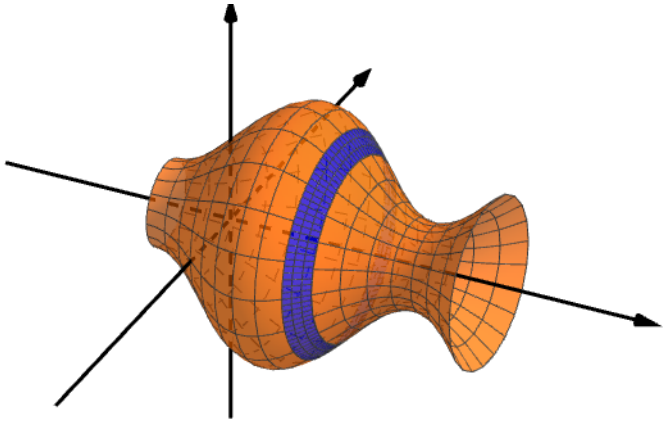
9.97. — Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Wir betrachten den zugehörigen, sogenannten **Rotationskörper**

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\right\},$$

der sich aus Rotation der Fläche unter dem Graphen von f um die x-Achse ergibt. Als **Rotationsfläche** bezeichnen wir die Menge

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = f(x)^2\right\},$$

die sich aus Rotation des Graphen von f um die x-Achse ergibt.



Figur 9.2: Eine Rotationsfläche

Wir *definieren* das **Volumen des Rotationskörpers** K durch

$$\mathrm{vol}(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Angenommen f sei stetig differenzierbar. Dann definieren wir den **Flächeinhalt der Rotationsfläche** S als

$$\text{Fläche}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ f(x)dx.$$

Um diese Definition zu begründen, betrachten wir eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$, und schreiben $\delta_k = x_k - x_{n-1}$. In jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ist die Funktion f der Tangente $y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$ nahe. Ausserdem wird die Oberfläche des Anteils von S, der dem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ entspricht (siefe Figur 9.2), gut durch die Oberfläche des Kegelstumpfs beschrieben, der entsteht, wenn man obiges Tangentenstück zwischen x_{k-1} und x_k um die x-Achse rotiert. Die Aussenoberfläche so eines Kegelstumpfs ist näherungsweise $\ell \cdot U$, wobei $\ell = \sqrt{\delta_k^2 + f'(x_k)^2\delta_k^2}$ die Länge der Aussenkante des Kegelstumpfs und $U = f(x_k)$ den Umfang der Basis darstellt. Die Oberfläche von S sollte also näherungsweise durch

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\delta_k^2 + f'(x_k)^2\delta_k^2} \cdot 2\pi f(x_k) = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_k)} f(x_k)\delta_k$$

gegeben sein.

Beispiel 9.98. — Wir berechnen Volumen und Oberfläche einer Kugel mit Radius $r > 0$. Die volle Kugel $B(0, r) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\right\}$ lässt sich auch als Rotationskörper mittels der Funktion $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ auffassen. Ihr Volumen ist deswegen durch

$$\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \left[r^2 x - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

gegeben. Für alle $x \in [-r, r]$ ist $f'(x) = -x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Damit ist die Kugeloberfläche gleich

$$2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2} dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2.$$

Übung 9.99. — Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des „uneigentlichen Rotationskörpers“, der entsteht, wenn man das Gebiet unter dem Graphen der Funktion $x \in [1, \infty) \mapsto \frac{1}{x}$ um die x-Achse rotiert.

Kapitel 10

Topologische Grundbegriffe

Wir möchten uns von der fast ausschliesslichen Betrachtung von Intervallen als Definitionsbereich von reellwertigen Funktionen wegbewegen und allgemeinere Räume als Definitionsbereiche einführen. In diesem allgemeineren Rahmen werden wir einige wichtige Sätze rund um Konvergenz und Stetigkeit, die uns bereits für Intervalle bekannt sind, beweisen können. Dies verschafft uns den notwendigen, breiteren Blickwinkel für die weitere Theorie wie zum Beispiel für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra oder für die Fortsetzung der Diskussion von Differentialgleichungen.

10.1 Topologische Räume

10.1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ **offen** heisst, falls für jedes $x \in U$ ein $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subseteq U$ existiert. Analog haben wir auch offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert, und wir können genauso auch offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ definieren. Offene Teilmengen genügen gewissen gemeinsamen Gesetzmässigkeiten, so etwa haben wir gesehen, dass beliebige Vereinigungen sowie endliche Durchschnitte offener Mengen wiederum offen sind. Der Begriff des topologischen Raumes formalisiert diese Gesetzmässigkeiten.

Definition 10.1. — Ein **topologischer Raum** ist ein geordnetes Paar (X, τ) bestehend aus einer Menge X und einer Familie von Teilmengen τ von X die den Axiomen 1, 2, 3 genügt. Wir nennen die Familie τ eine **Topologie** auf X, Teilmengen $U \subseteq X$ die zur Familie τ gehören **offene** Mengen.

(1) $\varnothing \subseteq X$ ist offen, und $X \subseteq X$ ist offen.

(2) Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

(3) Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.

Wir nennen eine Teilmenge $F \subseteq X$ deren Komplement offen ist eine **abgeschlossene** Teilmenge. Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heisst **Umgebung** von x, falls eine offene Teilmenge

$U \subseteq X$ mit $x \in U$ und $U \subseteq V$ existiert. Ist V offen, so nennen wir V eine **offene Umgebung** von x, und ist V abgeschlossen, so nennen wir V eine **abgeschlossene Umgebung** von x.

10.2. — Sei X eine Menge. Die Familie aller Teilmengen $\tau = \mathcal{P}(X)$ ist eine Topologie. Bezüglich dieser Topologie sind also alle Teilmengen von X offen. Sie heisst **diskrete** Topologie auf X. Die Familie $\tau = \{\varnothing, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie. Sie wird **triviale** Topologie oder auch **indiskrete** Topologie genannt. Interessante Topologien sind etwa die bereits bekannte Topologie auf $\mathbb{R}$ oder auf $\mathbb{C}$, für die offene Mengen wie in 3.23, beziehungsweise 3.44 definiert sind. Wir nennen diese Topologien **Standardtopologie** auf $\mathbb{R}$, beziehungsweise auf $\mathbb{C}$. Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist analog definiert - wir kommen im Abschnitt 10.2 im Detail darauf zu sprechen.

Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so sprechen wir oft einfach vom topologischen Raum X, ohne die Topologie τ explizit zu benennen, so, wie wir auch von einem Körper K, und nicht von einem Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ sprechen. Topologische Räume sind Objekte geometrischer Natur. Wie nennen Elemente $x \in X$ daher oft **Punkte**.

Definition 10.3. — Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die **Einschränkung** von τ auf Y ist die Topologie

$$\tau|_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

auf Y. Wir nennen sie auch **induzierte** Topologie oder **Unterraumtopologie**. Eine für die Topologie $\tau|_Y$ offene Teilmenge $V \subseteq Y$ nennen wir auch **relativ offen**, und eine für die Topologie $\tau|_Y$ abgeschlossene Teilmenge nennen wir auch **relativ abgeschlossen**.

Man glaubt vielleicht zuerst, dass obiges ein rein formales Wortspiel ist und eigentlich wenig Zweck erfüllt. Das dem nicht so ist, sollte klar sein, wenn Sie Teilmengen von der Kugeloberfläche $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$ betrachten und entscheiden wollen, ob die gekrümmte Kreisscheibe $\{v \in S^2 \mid \|v - e_1\| < 0.1\}$ um den ersten Basisvektor $e_1 \in S^2$ offen ist oder nicht: Als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist sie nicht offen, doch ist sie eine relativ offene Teilmenge von S^2.

Definition 10.4. — Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Eine **stetige Abbildung** von (X, τ) nach (Y, σ) ist eine Abbildung $f : X \to Y$ so, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

10.5. — Seien X, Y und Z topologische Räume. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist die Verknüpfung $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls stetig. Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist die Umkegrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ im Allgemeinen *nicht* stetig. Eine bijektive, stetige Abbildung deren inverses ebenfalls stetig ist heisst **Homöomorphismus**.

Übung 10.6. — Seien X und Y topologische Räume und seien A_1 und $A_2 \subset X$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$, versehen mit der von X induzierten Topologie. Seien $f_1 : A_1 \to Y$ und $f_2 : A_2 \to Y$ stetige Funktionen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : X \to Y$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Proposition 10.7. — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(1) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{10.1}$$

für alle $x \in D$ gilt.

(2) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen, für die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ induzierte Topologie auf D.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Angenommen f erfüllt die Eigenschaft (1). Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Wir müssen zeigen, dass das Urbild $V = f^{-1}(U)$ offen in D ist. Dass V offen in D ist bedeutet, dass für jedes $x_0 \in V$ ein $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \cap D \subseteq V$ existiert. Sei also $x_0 \in V$ und setze $y_0 = f(x_0) \in U$. Da $U \subseteq \mathbb{R}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B(y_0, \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Nach Eigenschaft (1) existiert ein $\delta > 0$ so, dass (10.1) für alle $x \in D$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $B(x_0, \delta) \cap D \subseteq V$, was zu zeigen war.

(2) $\implies$ (1): Angenommen f erfüllt die Eigenschaft (2), und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Setze $y_0 = f(x_0)$. Das offene Intervall $U = B(y_0, \varepsilon)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Nach Eigenschaft (2) ist also die Menge $V = f^{-1}(U)$ offen in D. Es existiert also $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $B(x_0, \delta) \cap D \subseteq V$. Letztere Inklusion bedeutet gerade, dass (10.1) gilt. □

Definition 10.8. — Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die Menge

$$Y^\circ = \{x \in Y \mid \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } U \subseteq Y\}$$

wird das **Innere** von Y genannt, die Menge

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid U \cap Y \neq \varnothing \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x\}$$

wird **Abschluss** von Y genannt. Der **Rand** von Y wird durch $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^\circ$ definiert. Die Teilmenge $Y \subseteq X$ heisst **dicht**, falls $\overline{Y} = X$ gilt.

Übung 10.9. — Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Zeigen Sie, dass Y° eine offene Teilmenge von X ist, und dass jede offene Teilmenge von X die in Y enthalten ist auch in Y° enthalten ist.

2. Zeigen Sie, dass $\overline{Y}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, und dass jede abgeschlossene Teilmenge von X die Y enthält auch $\overline{Y}$ enthält.

10.1.2 Folgenkonvergenz in topologischen Räumen

Definition 10.10. — Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heisst **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$, falls für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N \implies x_n \in U$$

existiert. Ein Punkt $x \in X$ heisst **Häufungspunkt** der Folge falls für jede Umgebung U von x und jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $x_n \in U$ existiert.

10.11. — Sei X eine Menge, versehen mit der indiskreten Topologie, und sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in X. Dann ist jeder Punkt $x \in X$ ein Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$. Insbesondere brauchen Grenzwerte von Folgen in einem topologischen Raum nicht eindeutig zu sein.

Definition 10.12. — Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wir nennen (X, τ) einen **Hausdorff-Raum** falls für alle Punkte $x_1 \neq x_2$ von X Umgebungen $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ existieren.

Proposition 10.13. — *Sei (X, τ) ein Hausdorff'scher topologischer Raum, und sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in X. Sind x und y Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$, so gilt $x = y$.*

Beweis. Angenommen x und y sind Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$. Sei U eine Umgebung von x und V eine Umgebung von y. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass sowohl $x_N \in U$ als auch $x_N \in V$ gilt. Daraus folgt $U \cap V \neq \varnothing$. Da die Umgebungen U und V beliebig waren, und (X, τ) ein Hausdorff Raum ist, folgt daraus $x = y$. □

10.1.3 Die Produkttopologie

Seien X und Y topologische Räume. Es gibt eine vernünftige Topologie auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$, die sogenannte Produkttopologie. Wenn vom topologischen Raum $X \times Y$ gesprochen wird ohne explizit eine Topologie anzugeben, so ist immer die Produkttopologie gemeint.

Definition 10.14. — Seien X und Y topologische Räume. Wir bezeichnen als **Produkttopologie** die Topologie auf $X \times Y$, deren offene Mengen gerade diejenigen Teilmengen

$U \subseteq X \times Y$ sind, die folgende Eigenschaft erfüllen: Für jedes $(x, y) \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq X$ von x und eine offene Umgebung $W \subseteq Y$ von y, mit $V \times W \subseteq U$.

Proposition 10.15. — *Seien X, Y und Z topologische Räume. Eine Abbildung $f : Z \to X \times Y$ ist genau dann stetig für die Produkttopologie auf $X \times Y$, wenn die Verknüpfungen*

$$f_X : Z \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X \qquad \textit{und} \qquad f_Y : Z \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$$

beide stetig sind.

Beweis. Die Projektionen π_X und π_Y sind stetig. Ist also f stetig, so sind auch die Verknüpfungen stetiger Funktionen $f_X = \pi_X \circ f$ und $f_Y = \pi_Y \circ f$ stetig. Wir nehmen nun an f_X und f_Y seien stetig, und weisen nach, dass damit auch f stetig ist. Sei $U \subseteq X \times Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist. Nach Definition der Produkttopologie existiert für jedes $(x, y) \in U$ offene Umgebungen $V_x \subseteq X$ von x und $W_y \subseteq Y$ von y mit $V_x \times W_y \subseteq U$. Da f_X stetig ist, ist $f_X^{-1}(V_x)$ offen, und da f_Y stetig ist, ist $f_Y^{-1}(W_y)$ offen. Also ist der Durchschnitt

$$f^{-1}(V_x \times W_y) = f_X^{-1}(V_x) \cap f_Y^{-1}(W_y)$$

offen. Dies gilt für alle $(x, y) \in U$, und somit ist die Vereinigung

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{(x,y) \in U} f^{-1}(V_x \times W_y)$$

offen, was zu zeigen war. □

Übung 10.16. — Verallgemeinern Sie Definition 10.14 und Proposition 10.15 für beliebige endliche Produkte topologischer Räume.

10.2 Topologie auf metrischen Räumen

Eine insbesondere in der Analysis wichtige Klasse von topologischen Räumen ist aus metrischen Räumen konstruiert. Ist (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$ eine reelle Zahl, so schreiben wir

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

und nennen die Menge $B(x, r)$ **offener Ball** oder **offene Kreisscheibe** mit Zentrum x und Radius r.

10.2.1 Die von einer Metrik induzierte Topologie

Definition 10.17. — Sei (X, d) eine metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst **offen** falls für jedes $x \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$, derart, dass $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Die damit definierte Topologie τ_d auf der Menge X wird die von der Metrik **induzierte Topologie** genannt.

10.18. — Wir müssen überprüfen, dass die Familie der in 10.17 als offen bezeichneten Teilmengen U von X tatsächlich eine Topologie bilden. Dass $\varnothing \subseteq X$ und $X \subseteq X$ offen sind ist klar. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von offenen Teilmengen von X. Setze

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und sei $x \in U$. Dann existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$, und da U_i offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$, und damit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Also ist U offen. Sei schliesslich $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie von offenen Teilmengen von X. Setze

$$U = \bigcap_{i \in I} U_i$$

und sei $x \in U$. Dann gilt $x \in U_i$ für alle $i \in I$, und also existiert für jedes $i \in I$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i \in I\}$ gilt dann $\varepsilon > 0$ und $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Also gilt $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, was zu zeigen war.

10.19. — Die meisten Topologien die wir in diesem Kurs antreffen werden, sind von einer Metrik induziert. Sie sind damit insbesondere Hausdorff'sche topologische Räume. Es ist nicht wahr, dass jede Topologie von einer Metrik induziert ist, ein einfaches Beispiel dafür ist die indiskrete Topologie auf einer Menge mit zwei oder mehr Elementen. Es gibt auch Hausdorff'sche Topologien die nicht von einer Metrik induziert sind, Beispiele dafür sind aber etwas komplizierter. Zwei verschiedene Metriken auf einer Menge X können die selbe Topologie induzieren, zum Beispiel induzieren alle Metriken auf einer endlichen Menge die diskrete Topologie.

Übung 10.20. — Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der sogenannte abgeschlossene Ball

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

mit Radius $r \geq 0$ um $x \in X$ tatsächlich eine abgeschlossene Teilmenge von X ist. Zeigen Sie auch, dass jede endliche Teilmenge von X abgeschlossen ist.

Lemma 10.21. — *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

1. *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn für jede konvergente Folge in X mit Grenzwert in U fast alle Folgenglieder in U liegen.*
2. *Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch der Grenzwert in A liegt.*

Beweis. Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge von X und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X mit Grenzwert x in U. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, und da $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen x konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, \varepsilon)$ für alle $n \geq N$. Sei umgekehrt $V \subseteq X$ eine nicht offene Teilmenge. Dann gibt es einen Punkt $x \in V$ mit $B(x, \varepsilon) \setminus V \neq \varnothing$ für jedes $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir somit ein $x_n \in B(x, 2^{-n}) \setminus V$. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $X \setminus V$ konvergiert gegen $x \in V$, und erfüllt $x_n \notin V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies schliesst den Beweis der ersten Aussage.

Sei $A \subset X$ abgeschlossen und sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in X mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei x der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Dann ist $U = X \setminus A$ offen und kann nicht den Grenzwert x von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ enthalten, da sonst fast alle Folgenglieder der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in U liegen müssten. Also ist der Grenzwert x ein Element von A. Sei schlussendlich $A \subseteq X$ nicht abgeschlossen. Dann ist $U = X \setminus A$ nicht offen und es existiert nach obigem Argument eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $A = X \setminus U$ mit Grenzwert $x \in U$. □

Übung 10.22. — Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass $x \in \overline{Y}$ genau dann gilt, wenn es eine Folge in Y mit Grenzwert x gibt.

10.23. — Wir erinnern daran, dass ein metrischer Raum (X, d) **vollständig** genannt wird, falls jede Cauchy Folge in X konvergiert, siehe Abschnitt 6.1.3. Der Satz von Heine-Borel 6.145 besagt, dass $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardmetrik vollständig ist.

Proposition 10.24. — *Sei $d \in \mathbb{N}$. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist vollständig.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene Teilmenge und sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in A. Dann besitzt nach dem Satz von Heine-Borel die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, aufgefasst als Folge in $\mathbb{R}^d$, einen Grenzwert $b \in \mathbb{R}^d$. Nach Lemma 10.21 muss aber b in A liegen, womit die Cauchy-Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ also in A konvergiert. Somit ist A vollständig. □

Übung 10.25. — Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Angenommen X ist vollständig und A ist abgeschlossen. Zeigen Sie, dass der Teilraum A auch vollständig ist.

(ii) Angenommen A ist vollständig. Zeigen Sie, dass $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Lemma 10.26. — *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge, mit Supremum $x = \sup X$. Ist X abgeschlossen, so gilt $x \in X$, und ist X offen so gilt $x \notin X$.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nach Satz 3.51 ein $x_n \in X$ mit $x - 2^{-n} < x_n \leq x$. Daraus folgt, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen x konvergiert, und mit Lemma 10.21, dass x ein Element von X ist falls X abgeschlossen ist. Falls hingegen X offen ist und $x \in X$ gilt, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq X$. Insbesondere gilt aber damit $x + \frac{1}{2}\varepsilon \in X$ und dies widerspricht der Definition des Supremums in Satz 3.51. Daher muss $x \notin X$ gelten. □

Übung 10.27. — Sei X eine Menge, und seien d_1 und d_2 Metriken auf X. Angenommen es existieren reelle Zahlen $A_1 > 0$ und $A_2 > 0$ so, dass

$$d_1(x, y) \leq A_2 d_2(x, y) \qquad \text{und} \qquad d_2(x, y) \leq A_1 d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 die selbe Topologie auf X induzieren.

Übung 10.28. — Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf V. Seien d_1 und d_2 die von diesen Normen induzierten Metriken, und seien τ_1 und τ_2 die davon induzierten Topologien auf V. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ genau dann äquivalent sind, wenn $\tau_1 = \tau_2$ gilt.

10.2.2 Charakterisierung von Stetigkeit

Wir möchten nun den Stetigkeitsbegriff auf metrische Räume verallgemeinern. Wie wir sehen werden, lässt sich dieser auf verschiedene Arten charakterisieren.

Definition 10.29. — Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

1. Wir sagen, f sei **ε-δ-stetig** ist, falls für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ gilt.

2. Wir sagen, dass f sei **folgenstetig** ist, falls für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in X mit Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert, mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

3. Wir sagen f sei **topologisch stetig**, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Proposition 10.30. — *Seien X und Y metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) Die Funktion f ist ε-δ-stetig.

(2) Die Funktion f ist folgenstetig.

(3) Die Funktion f ist topologisch stetig.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergierende Folge in X mit Grenzwert $x \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x') \in B(f(x), \varepsilon)$ für alle $x' \in B(x, \delta)$. Da $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen x konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, \delta)$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt für $n \geq N$ also $f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt somit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ und somit ist f folgenstetig wie behauptet.

$\neg$(1) $\implies$ $\neg$(2): Angenommen f sei nicht ε-δ-stetig. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in B(x, \delta)$ existiert mit $f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)$. Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x, 2^{-n})$ mit $f(x_n) \notin B(f(x), \varepsilon)$. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen x, aber die Folge $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, und somit ist f ist nicht folgenstetig.

(1) $\implies$ (3): Sei $U \subset Y$ offen. Für $x \in f^{-1}(U)$ ist $f(x)$ ein Element der offenen Menge U, es gibt also ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(f(x), \varepsilon) \subset U$. Da f nach Voraussetzung ε-δ-stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$ und somit $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$. Da $x \in f^{-1}(U)$ beliebig war, ist $f^{-1}(U)$ offen.

(3) $\implies$ (1): Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Das Urbild $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ enthält den Punkt x und ist nach Voraussetzung offen, da $B(f(x), \varepsilon) \subseteq Y$ offen ist. Also existiert ein $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Also ist f wie behauptet ε-δ-stetig. □

10.31. — Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Falls f die äquivalenten Aussagen in Proposition 10.30 erfüllt, so nennen wir f einfach **stetig**. Auf metrischen Räumen gibt es weitere Stetigkeitsbegriffe, die den Begriff der Stetigkeit verschärfen. Gleichmässige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit sind zwei solche Verschärfungen: Die Funktion f heisst **gleichmässig stetig**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d(x_1, x_2) < \delta$ auch $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ gilt. Die Funktion f heisst **Lipschitz-stetig**, falls es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt, genannt **Lipschitz-Konstante**, mit

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$. Es gelten die Implikationen

$$f \text{ ist Lipschitz-stetig} \implies f \text{ ist gleichmässig stetig} \implies f \text{ ist stetig}$$

und im Allgemeinen sind die umgekehrten Implikationen falsch. Lipschitz- und gleichmässige Stetigkeit sind metrische Begriffe. Es gibt etwa keine sinnvolle Definition von gleichmässig stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen.

Übung 10.32. — Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge. Zu $x \in X$ definieren wir

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f_A : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, und dass $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A = \{x \in X \mid f_A(x) = 0\}$ gilt.

10.2.3 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Sogenannte Fixpunktsätze beschreiben, wann es Punkte $x \in X$ gibt, die unter einer Abbildung $f : X \to X$ festgehalten werden. Fixpunktsätze sind insbesondere oft dann nützlich, wenn es darum geht, Existenzsätze zu beweisen. Den Banach'schen Fixpunktsatz werden wir unter anderem für den Beweis des Satzes der impliziten Funktion 12.3 und für die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen verwenden.

Satz 10.33 (Banach'scher Fixpunktsatz). — *Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $T : X \to X$ eine Abbildung und $0 \leq \lambda < 1$ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, dass*

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt. Dann existiert genau ein Element $a \in X$ mit $T(a) = a$.

Die Zahl λ nennt man **Lipschitz-Konstante** und die Funktion T eine **Lipschitz-Kontraktion**. Ein Punkt $x \in X$ mit $T(x) = x$ heisst **Fixpunkt** der Abbildung T, und der Satz besagt also, dass eine Lipschitz-Kontraktion genau einen Fixpunkt besitzt.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien also $a \in X$ und $b \in X$ Fixpunkte von T. Dann gilt

$$d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leq \lambda d(a, b),$$

was wegen $\lambda < 1$ also $d(a, b) = 0$ und somit $a = b$ impliziert.

Um die Existenz eines Fixpunktes nachzuweisen wählen wir ein beliebiges $x_0 \in X$ und definieren eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = T^n(x_0)$. Wir behaupten, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine ganze Zahl $N \geq 0$ derart, dass die Ungleichung

$$\frac{\lambda^N}{1 - \lambda} d(x_0, x_1) < \varepsilon$$

erfüllt ist, da nach Voraussetzung $\lambda < 1$ gilt. Seien $m \geq n \geq N$ ganze Zahlen. Dann gilt

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{p=n}^{m-1} d(x_p, x_{p+1}) = \sum_{p=n}^{m-1} d(T^p(x_0), T^p(x_1)) \leq \sum_{p=n}^{m-1} \lambda^p d(x_0, x_1) < \varepsilon$$

womit der Nachweis erbracht ist, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge ist. Nach Voraussetzung ist X vollständig, also konvergiert die Folge. Sei $a \in X$ ihr Grenzwert. Da T stetig ist, gilt

$$T(a) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

was zeigt, dass a ein Fixpunkt von T ist. □

Übung 10.34. — Finden Sie Beispiele für:

(1) Eine Lipschitz-Kontraktion $T : X \to X$ auf einem nicht-vollständigen metrischen Raum X, die keinen Fixpunkt besitzt.

(2) Einen vollständigen metrischen Raum (X, d) und eine Isometrie (das heisst, eine Abbildung $T : X \to X$ mit $d(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2)$), die keinen Fixpunkt besitzt, und eine Isometrie, die genau 13 Fixpunkte besitzt.

10.3 Kompaktheit

Wir haben in Abschnitt 4.3 ein Intervall **kompakt** genannt, falls es abgeschlossen und beschränkt ist, also von der Form $[a, b]$, für $a, b \in \mathbb{R}$. Wir haben einige fundamentale Eigenschaften von stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen bewiesen: Beschränktheit, Existenz von Maxima und Minima sowie gleichmässige Stetigkeit. Diese Eigenschaften sind grundlegend für die Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen (Satz 5.45), für den Satz von Rolle (Satz 8.29) und den Mittelwertsatz (Satz 8.30), und damit für die gesamte Differential-und Integralrechnung. Des Weiteren hatten wir in Korollar 6.56 gezeigt, dass jede Folge in einem kompakten Intervall einen Häufungspunkt besitzt. Wir wollen diese und weitere Eigenschaften im grösseren Rahmen topologischer und metrischer Räume untersuchen.

10.3.1 Kompakte topologische Räume

Definition 10.35. — Sei X ein topologischer Raum, und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie offener Mengen $\mathcal{U}$ von X, so, dass

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

gilt. Eine **Teilüberdeckung** der Überdeckung $\mathcal{U}$ von A ist eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von A mit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Eine **endliche offene Überdeckung** ist eine offene Überdeckung durch eine endliche Familie offener Mengen .

Definition 10.36. — Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen A sei **kompakt** falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir nennen X einen kompakten Topologischen Raum wenn X als Teilmenge von X kompakt ist.

Übung 10.37. — Überprüfen Sie, dass eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann kompakt ist, wenn A versehen mit der Unterraumtopologie, als eigenständiger topologischer Raum, kompakt ist.

Beispiel 10.38. — Jeder endliche topologische Raum X ist kompakt. In der Tat ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ endlich und somit ist jede offene Überdeckung bereits endlich. Das halboffene Intervall $X = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht kompakt. Tatsächlich besitzt die offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{(2^{-n}, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine endliche Teilüberdeckung.

Proposition 10.39. — *Ein topologischer Raum X ist kompakt wenn und nur wenn X das folgende **Schachtelungsprinzip** erfüllt: Für jede Kollektion $\mathcal{A}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt,*

gilt auch

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \varnothing.$$

Beweis. Angenommen X sei kompakt, und $\mathcal{A}$ sei eine Kollektion abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Durchschnitt. Die Kollektion der Komplemente $\mathcal{U} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$ ist dann eine offene Überdeckung von X, und es existiert also eine endliche Teilüberdeckung $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ davon. Setze $A_i = X \setminus U_i$. Dann gilt $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \varnothing$. Also erfüllt X das Schachtelungsprinzip.

Wir nehmen nun an X erfülle das Schachtelungsprinzip, und zeigen dass X kompakt ist. Sei also $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann ist $\mathcal{A} = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine Kollektion abgeschlossener Teilmengen mit leerem Durchschnitt. Nach dem Schachtelungsprinzip gibt es deshalb $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit leerem Durchschnitt. Setze $U_i = X \setminus A_i$. Dann ist $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ eine endliche Teilüberdeckung. Da die Überdeckung $\mathcal{U}$ beliebig war zeigt dies, dass X kompakt ist. □

Proposition 10.40. — *Seien X und Y topologische Räume, sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion, und sei $A \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von Y.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist für jedes $U \in \mathcal{U}$ die Menge $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen, aufgrund der Stetigkeit von f. Die Kollektion $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ ist eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, existieren $U_1 \ldots U_n \in \mathcal{U}$ so, dass $\{f^{-1}(U_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Überdeckung von A ist. Damit ist auch $\{U_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Überdeckung von $f(A)$, und da $\mathcal{U}$ beliebig gewählt war zeigt dies, dass $f(A)$ kompakt ist. □

Definition 10.41. — Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen X sei **folgenkompakt**, falls jede Folge in X einen Häufungspunkt in X besitzt. Ein Teilraum $Y \subseteq X$ heisst folgenkompakt, falls Y als eigenständiger topologischer Raum folgenkompakt ist.

10.42. — Kompaktheit und Folgenkompaktheit sind verwandte Begriffe. Allerdings gibt es kompakte topologische Räume, die nicht folgenkompakt sind, und es gibt auch folgenkompakte Räume die nicht kompakt sind. Der Satz von Heine-Borel 6.145 zeigt, dass abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ folgenkompakt sind, siehe dazu Lemma 10.56 und die Version 10.57 des Satzes von Heine-Borel.

10.3.2 Kompakte metrische Räume

Wir nennen einen metrischen Raum (X, d) **kompakt** wenn X als topologischer Raum, also X bezüglich der von der Metrik d induzierten Topologie, kompakt ist. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist Satz 10.47, der verschiedene Charakterisierungen von Kompaktheit für metrische Räume aufzeigt. Wir erinnern daran, dass (X, d) **beschränkt** heisst, falls es ein $R > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass $d(x, y) \leq R$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Definition 10.43. — Sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **total beschränkt** ist, falls es für jedes $r > 0$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt mit $X = \bigcup_{j=1}^n B(x_j, r)$.

Übung 10.44. — Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn jede offene Überdeckung von X bestehend aus offenen Bällen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Übung 10.45. — Zeigen Sie, dass ein total beschränkter metrischer Raum beschränkt ist, und finden Sie ein Beispiel für einen beschränkten metrischen Raum der nicht total beschränkt ist.

Definition 10.46. — Sei X ein metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Wir sagen, dass eine Zahl $r > 0$ eine **Lebesgue-Zahl** für $\mathcal{U}$ ist, falls es für jedes $x \in X$ eine offene Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $B(x, r) \subseteq U$ gibt.

Satz 10.47. — *Sei X ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) Mit der von der Metrik induzierten Topologie ist X ist ein kompakter topologischer Raum.

(2) Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt, das heisst, X ist folgenkompakt.

(3) Jede unendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt.

(4) Jede stetige, reellwertige Funktion auf X ist beschränkt.

(5) Jede stetige, reellwertige Funktion auf X nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

(6) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.

(7) Der metrische Raum X ist total beschränkt und vollständig.

Beweis. Der Übersicht halber organisieren wir den Beweis in drei Teilen, die wir als Lemmata 10.48, 10.49 und 10.50 formulieren. □

Lemma 10.48. — *Unter den Aussagen in Satz 10.47 gilt* (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (7) $\Longrightarrow$ (3).

Beweis. Für die Implikation $\underline{(3) \Longrightarrow (2)}$ betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ in X. Falls die Bildmenge $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist, so hat $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine konstante und insbesondere konvergente Teilfolge, und damit einen Häufungspunkt. Falls D unendlich ist, so besitzt D nach (3) einen Häufungspunkt $a \in X$. Wir zeigen, dass a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Wir müssen nachweisen dass ein $n \geq N$ mit $x_n \in B(a, \varepsilon)$ existiert. Sei $\varepsilon' > 0$ so gewählt, dass

$$B(a, \varepsilon') \setminus \{a\} \subseteq B(a, \varepsilon) \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Da a ein Häufungspunkt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(a, \varepsilon') \setminus \{a\} \subset B(a, \varepsilon)$, womit insbesondere $n > N$ sein muss.

Um die Implikation $\underline{(2) \implies (7)}$ zu zeigen, sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge. Nach (2) besistzt $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Unterfolge, und konvergiert nach Übung 6.28. Es bleibt zu zeigen dass X total beschränkt ist. Angenommen X sei nicht total beschränkt. Dann existiert ein $r > 0$ so, dass für jede endliche Teilmenge F von X die Vereinigung der Bälle $\{B(y, r) \mid y \in F\}$ nicht ganz X ist. Wähle $x_0 \in X$ beliebig, und $x_1, x_2, \ldots$ rekursiv so, dass

$$x_n \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} B(x_k, r)$$

gilt. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ hat keine konvergente Unterfolge, da für alle $n > m$ die Abschätzung $d(x_n, x_m) > r$ gilt, was der Annahme (2) widerspricht.

Für die Implikation $\underline{(7) \implies (3)}$, sei $D \subset X$ eine unendliche Teilmenge. Wir möchten eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in D mit paarweise verschiedenen Folgenglieder konstruieren, welche dann nach (7) konvergieren muss. Der Grenzwert dieser Folge ist dann ein Häufungspunkt von D. Da X total beschränkt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F_0 \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{y \in F_0} B(y, 1).$$

Sei $y_0 \in X$ mit $|B(y_0, 1) \cap D| = \infty$ und sei $D_0 = B(y_0, 1) \cap D$. Im nächsten Schritt schreiben wir $X = \bigcup_{y \in F_1} B(y, 2^{-1})$ für eine endliche Teilmenge $F_1 \subseteq X$, wählen ein $y_1 \in F_1$ mit $|B(y_1, 2^{-1}) \cap D_0| = \infty$ und setzen $D_1 = B(y_1, 2^{-1}) \cap D_0$. Fährt man so fort, erhält man eine absteigende Folge

$$D \supseteq D_0 \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \cdots$$

unendlicher Mengen mit $D_k \subseteq B(y_k, 2^{-k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wähle nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein beliebiges $x_n \in D_n$. Die resultierende Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge, da für $n \geq m$ die Abschätzung $d(x_n, x_m) < 2^{-n}$ gilt. □

Lemma 10.49. — *Unter den Aussagen in Satz 10.47 gilt* (4) $\iff$ (5) $\iff$ (3).

Beweis. Für die Implikation $\underline{(4) \implies (5)}$, sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen $M = \sup f(X)$ und nehmen per Widerspruch an, dass die Funktion f ihr Maximum nicht annimmt. Damit ist die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = (M - f(x))^{-1}$ wohldefiniert und stetig. Nach Annahme (4) gibt es ein $S > 0$ mit $g(x) \leq S$ oder äquivalenterweise $f(x) \leq M - \frac{1}{S}$ für alle $x \in X$. Dies widerspricht aber der Definition von M als Supremum.

Die Implikation $\underline{(5) \implies (4)}$ ist trivial.

Wir zeigen nun $\underline{(5) \implies (3)}$. Sei $D \subset X$ eine Teilmenge. Wir nehmen an, dass D keine Häufungspunkte besitzt, und möchten nachweisen, dass D endlich ist. Hierfür betrachten wir die Funktion $\eta : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\eta(x) = \sup\{\delta \geq 0 \mid |B(x, \delta) \cap D| \leq 1\}$$

für $x \in X$. In Worten ist $\eta(x)$ der Abstand von x zum zweit-nächstgelegenen Punkt von D. Da D keine Häufungspunkte besitzt, können wir für jedes $x \in X$ ein $\delta > 0$ finden mit $|B(x,\delta) \cap D| \leq 1$. Somit gilt $\eta(x) > 0$ für alle $x \in X$.

Wir behaupten, dass die Funktion $\eta : X \to \mathbb{R}$ stetig ist. Seien $x_1, x_2 \in X$. Falls $\varepsilon = \eta(x_1) - d(x_1, x_2) > 0$ ist, gilt $B(x_2, \varepsilon) \subseteq B(x_1, \eta(x_1))$ auf Grund der Dreiecksungleichung, also $\eta(x_2) \geq \varepsilon = \eta(x_1) - d(x_1, x_2)$. Falls hingegen $\varepsilon = \eta(x_1) - d(x_1, x_2) \leq 0$ ist, gilt dies ebenfalls. Es gilt also in jedem Fall $\eta(x_1) - \eta(x_2) \leq d(x_1, x_2)$. Auf Grund der Symmetrie zwischen x_1 und x_2 schliessen wir also auf $|\eta(x_1) - \eta(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$, was Stetigkeit von η impliziert.

Aus (5) folgt, dass die Funktion η ihr Minimum annimmt, sagen wir im Punkt $x_0 \in X$ mit Wert $r = \eta(x_0)$. Es gilt $r > 0$, und nach Definition von η enthält für alle $x \in D$ der Ball $B(x, r)$ keinen weiteren Punkt von D. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass D unendlich ist und werden einen Widerspruch ableiten. Sei also $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in D mit $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$. Zu $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ setzen wir

$$f(x) = \begin{cases} n\big(\frac{1}{4}r - d(x, x_n)\big) & \text{falls } x \in B(x_n, \frac{r}{4}) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Wahl von r gibt es für ein gegebenes $x \in X$ höchstens ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, \frac{r}{2})$, womit insbesondere die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Des Weiteren ist f stetig bei jedem $x \in X$, denn falls es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, \frac{r}{2})$ gibt, so ist $f(x) = 0 = f(y)$ für alle $y \in B(x, \frac{r}{4})$, und falls es doch ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, \frac{r}{2})$ gibt, so ist $f(y) = \max(0, n(\frac{1}{4}r - d(y, x_n)))$ für alle $y \in B(x, \frac{r}{4})$ und damit ebenso bei x stetig. Es gilt aber $f(x_n) = \frac{1}{4}nr$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit f unbeschränkt ist, was (5) widerspricht.

Wir zeigen schliesslich $\underline{(3) \implies (5)}$. Angenommen es gäbe eine unbeschränkte stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Indem wir gegebenenfalls f durch $-f$ ersetzen können wir annehmen, dass f nach oben unbeschränkt ist. Es existiert also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \geq n$. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ besitzt keine konvergente Teilfolge, da nach Stetigkeit von f für eine solche Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ auch die nach oben unbeschränkte Folge $(f(x_{n_k}))_{k=0}^{\infty}$ konvergieren müsste. Dies zeigt $\neg(5) \implies \neg(2)$ was aufgrund der Äquivalenz $(2) \iff (3)$ mit $(3) \implies (5)$ gleichbedeutend ist. □

Lemma 10.50. — *Unter den Aussagen in Satz 10.47 gilt* $(6) \implies (1) \implies (3) \wedge (5) \implies (6)$.

Beweis. Für die Implikation $(6) \implies (1)$ sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von X und $r > 0$ eine Lebesgue-Zahl für $\mathcal{U}$. Es existieren nach totaler Beschränktheit $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r)$. Für jeden solchen Ball $B(x_k, r)$ existiert nach Definition der Lebesgue-Zahl ein $U_k \in \mathcal{U}$ mit $B(x_k, r) \subseteq U_k$. Damit gilt $X = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$, und also ist $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

Anstatt $\underline{(1) \implies (2) \wedge (5)}$ können wir auch $(1) \implies (4)$ zeigen, da wir bereits wissen dass die Aussagen $(2), (4)$ und (5) äquivalent sind. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gilt

$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n)$ und somit

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((-n,n)).$$

Die Familie $\mathcal{U} = \{f^{-1}((-n,n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von X, womit nach (1) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{-1}((-n,n)) = X$ existiert. Es gilt also $|f(x)| < n$ für alle $x \in X$ wie behauptet.

Für die Implikation $\underline{(2) \wedge (5) \implies (6)}$, sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, für welche wir eine Lebesgue-Zahl finden wollen. Dazu betrachten wir die Hilfsfunktion $\eta : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\eta(x) = \sup\{\delta > 0 \mid \text{ Es existiert } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B(x,\delta) \subseteq U\}$$

Jedes Element $x \in X$ liegt in mindestend einer offenen Menge $U \in \mathcal{U}$, weshalb $\eta(x) > 0$ für alle $x \in X$ gilt. Wir behaupten, dass für alle $x_1, x_2 \in X$ die Ungleichung

$$d(x_1,x_2) \geq |\eta(x_1) - \eta(x_2)| \tag{10.2}$$

gilt, und also insbesondere die Funktion η stetig ist. Seien $x_1, x_2 \in X$ und sei $0 < \delta < \eta(x_1)$. Falls $\varepsilon = \delta - d(x_1,x_2)$ positiv ist, gibt es nach Wahl von δ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B(x_2,\varepsilon) \subseteq B(x_1,\delta) \subset U$. Somit ist $\eta(x_2) \geq \varepsilon = \delta - d(x_1,x_2)$, was auch für $\varepsilon \leq 0$ erfüllt ist. Da dies für alle $\delta < \eta(x_1)$ gilt, folgt daraus $\eta(x_2) \geq \eta(x_1) - d(x_1,x_2)$ oder in anderen Worten $d(x_1,x_2) \geq \eta(x_1) - \eta(x_2)$. Aus Symmetriegründen folgt (10.2) wie gewünscht.

Nach (5) existiert somit ein $x_0 \in X$ mit $\eta(x_0) = \min \eta(X)$. Wir behaupten, dass $r_0 := \frac{1}{2}\eta(x_0) > 0$ eine Lebesgue-Zahl für $\mathcal{U}$ ist. In der Tat gilt für jedes $x \in X$ die Ungleichung $r_0 < \eta(x_0) \leq \eta(x)$, womit ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B(x,r_0) \subseteq U$ existiert.

Es bleibt noch zu zeigen, dass X total beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$ und angenommen X lässt sich nicht durch endlich viele Bälle vom Radius $\varepsilon > 0$ überdecken. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Wir wählen rekursiv

$$x_n \in X \setminus \big(B(x_0,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n-1},\varepsilon)\big)$$

für alle $n \geq 1$, was nach der indirekten Annahme jeweils möglich ist. Somit erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $d(x_m,x_n) \geq \varepsilon$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. So eine Folge besitzt keine konvergente Teilfolge, was (2) widerspricht. □

Proposition 10.51. — *Seien X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Falls X kompakt ist, so ist f gleichmässig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Stetigkeit von f existiert für jedes $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass $f(B(x,\delta_x)) \subseteq B(f(x),\frac{\varepsilon}{2})$ gilt. Die Kollektion $\{B(x,\frac{1}{2}\delta_x) \mid x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X. Da X nach Annahme kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung dieser Überdeckung. Das heisst, es existieren $x_1,\ldots,x_n \in X$ mit

$$X = B(x_1,\tfrac{1}{2}\delta_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_n,\tfrac{1}{2}\delta_{x_n}).$$

Wir definieren $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$. Für $x, x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ existiert dann ein k mit $x \in B(x_k, \frac{1}{2}\delta_{x_k})$. Daraus folgt $x' \in B(x_k, \delta_{x_k})$ und damit erhalten wir

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f(x')) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was zu zeigen war. □

Definition 10.52. — Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, reellwertige Funktion auf einem metrischen Raum X. Für $x \in X$ ist die **Oszillation** oder **Schwankung** von f bei x durch

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \to 0} \Big(\sup f(B(x, \delta)) - \inf f(B(x, \delta)) \Big)$$

definiert.

10.53. — Diese Definition muss gerechtfertigt werden. Wir schreiben für $f : X \to \mathbb{R}$ und $x \in X$ und $\delta > 0$

$$\omega(f, x, \delta) = \sup f(B(x, \delta)) - \inf f(B(x, \delta)).$$

Supremum und Infimum rechterhand existieren, da f beschränkt ist. Für $0 < \delta_1 < \delta_2$ gilt die Inklusion $B(x, \delta_1) \subseteq B(x, \delta_2)$, was

$$\sup f(B(x, \delta_1)) \leq \sup f(B(x, \delta_2)) \qquad \text{und} \qquad \inf f(B(x, \delta_1)) \geq \inf f(B(x, \delta_2))$$

und damit auch $\omega(f, x, \delta_1) \leq \omega(f, x, \delta_2)$ impliziert. Insbesondere zeigt dies, dass der Grenzwert für $\delta \to 0$ in Definition 10.52 tatsächlich existiert. Die Funktion f ist genau dann stetig bei $x \in X$, wenn $\omega(f, x) = 0$ gilt. Der Fall $\eta = 0$ in der folgenden Proposition entspricht also gerade Proposition 10.51.

Proposition 10.54. — *Sei X eine kompakter metrischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Angenommen es gibt $\eta \geq 0$, so dass $\omega(f, x) \leq \eta$ für alle $x \in X$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$*

$$\omega(f, x, \delta) < \eta + \varepsilon$$

gilt.

Beweis. Angenommen die Aussage der Proposition trifft nicht zu. Sei also $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ mit $\omega(f, x, \delta) \geq \eta + \varepsilon$ existiert. Zu $n \in \mathbb{N}$ können wir also $x_n \in X$ mit $\omega(f, x_n, 2^{-n}) \geq \eta + \varepsilon$ wählen. Nach Definition von $\omega(f, x_n, 2^{-n})$ gibt es $x_n^+, x_n^- \in B(x_n, 2^{-n})$ mit

$$f(x_n^+) - f(x_n^-) > \eta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.3}$$

Da X kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ in X. Sei

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^{+} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^{-} \in X$$

deren Grenzwert. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es insbesondere ein k mit $x_{n_k}^{+}, x_{n_k}^{-} \in B(x,\delta)$. Die Ungleichung (10.3) impliziert $\omega(f,x,\delta) > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\delta > 0$ beliebig war folgt $\omega(f,x) \geq \eta + \frac{\varepsilon}{2}$, was unserer Voraussetzung widerspricht. □

Übung 10.55. — Beweisen Sie Proposition 10.54 unter Verwendung einer offenen Überdeckung und der Existenz einer Lebesgue-Zahl.

10.3.3 Der Satz von Heine-Borel

Wir haben bereits eine Version des Satzes von Heine-Borel gezeigt, als Satz 6.145. Wir werden diesen Satz mit Hilfe des Kompaktheitsbegriffs neu formulieren, und zwei Anwendungen dazu zeigen.

Lemma 10.56. — *Eine folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Sei X ein nicht-leerer metrischer Raum und $K \subseteq X$ folgenkompakt. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in K mit Grenzwert $x \in X$. Es existiert eine in K konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Da eine Teilfolge einer konvergenten Folge denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge besitzt, muss x in K liegen. Nach der Charakterisierung abgeschlossener Teilmengen aus Lemma 10.21 ist K abgeschlossen.

Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt, und angenommen K sei nicht beschränkt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $d(x_n, x_0) \geq n$. Da K folgenkompakt ist, existiert nun eine in K konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sei $x \in K$ ihr Grenzwert. Insbesondere gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n_k}, x) < 1$ für alle $k \geq N$ gilt. Damit ist aber für $k \geq N$

$$n_k \leq d(x_{n_k}, x_0) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_0) < 1 + d(x, x_0).$$

Dies ist ein Widerspruch, da $n_d \to \infty$ für $d \to \infty$, und somit ist K beschränkt. □

Satz 10.57 (Heine-Borel). — *Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Ist K kompakt, dann ist K nach Lemma 10.56 abgeschlossen und beschränkt. Für die Umkehrung zeigen wir, dass K folgenkompakt ist. Sei also $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in K. Da K beschränkt ist, ist die Folge beschränkt und besitzt nach Satz 6.145 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$. Der Grenzwert $x \in \mathbb{R}^d$ dieser Teilfolge muss in K liegen, da nach Lemma 10.21 K abgeschlossen ist. □

10.58. — Als eine erste einfache Anwendung des Satzes von Heine-Borel möchten wir eine natürliche Norm auf dem Vektorraum $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ der reellen $m \times n$-Matrizen definieren. Wir bemerken zuerst, dass $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ als reeller Vektorraum zu $\mathbb{R}^{mn}$ isomorph ist. Insbesondere kann man mit einer beliebigen Norm auf $\mathbb{R}^{mn}$ eine Norm auf $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ induzieren, und umgekehrt. Alle solche Normen sind nach Satz 6.147 äquivalent, womit wir nach Übung 10.28 eine kanonische induzierte Topologie auf $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ erhalten.

Übung 10.59. — Zeigen Sie, dass $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ definiert. Die induzierte Norm nennt man die **Hilbert-Schmidt-Norm** auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Identifizieren Sie die dazugehörige Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$.

Definition 10.60. — Die **Operatornorm** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\left\{\|Ax\|_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_2 \leq 1\right\}$$

definiert, wobei $\|\cdot\|_2$ für die Euklidische Norm steht.

Proposition 10.61. — *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann definiert $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ in der Tat eine Norm auf dem Vektorraum $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. Des Weiteren gilt*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2 \qquad \textit{und} \qquad \|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}. \tag{10.4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir schreiben der Kürze halber $\overline{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Nach dem Satz von Heine Borel 10.57 ist $\overline{B}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Da die Funktion $\overline{B}_n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto \|Ax\|_2$ als Verknüpfung von stetigen Funktionen stetig ist, ist sie auf Grund von Satz 10.47 beschränkt, womit $\|A\|_{\mathrm{op}} < \infty$ folgt.

Definitheit, also $\|A\|_{\mathrm{op}} = 0 \iff A = 0$ sowie die Relationen

$$\|\lambda A\|_{\mathrm{op}} = |\lambda|\|A\|_{\mathrm{op}} \qquad \text{und} \qquad \|A + B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} + \|A\|_{\mathrm{op}}$$

folgen direkt aus der Definition der Operatornorm und den entsprechenden Eigenschaften der Euklidischen Norm.

Für linke Ungleichung in (10.4) stellt man fest, dass im Fall $x = 0$ nichts zu beweisen ist. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$\|Ax\|_2 = \left|A\tfrac{x}{\|x\|_2}\right| \|x\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|_2.$$

Für die zweite Ungleichung in (10.4) berechnet man $\|ABx\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|Bx\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$, für alle $x \in \overline{B}_n$, womit die Behauptung folgt. □

10.62. — Eine zweite Anwendung des Satzes von Heine-Borel ist ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes nichtkonstante

Polynom mit komplexen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle besitzt. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass der Körper $\mathbb{C}$ **algebraisch abgeschlossen** ist. Polynomdivision mit Rest und Induktion zeigen, dass man jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad $n > 0$ als Produkt eines Skalars und n Linearfaktoren schreiben kann, also

$$f(T) = a \prod_{j=1}^{n} (T - \alpha_j) \tag{10.5}$$

mit $a \in \mathbb{C}^\times$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Für den Fundamentalsatz der Algebra gibt es verschiedene Beweise; einige davon beruhen auf komplexer Analysis, andere auf algebraischer Topologie. Wir werden hier das asymptotische Verhalten von Polynomen, den Satz von Heine-Borel und die Polarzerlegung komplexer Zahlen verwenden.

Auch für Polynome mit reellen Koeffizienten kann ein Fundamentalsatz formuliert werden. Wir bemerken hierfür, dass für jedes $f \in \mathbb{R}[x]$ mit einer Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ auch $\overline{\alpha}$ eine Nullstelle ist. In der Zerlegung von f in Linearfaktoren in (10.5) sieht man also zu jeder nicht reellen Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ den Faktor

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + |\alpha|^2 = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$$

stehen. Wendet man diese Einsicht auf jede echt komplexe Nullstelle von f an, so erhält man, dass f als Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 und vom Grad 2 geschrieben werden kann. Wir haben dies implizit bereits bei der Besprechung der Integration von rationalen Funktionen verwendet.

Satz 10.63 (Fundamentalsatz der Algebra). — *Jedes nichtkonstante Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $f \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom mit Grad $n > 0$. Falls $f(0) = 0$ ist, so haben wir bereits eine Nullstelle gefunden. Also angenommen $M = 2|f(0)| > 0$. Da f nicht konstant ist, existiert nach Proposition 4.15 ein $R \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ auch $|f(z)| \geq M$ gilt. Nach dem Satz von Heine-Borel 10.57 ist

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

eine kompakte Teilmenge. Wir wenden nun die Existenz des Minimalwertes in Satz 10.47 auf die stetige Funktion $z \in K \mapsto |f(z)| \in \mathbb{R}$ an, und finden ein $z_0 \in K$ mit $|f(z_0)| = \min\{|f(z)| \mid z \in K\}$. Da $|f(0)| = \frac{M}{2}$, gilt die Ungleichung $|f(z_0)| < M$. Da auch $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus K$ gilt, erhalten wir damit $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir behaupten, dass z_0 eine Nullstelle von f ist. Wir nehmen stattdessen an, dass $|f(z_0)| > 0$ gilt, und führen dies zu einem Widerspruch. Wir schreiben f als Potenzreihe um z_0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - z_0)^k$$

mit $b_0 = f(z_0)$, $b_1 = f'(z_0)$, $\dots$, $b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \in \mathbb{C}$. Die Existenz dieser Darstellung folgt mittels Division mit Rest und Induktion nach $n = \deg(f)$. Per Annahme an z_0 gilt $b_0 \neq 0$. Sei $\ell \geq 1$ der kleinste Index ≥ 1 mit $b_\ell \neq 0$. Wir setzen $z = z_0 + r\exp(i\varphi)$ für ein festes $\varphi \in \mathbb{R}$, für welches wir später eine genaue Wahl treffen, und ein variierendes $r > 0$. Es gilt

$$f(z_0 + re^{i\varphi}) = b_0 + b_\ell r^\ell e^{i\ell\varphi} + O(r^{\ell+1}) = b_0 \left(1 + \tfrac{b_\ell}{b_0} r^\ell e^{i\ell\varphi}\right) + O(r^{\ell+1})$$

für $r \to 0$. Wir schreiben $\frac{b_\ell}{b_0} = se^{i\psi}$ und wählen $\varphi = \frac{-\psi+\pi}{\ell}$. Dann gilt $e^{i(\ell\varphi+\psi)} = -1$ und

$$|f(z_0 + re^{i\varphi})| = \left|b_0 \left(1 - sr^\ell\right) + O(r^{\ell+1})\right| \leq |b_0| \left(1 - sr^\ell\right) + O(r^{\ell+1})$$

für $r \to 0$. Für genügend kleine $r > 0$ ist diese obere Schranke aber kleiner als $|b_0|$, was einen Widerspruch zu $|f(z_0)| = |b_0| = \min\{|f(z)| \mid z \in K\}$ darstellt. Dies beweist, dass $f(z_0) = 0$ gelten muss. □

Übung 10.64. — Sei $\mathbb{K} \supset \mathbb{C}$ ein Körper, für den die Körperoperationen auf $\mathbb{C}$ mit den üblichen Körperoperationen von $\mathbb{C}$ selbst übereinstimmen. Man nennt $\mathbb{K}$ eine **Körpererweiterung** von $\mathbb{C}$. Dann lässt sich $\mathbb{K}$ auf natürliche Weise als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auffassen. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{K}$ automatisch gleich $\mathbb{C}$ selbst ist, falls die Dimension von $\mathbb{K}$ über $\mathbb{C}$ endlich ist.

Übung 10.65. — Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, die sich lokal durch Potenzreihen darstellen lässt (eine analytische Funktion). Genauer soll für jedes $x_0 \in U$ ein $r > 0$ mit $B(x_0, r) \subset U$ existieren, so dass f auf $B(x_0, r)$ gleich einer Potenzreihe um x_0 mit Konvergenzradius grösser gleich r ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ kein Minimum auf U annimmt.

10.4 Topologische Vektorräume

10.4.1 Topologische Vektorräume

Wir kennen bereits verschiedene Normen auf Vektorräumen V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Jede Norm induziert eine Metrik, und damit auch eine Topologie auf V. Wie man leicht nachprüft, siehe nachfolgende Proposition 10.67, haben solche Topologien die Eigenschaft, dass die Abbildungen

$$m : \mathbb{R} \times V \to V \qquad \text{und} \qquad s : V \times V \to V$$

gegeben durch $m(a, v) = av$ und $s(v, w) = v + w$ stetig sind, und zwar bezüglich der Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times V$ beziehungsweise auf $V \times V$. Wir machen diese Eigenschaft zu einer Definition. Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ den Körper der reellen Zahlen, oder den Körper der komplexen Zahlen. Wir versehen $\mathbb{K}$ mit der üblichen, durch den Absolutbetrag induzierten Topologie.

Definition 10.66. — Ein **topologischer Vektorraum** über $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ zusammen mit einer Hausdorff'schen Topologie τ auf V, derart, dass die Abbildungen

$$m : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \text{und} \qquad s : V \times V \to V \tag{10.6}$$

gegeben durch $m(a, v) = av$ und $s(v, w) = v + w$ stetig sind, bezüglich der Produkttopologie auf $\mathbb{K} \times V$ beziehungsweise auf $V \times V$.

Proposition 10.67. — *Sei V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, versehen mit der Topologie die durch die Metrik $d(v, w) = \|v - w\|$ induziert wird. Dann sind die Abbildungen* (10.6) *stetig, und V wird mit dieser Topologie zu einem topologischen Vektorraum.*

Beweis. Wir prüfen Stetigkeit der Skalarmultiplikation $m : \mathbb{K} \times V \to V$. Sei $U \subseteq V$ offen, und sei $(\lambda, v) \in m^{-1}(U)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B(\lambda v, \varepsilon) \subseteq U$ gilt, mit

$$B(\lambda v, \varepsilon) = \{v' \in V \mid \|\lambda v - v'\| < \varepsilon\}.$$

Sei $\delta > 0$ so, dass $\delta(|\lambda| + \delta + \|v\|) < \varepsilon$ gilt. Dann gilt für alle $\lambda' \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda'| < \delta$ und alle $v' \in V$ mit $\|v - v'\| < \delta$

$$\begin{aligned}\|\lambda v - \lambda' v'\| &= \|\lambda v - \lambda v' + \lambda v' - \lambda' v' - \lambda' v + \lambda' v\| \\ &\leq |\lambda|\|v - v'\| + |\lambda - \lambda'|\|v' - v\| + |\lambda - \lambda'|\|v\| \leq \delta(|\lambda| + \delta + \|v\|) < \varepsilon\end{aligned}$$

was insbesondere

$$B(\lambda, \delta) \times B(v, \delta) \subseteq m^{-1}(U)$$

zeigt. Da $(\lambda, v) \in m^{-1}(U)$ beliebig war zeigt dies, dass $m^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K} \times V$ offen für die Produkttopologie ist, und da $U \subseteq V$ beliebig war zeigt dies, dass m stetig ist. Als nächstes zeigen

wir Stetigkeit der Addition s. Sei $U \subseteq V$ offen, und sei $(w, v) \in m^{-1}(U)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass dass $B(v + w, \varepsilon) \subseteq U$. Setze $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ Dann gilt für alle $v' \in B(v, \delta)$ und alle $w' \in B(w, \delta)$

$$\|(v' + w') - (v + w)\| \leq \|v' - v\| + \|w' - w\| \leq 2\delta = \varepsilon$$

was zeigt, dass

$$B(v, \delta) \times B(w, \delta) \subseteq s^{-1}(U)$$

gilt. Da $(v, w) \in s^{-1}(U)$ beliebig war zeigt dies, dass $s^{-1}(U) \subseteq V \times V$ offen für die Produkttopologie ist, und da $U \subseteq V$ beliebig war zeigt dies, dass s stetig ist. □

Proposition 10.68. — *Sei K ein kompakter metrischer Raum, und es bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$. Dann definiert*

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_2 \mid x \in K\} \tag{10.7}$$

eine Norm auf $C(K, \mathbb{R}^d)$, und $C(K, \mathbb{R}^d)$ ist bezüglich dieser Norm vollständig. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ in $C(K, \mathbb{R}^d)$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen $f \in C(K, \mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $(f_n)_{n=0}^\infty$ gleichmässig gegen f konvergiert, das heisst, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und alle $x \in K$ die Abschätzung $\|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon$ gilt.

Die Norm $\|\cdot\|_\infty$ wird **Supremumsnorm** genannt. Die davon induzierte Topologie auf $C(K)$ heisst **Topologie der gleichmässigen Konvergenz**.

Beweis. Die Funktion $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ist also $f : K \to \mathbb{R}^d$ stetig, so ist die durch $x \mapsto \|f\|_2$ erklärte reellwertige Funktion auf K ebenfalls stetig und nimmt nach Satz 10.47 ihr Maximum auf K an, was zeigt, dass das Supremum in (10.7) endlich ist. Dass durch (10.7) eine Norm definiert, also Definitheit, Homogneität und Dreiecksungleichung wie in Definition 6.125 verlangt, folgt aus entsprechenden Eigenschaften der euklidischen Norm.

Wir zeigen, dass $C(K, \mathbb{R}^d)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist. Sei $(f_n)_{n=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $C(K, \mathbb{R}^d)$. Für $x \in K$ ist dann wegen

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 \leq \|f_m - f_n\|_\infty$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n(x))_{n=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^d$. Da $\mathbb{R}$ nach Satz 6.66 vollständig ist existiert der Grenzwert dieser Folge. Wir definieren eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}^d$ durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

und behaupten, dass f stetig ist und dass die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^\infty$ gleichmässig gegen f strebt. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_m(x) - f_n(x)\|_2 \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ gilt für alle $n, m \geq N$ und $x \in K$. Mit $m \to \infty$ folgt daraus $\|f_n(x) - f(x)\|_2 \leq \varepsilon$ für alle $x \in K$ und $n \geq N$, das heisst $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(f_n)_{n=0}^\infty$ gleichmässig gegen f.

Wir überprüfen, dass f stetig ist. Sei also $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\|f_N - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Für jedes $x_0 \in K$ gibt es auf Grund der Stetigkeit von f_N bei x_0 ein $\delta > 0$, so dass $\|f_N(x) - f_N(x_0)\|_2 \leq \varepsilon$ für alle $x \in K$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Für alle $x \in K$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt also

$$\|f(x) - f(x_0)\|_2 \leq \|f(x) - f_N(x)\|_2 + \|f_N(x) - f_N(x_0)\|_2 + \|f_N(x_0) - f(x_0)\|_2 \leq 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Stetigkeit von f bei $x_0 \in K$.

Dass f_n für $n \to \infty$ genau dann bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen f strebt, wenn f_n für $n \to \infty$ gleichmässig gegen f strebt ist klar. In der Tat ist $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ äquivalent dazu, dass $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in K$ gilt. Setzt man dies in die Definitionen der beiden Konvergenzbegriffe ein, so erhält man die behauptete Äquivalenz. □

Übung 10.69. — Sei $X = [a, b]$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ in $\mathbb{R}$. Wir betrachten den Vektorraum $V = C([a, b])$ und definieren für reelle $p \geq 1$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $f \in V$. Zeigen Sie, dass für $q > p \geq 1$ die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ verschiedene Topologien induzieren.

10.4.2 Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Wir betrachten im Folgenden Funktionen mit Werten im Vektorraum $\mathbb{R}^d$, den wir mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ versehen. Die Wahl von $\|\cdot\|_2$ als Standardnorm auf $\mathbb{R}^d$ ist allerdings belanglos, insbesondere hängt die folgende Definition nicht davon ab.

Definition 10.70. — Sei D eine Menge, und sei V ein Unterraum des Vektorraums aller $\mathbb{R}^d$-wertigen Funktionen auf D. Die **Topologie der punktweisen Konvergenz** ist die Topologie auf V, deren offene Mengen $U \subseteq V$ wie folgt charakterisiert sind: Für jedes $f \in U$ existiert eine endliche Teilmenge $T \subseteq D$ und $\varepsilon > 0$, so, dass die sogenannte **Standardumgebung**

$$B\big(f, T, \varepsilon\big) = \{f' \in V \mid \|f(x) - f'(x)\|_2 < \varepsilon \text{ für alle } x \in T\} \tag{10.8}$$

in U enthalten ist.

10.71. — Wir müssen überprüfen, dass die in der Definition beschrieben Familie von Teilmengen von V tatsächlich eine Topologie ist. Der Nachweis funktioniert genau wie in 10.18, wo wir gezeigt haben, dass die durch eine Metrik gegebene Topologie tatsächlich eine Topologe ist. Die Standardumgebungen $B(f, T, \varepsilon)$ übernehmen hierbei die Rolle offener Bälle. Folgende Aussage über Bälle ist dabei wichtig: Gegeben zwei Standardumgebungen $U_1 = B(f_1, T_1, \varepsilon_1)$

und $U_2 = B(f_2, T_2, \varepsilon_2)$, dann existiert zu jedem $f \in U_1 \cap U_2$ eine Standardumgebung $B(f, T, \varepsilon)$ so dass

$$B(f, T, \varepsilon) \subseteq B(f_1, T_1, \varepsilon_1) \cap B(f_2, T_2, \varepsilon_2)$$

gilt. Dazu genügt es $T = T_1 \cup T_2$ und $\varepsilon > 0$ so klein zu wählen, dass für alle $x \in T_1$ die Abschätzung $\varepsilon_1 - \|f(x) - f_1(x)\|_2 > \varepsilon$ und für alle für alle $x \in T_1$ die Abschätzung $\varepsilon_2 - \|f(x) - f_2(x)\|_2 > \varepsilon$ gilt. Es folgt daraus insbesondere, dass Teilmengen von V der Form (10.8) offen sind.

Proposition 10.72. — *Sei D eine Menge, und sei V der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf D. Die Topologie der punktweisen Konvergenz ist hausdorff'sch und kompatibel mit Skalarmultiplikation und Vektorsumme. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $f \in V$ bezüglich dieser Topologie wenn und nur wenn die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ punktweise gegen f konvergiert.*

Beweis. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Elemente von V. Sind f und g verschieden, so existiert ein $x_0 \in D$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x_0) - g(x_0)| > 2\varepsilon$. Dann sind $B(f, \{x_0\}, \varepsilon)$ und $B(g, \{x_0\}, \varepsilon)$ disjunkte Umgebungen von f und g. Kompatibilität mit Skalarmultiplikation und Vektorsumme prüft man essentiell wie im Fall normierter Vektorräume. Sei also $U \subseteq V$ offen, und sei $(\lambda, f) \in m^{-1}(U)$. Es existiert eine endliche Menge $T \subseteq D$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $B(\lambda f, T, \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Sei $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in T$ die Abschätzung

$$\delta(|\lambda| + \delta + \|f(x)\|_2) < \varepsilon$$

gilt. Dann gilt für alle $\lambda' \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda - \lambda'| < \delta$ und alle $f' \in B(f, T, \delta)$

$$\begin{aligned}
&\|\lambda f(x) - \lambda' f'(x)\|_2 = \|\lambda f(x) - \lambda f'(x) + \lambda f'(x) - \lambda' f'(x) - \lambda' f(x) + \lambda' f(x)\|_2 \\
&\leq |\lambda| \|f(x) - f'(x)\|_2 + |\lambda - \lambda'| \|f'(x) - f(x)\|_2 + |\lambda - \lambda'| \|f(x)\|_2 \leq \delta(|\lambda| + \delta + \|f(x)\|_2) < \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $x \in T$, was insbesondere

$$B(\lambda, \delta) \times B(f, T, \delta) \subseteq m^{-1}(U)$$

zeigt. Da $(\lambda, f) \in m^{-1}(U)$ beliebg war zeigt dies, dass $m^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R} \times V$ offen für die Produkttopologie ist, und da $U \subseteq V$ beliebig war zeigt dies, dass m stetig ist. Als nächstes zeigen wir Stetigkeit der Addition s. Sei $U \subseteq V$ offen, und sei $(f, g) \in m^{-1}(U)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $T \subseteq D$ so, dass $B(f + g, T, \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Setze $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann gilt für alle $f' \in B(f, T, \delta)$ und alle $g' \in B(g, T, \delta)$

$$\|(f' + g')(x) - (f + g)(x)\|_2 \leq \|f'(x) - f(x)\| + \|g'(x) - g(x)\|_2 \leq 2\delta = \varepsilon$$

für alle $x \in T$, was zeigt, dass

$$B(f, T, \delta) \times B(g, T, \delta) \subseteq s^{-1}(U)$$

gilt. Da $(f,g) \in s^{-1}(U)$ beliebig war zeigt dies, dass $s^{-1}(U) \subseteq V \times V$ offen für die Produkttopologie ist, und da $U \subseteq V$ beliebig war zeigt dies, dass s stetig ist.

Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in V die bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz gegen eine Funktion f konvergiert. Es existiert also für jede endliche Teilmenge $T \subseteq D$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f_n \in B(f,T,\varepsilon)$ für alle $n \geq N$. Insbesondere existiert für jedes $x \in D$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, was gerade bedeutet, dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ Punktweise gegen f konvergiert.

Umgekehrt, sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in V Punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Sei $T \subseteq D$ endlich und $\varepsilon > 0$. Dann existiert für jedes $x \in T$ ein $N_x \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon$ für alle $n \geq N_x$ gilt. Setzt man $N = \max\{N_x \mid x \in T\}$, so folgt daraus $f_n \in B(f,T,\varepsilon)$ für alle $n \geq N$ was gerade bedeutet, dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz gegen f konvergiert. □

10.4.3 Die Topologie kompakten Konvergenz

Wir betrachten im Folgenden stetige Funktionen mit Werten im Vektorraum $\mathbb{R}^d$, den wir wiederum mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ versehen.

Definition 10.73. — Sei X ein topologischer Raum, und sei $V = C(X, \mathbb{R}^d)$ der Vektorraum aller $\mathbb{R}^d$-wertigen, stetigen Funktionen auf X. Die **Topologie der kompakten Konvergenz** ist die Topologie auf V, deren offene Mengen $U \subseteq V$ wie folgt charakterisiert sind: Für jedes $f \in U$ existiert eine kompakte Teilmenge $T \subseteq X$ und $\varepsilon > 0$, so, dass die sogenannte **Standardumgebung**

$$B\big(f,T,\varepsilon\big) = \{f \in V \mid \|f(x) - f'(x)\|_2 < \varepsilon \text{ für alle } x \in T\} \tag{10.9}$$

in U enthalten ist.

10.74. — Falls X die diskrete Topologie trägt, so sind alle Funktionen $f : X \to \mathbb{R}^d$ stetig, und kompakte Teilmengen von X sind gerade die endlichen Teilmengen. In diesem Fall beschreibt Definition 10.73 also die Topologie der punktweisen Konvergenz. Wir müssen wiederum überprüfen, dass die in der Definition beschrieben Familie von Teilmengen von V tatsächlich eine Topologie ist. Es genügt wie gehabt, folgende Aussage über Bälle zu zeigen: Gegeben zwei Standardumgebungen $U_1 = B(f_1, T_1, \varepsilon_1)$ und $U_2 = B(f_2, T_2, \varepsilon_2)$, dann existiert für jedes $f \in U_1 \cap U_2$ eine Standardumgebung $B(f,T,\varepsilon)$ so dass

$$B(f,T,\varepsilon) \subseteq B(f_1,T_1,\varepsilon_1) \cap B(f_2,T_2,\varepsilon_2)$$

gilt. Dazu genügt es $T = T_1 \cup T_2$ und $\varepsilon > 0$ so klein zu wählen, dass für alle $x \in T_1$ die Abschätzung $\varepsilon_1 - \|f(x) - f_1(x)\|_2 > \varepsilon$ und für alle für alle $x \in T_1$ die Abschätzung $\varepsilon_2 - \|f(x) - f_2(x)\|_2 > \varepsilon$ gilt. So ein $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von T_1 und T_2. Es folgt daraus insbesondere, dass Teilmengen von V der Form (10.9) offen sind.

Proposition 10.75. — *Sei X ein topologischer Raum, und sei V der Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X. Die Topologie der kompakten Konvergenz ist hausdorff'sch und kompatibel mit Skalarmultiplikation und Vektorsumme. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $f \in V$ bezüglich dieser Topologie wenn und nur wenn für jede kompakte Teilmenge $T \subseteq X$ die Folge von Funktionen $(f_n|_T)_{n=0}^{\infty}$ auf T gleichmässig gegen $f|_T$ konvergiert.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Proposition 10.72, und dem Leser als Übung überlassen. □

10.5 Zusammenhang

10.5.1 Topologischer Zusammenhang

Definition 10.76. — Sei X ein topologischer Raum. Wir nennen X **zusammenhängend**, falls es ausser $\varnothing \subseteq X$ und $X \subseteq X$ keine Teilmengen von X gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heist **Zusammenhangskomponente** von X falls U nichtleer, offen, abgeschlossen und zusammenhängend ist.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heisst zusammenhängend falls A bezüglich der Unteraumtopologie als eigenständiger topologischer Raum zusamenhängend ist. Im gleichen Sinn sprechen wir von Zusammenhangskompoenten von Y.

Lemma 10.77. — *Sei X ein topologischer Raum und seien Y_1 und Y_2 zusammenhängende Teilräume. Falls der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ nicht-leer ist, dann ist die Vereingung $Y_1 \cup Y_2$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei A eine nicht-leere offene und abgeschlossene Teilmenge von $Y_1 \cup Y_2$. Dann ist $A \cap Y_j$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge von Y_j für $j = 1, 2$. Da A nicht-leer ist, ist einer dieser beiden Schnitte nicht-leer, sagen wir $A \cap Y_1$ sei nicht-leer. Da Y_1 zusammenhängend ist, folgt $A \cap Y_1 = Y_1$, also $Y_1 \subset A$. Da aber $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$ folgt $A \cap Y_2 \neq \varnothing$ und somit genauso $Y_2 \subset A$. Zusammenfassend ergibt sich $A = Y_1 \cup Y_2$. Dies beweist, dass $Y_1 \cup Y_2$ zusammenhängend ist. □

Übung 10.78. — Verallgemeinern Sie Lemma 10.77 für beliebige Vereinigungen.

Proposition 10.79. — *Eine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist.*

Beweis. Das ist essentiell Übung 4.60. Angenommen $X \subseteq \mathbb{R}$ ist kein Intervall. Nach der Charakterisierung von Intervallen in Übung 3.78 existieren dann reelle Zahlen $x_1 < y < x_2$ mit $x_1, x_2 \in X$ und $y \notin X$. Die Teilmengen

$$U_1 = (-\infty, y) \cap X = (-\infty, y] \cap X \qquad \text{und} \qquad U_2 = (y, \infty) \cap X = [y, \infty) \cap X$$

von X sind offen und abgeschlossen, nicht leer, und es gilt $X = U_1 \cup U_2$. Somit ist X nicht zusammenhängend.

Sei nun $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Angenommen es gäbe nicht leere, offene und abgeschlossene Teilmengen $Y_1 \subseteq X$ und $Y_2 \subseteq X$, mit $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ und $Y_1 \cup Y_2 = X$. Wir wählen $x_1 \in Y_1$ und $x_2 \in Y_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x_1 < x_2$ gilt. Da X ein Intervall ist, folgt daraus $[x_1, x_2] \subseteq X$. Da $Y_1 \subset X$ offen und $x_1 \in Y_1$ ist, ist $Y_1 \cap (x_1, x_2)$ nicht-leer. Wir definieren $s \in [x_1, x_2]$ als

$$s = \sup(Y_1 \cap [x_1, x_2]) = \sup(Y_1 \cap (x_1, x_2))$$

Des Weiteren ist $Y_1 \cap (x_1, x_2)$ eine offene Teilmenge von (x_1, x_2) und daher eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Lemma 10.26 zeigt, dass $s \notin Y_1$. Da $Y_1 \subset X$ abgeschlossen ist, folgt zum Beispiel aus Lemma 10.21 dass $Y_1 \cap [x_1, x_2]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Daher zeigt Lemma 10.26, dass $s \in Y_1$ ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass es Teilmengen Y_1 und Y_2 mit den vorausgesetzten Eigenschaften nicht geben kann. □

Proposition 10.80. — *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Falls X zusammenhängend ist, dann ist das Bild $f(X)$ ein zusammenhängender Teilraum von Y.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f : X \to Y$ surjektiv ist, indem wir $f : X \to Y$ durch die stetige, surjektive Abbildung $X \to f(X),\ x \mapsto f(x)$ ersetzen. Angenommen Y ist nicht zusammenhängend. Dann existiert eine offene und abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ mit $A \neq \varnothing$ und $A \neq Y$. Das Urbild $f^{-1}(A)$ von A unter f ist somit aufgrund der Stetigkeit von f ebenfalls offen und abgeschlossen. Da aber X zusammenhängend ist, muss entweder $f^{-1}(A) = \varnothing$ oder $f^{-1}(A) = X$. Dann gilt aber $A = \varnothing$ respektive $A = Y$ wegen Surjektivität von f, was der Annahme an A widerspricht. □

Korollar 10.81 (Zwischenwertsatz). — *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in I$ zwischen a und b, so dass $f(x) = c$ gilt.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a < b$ annehmen. Wir wenden Proposition 10.80 auf die stetige Abbildung $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ an. Demnach ist $f([a, b])$ zusammenhängend, da nach Proposition 10.79 das Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist. Wieder nach Proposition 10.79 muss $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sein. Da $f(a), f(b) \in f([a, b])$ gilt, liegen alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ im Bild von $f|_{[a,b]}$. □

Übung 10.82. — Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes: Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Seien $a, b \in X$. Dann existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in X$ mit $f(x) = c$.

10.5.2 Wegzusammenhang

10.83. — Sei X ein topologischer Raum. Ein **Weg** oder **Pfad** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$. Wir nennen $\gamma(0)$ den **Startpunkt** und $\gamma(1)$ den **Endpunkt**. Dabei sagen wir auch, dass γ ein Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ist. Einen Pfad γ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ nennen wir **geschlossen**, oder auch eine **Schlaufe**.

Definition 10.84. — Wir nennen einen topologischen Raum X **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ ein Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ von $x = \gamma(0)$ nach $y = \gamma(1)$ existiert.

Lemma 10.85. — *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei X ein unzusammenhängender topologischer Raum. Dann gibt es nicht leere, offene und abgeschlossene Teilmengen U_1 und U_2 von X mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ und $U_1 \cup U_2 = X$. Sei $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$. Falls X entgegen der Behauptung wegzusammenhängend ist, so existiert ein Weg $\gamma_y : [0,1] \to X$ von x_1 nach x_2. Dann wären allerdings $V_1 = \gamma^{-1}(U_1)$ und $V_2 = \gamma^{-1}(U_2)$ nicht leere, offene und abgeschlossene Teilmengen von $[0,1]$ mit $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ und $V_1 \cup V_2 = [0,1]$. Solche Teilmengen kann es nicht geben, da nach Proposition 10.79 das Intervall $[0,1]$ zusammenhängend ist. □

Übung 10.86. — Skizzieren Sie den Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$X = \{0\} \times [-1,1] \cup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \mid t > 0\}$$

und zeigen Sie, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Proposition 10.87. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge. Dann ist U genau dann wegzusammenhängend, wenn U zusammenhängend ist.*

Beweis. Ist U wegzusammenhängend, so ist U auch zusammenhängend nach Lemma 10.85. Sei nun U zusammenhängend, nicht leer, und $x_0 \in U$ ein fester Punkt. Wir definieren die Teilmenge

$$G = \{x \in U \mid \text{ es gibt einen Weg in } U \text{ von } x_0 \text{ nach } x\}$$

und wollen zeigen, dass $G = U$ gilt. Da nach Voraussetzung U zusammenhängend und G nichtleer ist, genügt es zu zeigen, dass G sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Sei $x \in G$ und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg von x_0 nach x. Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq U$. Für ein $y \in B(x,r)$ liegt der gerade Weg $t \mapsto (1-t)x + ty$, der x mit y verbindet, in U. Verkettet man disese Wege, so erhält man den Weg

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (2-2t)x + (2t-1)y & \text{falls } \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

von x_0 nach y. Also liegt $y \in G$ und, da y beliebig war folgt $B(x,r) \subseteq G$. Wir haben somit gezeigt, dass G offen ist.

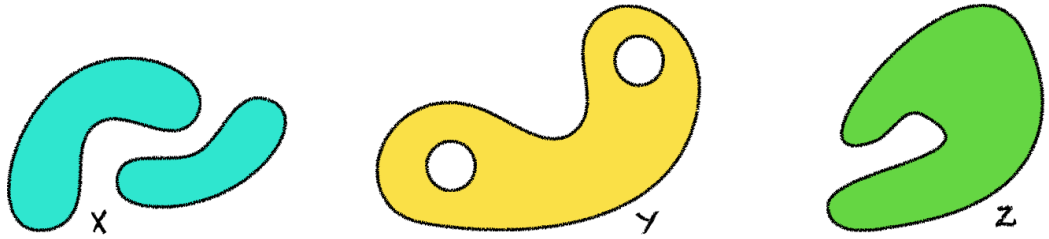
Mit einem ähnlichen Argument zeigt man, dass $U \setminus G$ offen ist. Ist $x \notin G$ und $r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq U$, so liegen alle Punkte in $B(x,r)$ auch nicht in G. Denn wäre $y \in G \cap B(x,r)$, so könnte man durch eine Verkettung von Wegen wie oben auch x mit x_0 durch einen Weg verbinden. Also ist $B(x,r) \subseteq U \setminus G$ und $U \setminus G$ ist offen, also G abgeschlossen. □

Korollar 10.88. — *Für alle $n \ge 1$ und $r > 0$ sind der topologische Raum $\mathbb{R}^n$, sowie die Teilräume $B(x,r)$ und $\overline{B(x,r)}$ von $\mathbb{R}^n$, zusammenhängend.*

Korollar 10.89. — *Für alle $n \ge 2$ ist der topologische Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend.*

10.5.3 Einfach zusammenhängende Räume

Ein zusammenhängender topologischer Raum X heisst **einfach zusammenhängend** falls man jeden Weg γ von x_0 nach x_1 in X durch stetiges „deformieren“ in jeden anderen Weg von x_0 nach x_1 überführen kann.



Figur 10.1: Ein nicht zusammenhängender Raum X, ein zusammenhängender aber nicht einfach zusammenhängender Raum Y, und ein einfach zusammenhängender Raum Z.

Definition 10.90. — Sei X ein topologischer Raum, und seien γ_0 und γ_1 Pfade in X mit demselben Anfangspunkt $x_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und demselben Endpunkt $x_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Eine **Homotopie** von γ_0 nach γ_1 ist eine stetige Abbildung $H : [0,1]^2 \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \qquad \text{und} \qquad H(s,0) = x_0, \quad H(s,1) = x_1$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $s \in [0,1]$. Wir sagen γ_1 sei homotop zu γ_0, falls es eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 gibt.

10.91. — Sei H eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 wie in der Definition. Für jedes fixe $s \in [0,1]$ ist die Abbildung $\gamma_s : t \mapsto H(s,t)$ ein Pfad von x_0 nach x_1. Für $s = 0$ und $s = 1$ erhält man nach Definition gerade die gegebenen Pfade γ_0 und γ_1. Wir können auf diese Art die Homotopie H als eine durch $s \in [0,1]$ parametrisierte Familie von Pfaden ansehen, die stetig von Parameter s abhängt.

Übung 10.92. — Sei X ein topolopgischer Raum, seien $x_0, x_1 \in X$, und $P(x_0, x_1)$ bezeichne die Menge aller Pfade in X von x_0 nach x_1. Zeigen sie, dass die Relation

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_1 \text{ ist homotop zu } \gamma_0$$

auf der Menge $P(x_0, x_1)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 10.93. — Ein topologischer Raum X heisst **einfach zusammenhängend**, falls für alle $x_0, x_1 \in X$ alle Pfade von x_0 nach x_1 homotop zueinander sind.

Übung 10.94. — Sei X ein topologischer Raum und sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg von $x_0 \in X$ nach $x_1 \in X$.

(i) (Umkehren von Wegen) Zeigen Sie, dass $t \in [0,1] \mapsto \gamma(1-t)$ ein Weg von x_1 nach x_0 ist.

(ii) (Verketten von Wegen) Sei $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ ein Weg von x_1 nach $x_2 \in X$. Zeigen Sie, dass

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

einen Weg von x_0 nach x_2 definiert.

(iii) Wiederholen Sie damit den Beweis von Proposition 10.87.

10.5.4 Definitionsbereiche in der Analysis

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Teilmenge. Anforderungen an U die wir in der Analysis stellen, etwa wenn U als Definitionsbereich von Funktionen, Vektorfeldern oder ähnlichem benutzt wird, sind typischerweise die in der folgenden Zusammenfassung aufgelisteten.

Wir verlangen, je nach Kontext, dass U offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt ist. Ausserdem verlangen wir oft auch dass U

(1) **zusammenhängend** ist: Die Menge U lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener, nicht-leerer Teilmengen von U schreiben (Definition 10.76).

(2) **wegzusammenhängend** ist: Zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in U$ existiert ein Weg in U von x_0 nach x_1 (Definition 10.84).

(3) **einfach zusammenhängend** ist: Zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in U$ existiert ein Weg in U von x_0 nach x_1, und zwischen je zwei solchen Wegen existiert eine Homotopie (Definition 10.93).

(4) **sternförmig** ist: Es existiert ein $x_0 \in U$, so dass für alle $x_1 \in U$ und $t \in [0,1]$ auch $(1-t)x_0 + tx_1 \in U$ gilt.

(5) **konvex** ist: Für alle $x_0, x_1 \in U$ und alle $t \in [0,1]$ ist auch $(1-t)x_0 + tx_1$ in U.

Übung 10.95. — Zeigen Sie, dass für eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ unter den oben aufgelisteten Eigenschaften die Implikationen

$$(5) \implies (4) \implies (3) \implies (2) \implies (1)$$

gelten. Finden Sie jeweils Beispiele von Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ die zeigen, dass keine der Umgekehrten Implikationen gilt.

Kapitel 11

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wir erweitern in diesem Kapitel den Begriff der Ableitung, um Funktionen auf Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ mit Hilfe von Differentialrechnung auf ihre Eigenschaften untersuchen zu können. Dies ist für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ und auch verschiedene Dimensionen $m \in \mathbb{N}$ des Zielraums von Nutzen, weshalb wir in dieser Hinsicht keine Einschränkungen treffen werden. Einen Grossteil der Definitionen und Sätze in diesem Kapitel könnte man auch für Funktionen von $U \subseteq V$ nach W formulieren, wobei V und W beliebige, endlich dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume sind. Wir beschränken uns der Konkretheit halber auf den Fall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$, versehen mit der euklidischen Norm.

11.1 Die Ableitung

11.1.1 Definitionen

Mit Hilfe der Ableitung einer reellwertigen Funktion f in einer Variable bei x_0 kann man die Funktion f durch die affin lineare Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)x$ approximieren. Die Gerade $\{(x, f(x_0) + f'(x_0)x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist die Tangente an den Graphen von f in $\mathbb{R}^2$. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist von diesem Standpunkt aus die lineare Funktion $x \mapsto f'(x_0)x$. Dies möchten wir nun für Funktionen $U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ analog definieren. Wir studieren im Folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$, wobei der Definitionsbereich U eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. *Die Ableitung von f an einer Stelle $x_0 \in U$ wird nicht eine Zahl, sondern eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sein!*

Definition 11.1. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heisst f bei $x_0 \in U$ **differenzierbar** oder **ableitbar**, falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x_0 + x) - f(x_0) - L(x)\|}{\|x\|} = 0$$

gilt. Die lineare Abbildung L wird die **totale Ableitung**, das **Differential** oder die **Tangentialabbildung** genannt. Wir schreiben sie als

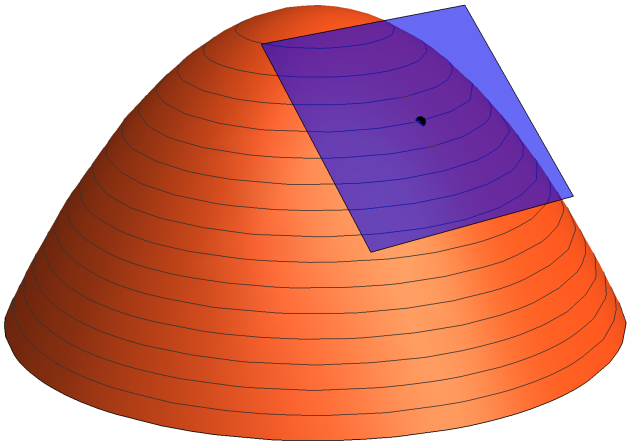
$$L = Df(x_0).$$

Die Funktion f heisst **ableitbar** oder **differenzierbar**, falls f bei jedem Punkt in U differenzierbar ist.

11.2. — Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $x_0 \in U$ differenzierbar, mit totaler Ableitung $L = Df(x_0)$, so können wir f als

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + L(x) + R(x)$$

ausdrücken. Hier erkennen wir die affin-lineare Annäherung $x \mapsto f(x_0) + L(x)$ an f, und einen Restterm $R(x)$, für den nach Definition der totalen Ableitung $R(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$ gilt. In der Literatur oft anzutreffende alternative Notationen für die totale Ableitung von f an der Stele x_0 sind $D_{x_0}f$, $df(x_0)$ oder auch $f'(x_0)$. Wir bemerken noch, dass Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 Stetigkeit von f bei x_0 impliziert.



Figur 11.1: Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entspricht die beste affine Approximation der Tangentialebene des Graphen in $\mathbb{R}^3$.

Applet 11.3 (Tangentialebene)**.** *Wir stellen wie bereits in obigem Bild die Tangentialebenen für die Graphen von zwei Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dar. Des Weiteren werden die partiellen Ableitungen und Richtungsableitungen in Definition 11.4 visualisiert. Gibt es zu jedem Punkt eine Richtungsableitung die verschwindet?*

Definition 11.4. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Die **Ableitung** von f **entlang eines Vektors** $v \in \mathbb{R}^n$ ist an einer Stelle $x_0 \in U$ durch

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s}$$

definiert, falls der Grenzwert existiert. Man spricht auch von der **Richtungsableitung** in der Richtung v bei x_0. Im Spezialfall, wo $v = e_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist, wird der obige Grenzwert

$$\partial_j f(x_0) = \partial_{x_j} f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + se_j) - f(x_0)}{s}$$

auch die **partielle Ableitung** in der j-ten Koordinate (oder der Variable x_j) bei $x_0 \in U$ genannt, falls er existiert. Wir schreiben mitunter auch $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$. Existiert die partielle Ableitung in der j-ten Koordinate an jedem Punkt in U, so erhält man also eine Funktion $\partial_j f : U \to \mathbb{R}^m$.

11.5. — Die partielle Ableitung und die Richtungsableitung entlang eines beliebigen Vektors sind also die Ableitung nach einer der unabhängigen Variablen, wobei alle anderen Variablen als Konstanten erachtet werden. Zum Beispiel existieren für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x(y^2 + \sin(z))$ die partiellen Ableitungen bezüglich allen Koordinatenrichtungen und sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x, y, z) &= y^2 + \sin(z) \\
\partial_y f(x, y, z) &= 2xy \\
\partial_z f(x, y, z) &= x \cos(z)
\end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, da wir einfach alle uns bekannten Regeln aus Abschnitt 8.1.2 anwenden können. Existiert die totale Ableitung, so lässt sich diese mittels folgender Proposition mit partiellen Ableitungen und Ableitungen entlang beliebiger Vektoren in Verbindung bringen.

Proposition 11.6. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f in Richtung v, und es gilt*

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)(v)$$

Beweis. Nach Annahme existiert die totale Ableitung $Df(x_0)$ und es gilt nach Definition der Ableitung $f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + o(\|h\|)$ für $h \to 0$. Wir setzen $h = sv$ für $s \to 0$ und $v \in \mathbb{R}^n$, woraus sich

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s} = \lim_{s \to 0} (Df(x_0)(v) + o(1)) = Df(x_0)(v)$$

ergibt, was zu zeigen war. □

11.7. — Aus Proposition 11.6 folgt insbesondere, dass die totale Ableitung $Df(x_0)$ eindeutig durch die partiellen Ableitungen bestimmt ist. Es gilt nämlich für $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in \mathbb{R}^n$

$$Df(x_0)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i Df(x_0)(e_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial_i f(x_0).$$

Die Matrix der linearen Abbildung $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist also bezüglich den kanonischen Basen durch

$$(\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

gegeben. Sie heisst auch **Jacobi-Matrix** von f bei x_0. Die nachfolgende Übung zeigt, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen einer Funktion f nicht notwendigerweise folgt, dass die Funktion auch differenzierbar ist.

Übung 11.8. — Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, aber f nicht differenzierbar ist.

Übung 11.9. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ Funktionen. Angenommen f_1 und f_2 sind differenzierbar bei $x_0 \in U$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1 + f_2$ und auch $f_1 f_2$ bei x_0 differenzierbar sind und dass

$$\begin{aligned} D(f_1 + f_2)f(x_0) &= Df_1(x_0) + Df_2(x_0) \\ D(f_1 f_2)(x_0) &= f_1(x_0)Df_2(x_0) + f_2(x_0)Df_1(x_0) \end{aligned}$$

gilt. Formulieren und beweisen Sie für analoge Aussagen für die Richtungsableitung in Richtung eines fixen Vektors $v \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 11.10. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Es bezeichne $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die j-te Komponente. Dann ist f genau dann bei $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn die Komponenten $f_j = \pi_j \circ f$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ bei x_0 differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\pi_j \circ Df(x_0) = D(\pi_j \circ f)(x_0).$$

Beweis. Angenommen $f_j := \pi_j \circ f$ ist für jedes j bei x_0 differenzierbar. Es gibt also eine lineare Funktion $L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einen Restterm $R_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f_j(x_0 + x) = f_j(x_0) + L_j(x) + R_j(x)$$

und $R_j(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$. Wir können

$$f(x_0+h) = \begin{pmatrix} f_1(x_0+h) \\ \vdots \\ f_m(x_0+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_m(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(x) \\ \vdots \\ R_m(x) \end{pmatrix}$$

zusammengefasst als $f(x_0+x) = f(x_0) + L(x) + R(x)$ schreiben. In diesem Ausdruck ist dann L linear, und es gilt $R_j(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$. Also ist f differenzierbar und es gilt die behauptete Formel für $Df(x_0)$. Ist umgekehrt f differenzierbar an der Stelle x_0, so folgt die behauptete Formel über die selbe Rechnung. □

Satz 11.11. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Falls für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_j f$ auf ganz U existiert und eine stetige Funktion definiert, so ist f auf ganz U differenzierbar.*

Beweis. Auf Grund von Lemma 11.10 können wir $m = 1$ annehmen. Wir fixieren $x_0 \in U$, und müssen zeigen, dass f bei x_0 differenzierbar ist. Indem wir f durch $x \mapsto f(x+x_0) - f(x_0)$ ersetzen können wir ebenfalls annehmen, dass $x_0 = 0$ und $f(0) = 0$ gilt. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) && -f(0, x_2, x_3 \dots, x_n) \\ & +f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) && -f(0, 0, x_3, \dots, x_n) \\ & +f(0, 0, x_3, \dots, x_n) && - \quad \cdots \\ & + \quad \cdots && -f(0, 0, \dots, 0, x_n) \\ & +f(0, 0, \dots, 0, x_n) && -f(0, 0, \dots, 0, 0). \end{aligned}$$

Die Funktion $[0, x_j] \to \mathbb{R}$ definiert durch $t \mapsto f(0, 0, \dots, 0, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$ ist nach Hypothese stetig differenzierbar. Ihre Ableitung ist durch die j-te partielle Ableitung von f gegeben. Es existiert also nach dem Mittelwertsatz 8.30 ein Zwischenpunkt $\xi_j \in [0, x_j]$ so, dass

$$\partial_j f(0, \dots, 0, \xi_j, x_{j+1}, \dots, x_n) x_j = f(0, \dots, 0, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(0, \dots, 0, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

gilt. Für eine beliebige Wahl solcher Zwischenpunkte $\xi_j \in [0, x_j]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & \partial_1 f(\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n) x_1 \\ & +\partial_2 f(0, \xi_2, x_3, \dots, x_n) x_2 \\ & + \quad \cdots \\ & +\partial_n f(0, 0, \dots, 0, \xi_n) x_n. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die lineare Funktion $L : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \partial_1 f(0) v_1 + \cdots \partial_n f(0) v_n$ die Ableitung $Df(0)$ ist, müssen wir die Differenz $R(x) := f(x) - L(x) = f(0+x) - f(0) - L(x)$ abschätzen.

$$\begin{aligned} R(x) \quad = \quad & \big(\partial_1 f(\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \partial_1 f(0)\big) x_1 \\ & +\big(\partial_2 f(0, \xi_2, x_3, \dots, x_n) - \partial_2 f(0)\big) x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \quad \cdots \\ &+\big(\partial_n f(0,0,\ldots,0,\xi_n) - \partial_n f(0)\big)x_n \end{aligned}$$

Nach den Annahmen des Satzes und wegen $\frac{|x_j|}{\|x\|} \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt die Asymptotik

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0.$$

was zeigt, dass f bei $x_0 = 0$ differenzierbar ist, mit Ableitung $Df(0) = L$. □

Definition 11.12. — Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung als Funktion von $x \in U$

$$Df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

stetig ist.

11.13. — Nach Satz 11.11 und Proposition 11.6 ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ genau dann stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Kombinieren wir die Aussagen dieses Abschnitts so können wir die Differenzierbarkeit vieler Abbildungen f von $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ nachweisen.

Beispiel 11.14. — Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} x^2-\cos(xy) \\ y^4-\exp(x) \end{smallmatrix}\right)$. Die totale Ableitung von f bei (x,y) ist dann gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2x + \sin(xy)y & \sin(xy)x \\ -\exp(x) & 4y^3 \end{pmatrix}.$$

die, als Funktion von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.

11.1.2 Die Kettenregel

Satz 11.15. — *Seien $k, m, n \geq 1$, und seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f : U \to V$ bei x_0 differenzierbar und $g : V \to \mathbb{R}^k$ bei $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ bei x_0 differenzierbar, und die totale Ableitung von $(g \circ f)$ bei x_0 ist durch*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) \tag{11.1}$$

gegeben.

Beweis. Nach Definition der Differenzierbarkeit von f bei x_0 und von g bei $y_0 = f(x_0)$ gilt

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + L(x) + R(x) \qquad \text{und} \qquad g(y_0 + y) = g(y_0) + M(y) + S(y)$$

mit $L = Df(x_0)$ und $R(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$, und $M = Dg(y_0)$ und $S(y) = o(\|y\|)$ für $y \to 0$. Gemeinsam erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^n$ klein genug, und $y = f(x_0 + x) - f(x_0) = L(x) + R(x)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + x)) = g(y_0 + y) = g(y_0) + M(y) + S(y) = \\ = g(f(x_0)) + M(L(x)) + \underbrace{M(R(x)) + S(L(x) + R(x))}_{T(x)} \end{aligned}$$

und wir möchten nun zeigen, dass $T(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$ gilt. Da $R(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$ gilt, ist auch $\|M(R(x))\| \leq \|M\|_{\text{op}}\|R(x)\| = o(\|x\|)$ für $x \to 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $S(L(x) + R(x)) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$ ist. Dass $S(x) = o(\|x\|)$ für $x \to 0$ gilt bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^m$

$$\|y\| < \delta \implies \|S(y)\| \leq \varepsilon\|y\| \tag{11.2}$$

gilt. Nach Differenzierbarkeit von f bei x_0 gilt für $y = L(x) + R(x)$ die Abschätzung

$$\|y\| \leq \|L(x)\| + \|R(x)\| \leq \|L\|_{\text{op}}\|x\| + o(x)$$

für $x \to 0$. Schreiben wir $C = \|L\|_{\text{op}} + 1$ so gibt es ein $\eta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| < \eta \implies \|L(x) + R(x)\| < C\|x\|$$

gilt. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| < \min\{\eta, \delta C^{-1}\}$ folgt also $\|L(x) + R(x)\| < \delta$ und mit (11.2) auch

$$\|S(L(x) + R(x))\| \leq \varepsilon\|L(x) + R(x)\| \leq C\varepsilon\|x\|.$$

Daraus folgt wie bereits erklärt die Differenzierbarkeit von $g \circ f$ bei x_0 und die Gleichung (11.1). □

11.16. — Wir betrachten den Spezialfall $n = 1$ für die Kettenregel. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to V \subset \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion mit Werten in einer offenen Teilemenge $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Sei weiter $f : V \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar. Dann ergibt die Kettenregel, dass $f \circ \gamma$ differenzierbar ist, und dass und die Formel

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

für alle $t \in I$ gilt. Sollte noch zusätzlich $k = 1$ sein, so ist $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ und $Df(\gamma(t))\gamma'(t)$ ist in Matrizenform ausgedrückt das Matrixprodukt der $1 \times m$-Matrix $Df(\gamma(t))$ mit der $m \times 1$-Matrix

$\gamma'(t)$. Wir interpretieren in diesem Fall $Df(x)$ für $x \in V$ auch als den Spaltenvektor

$$\mathrm{grad} f(x) = \nabla f(x) = Df(x) \in \mathbb{R}^m$$

und nennen dies den **Gradienten der Funktion** f bei der Stelle x. In dieser Schreibweise erhalten wir die Formel

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \big\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \tag{11.3}$$

für alle $t \in I$.

11.17. — Der Begriff der Richtungsableitung und der Fall der Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erlauben uns, eine geometrische Interpretation des Gradienten einer Funktion anzugeben. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt nach Proposition 11.6 und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, Proposition 6.134

$$\partial_v f(x) = Df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \|v\|$$

für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, mit Gleichheit genau dann, wenn $\nabla f(x)$ und v linear abhängig sind. Dies bedeutet, dass der Gradient von f an jedem Punkt in die Richtung der grössten Richtungsableitung zeigt, das heisst, die Richtung des grössten Anstiegs von f um x kennzeichnet. Des Weiteren gibt $\|\nabla f(x)\|$ die Steigung in dieser Richtung an.

11.1.3 Der Mittelwertsatz

Wir formulieren eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes 8.30 für reellwertige differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir eine gegebene Funktion f entlang eines Geradenstücks in der offenen Menge.

Satz 11.18 (Mittelwertsatz). — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x_0 + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Dann existiert ein $t \in (0,1)$ so, dass für $\xi = x_0 + th$ die Gleichung*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(\xi)(h) = \partial_h f(\xi)$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Ableitung des geraden Weges $\gamma : t \mapsto x_0 + th$ für fixe $x_0, h \in \mathbb{R}^n$ ist durch $\gamma'(t) = h$ gegeben. Daher erfüllt die Funktion $g = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf Grund der Kettenregel in Satz 11.15 alle Voraussetzungen des eindimensionalen Mittelwertsatzes 8.30. Also existiert $t \in (0,1)$ mit $g(1) - g(0) = g'(t) = Df(x_0 + th)(h)$ nach der Kettenregel, und somit

$$f(x_0 + h) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t) = Df(\xi)(h)$$

für $\xi = x_0 + th$. □

Korollar 11.19. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Es genügt den Fall $m = 1$ zu betrachten. Wir nehmen an, dass U nicht leer ist, wählen ein $x_0 \in U$ und betrachten die Teilmenge

$$U' = \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\}$$

von U. Da f stetig ist, ist $U' \subseteq U$ eine abgeschlossene Teilmenge von U. Aus der Annahme und dem Mittelwertsatz folgt, dass U' offen ist: In der Tat existiert zu $x \in U'$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U$, und da sich jeder Punkt $y \in B(x, \varepsilon)$ mit einem geraden Weg zu x verbinden lässt, gilt nach Satz 11.18 auch $f(y) = f(x) = f(x_0)$. Also ist $y \in U'$ und da $y \in B(x, \varepsilon)$ beliebig war, ist $B(x, \varepsilon) \subset U'$. Da aber U zusammenhängend ist, folgt $U' = U$ und damit auch das Korollar. □

Definition 11.20. — Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y heisst **lokal Lipschitz-stetig**, falls für jedes $x_0 \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f|_{B(x_0,\varepsilon)}$ Lipschitz-stetig ist.

Korollar 11.21. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig. Falls U zusätzlich konvex und die Ableitung beschränkt ist, dann ist f sogar Lipschitz-stetig.*

Beweis. Es genügt den Fall $m = 1$ zu betrachten. Wir nehmen zuerst an, dass U konvex ist und die Ableitung beschränkt ist. Es existiert also $M \geq 0$, so dass $\|Df(\xi)\|_{\mathrm{op}} \leq M$ für alle $\xi \in U$. Aus dem Mittelwertsatz 11.18 folgt damit für $x, y \in U$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|Df(\xi)(x - y)\| \leq M\|x - y\|$$

für ein $\xi \in U$, da U konvex ist und somit das Geradenstück zwischen x und y enthält. Dies beweist die zweite Aussage im Korollar. Die erste Aussage folgt aus der zweiten angewendet auf den Ball $U_0 = B(x_0, \varepsilon)$ wobei $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, dass $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subseteq U$ gilt. In der Tat ist U_0 konvex und die Abbildung $\xi \mapsto Df(\xi)$ ist als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ beschränkt, was die Beschränktheit der Ableitung auf $B(x_0, \varepsilon)$ impliziert. □

Übung 11.22. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Ein Weg $\gamma : [0, 1] \to U$ heisst stückweise differenzierbar, falls es endlich viele Punkte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ von $[0, 1]$ gibt, so dass für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ die Einschränkung $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ stetig differenzierbar ist.

1. Zeigen Sie, dass es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ einen stückweise differenzierbaren Weg von x nach y gibt.

2. Die Länge eines stückweise differenzierbaren Weges wie oben ist als

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{K} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(s)| ds$$

definiert. Überprüfen Sie, dass die Wegmetrik $d_{\text{Weg}}(x, y)$ für $x, y \in U$, welche durch

$$\mathrm{d}_{\text{Weg}}(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein stückweise differenzierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

definiert ist, tatsächlich eine Metrik ist.

3. Zeigen Sie, dass die Wegmetrik die Standardtopologie auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ induziert.

4. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, wenn man U mit der Wegmetrik ausstattet.

5. Finden Sie ein Beispiel einer zusammenhängenden Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung, die bezüglich der Euklidischen Metrik nicht Lipschitz-stetig ist.

11.2 Höhere Ableitungen und Taylor-Approximation

11.2.1 Definition und Eigenschaften der höheren Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Nach Satz 11.11 bedeutet dies gerade, dass die partiellen Ableitungen von f auf ganz U existieren und stetige Funktionen auf U sind. Die totale Ableitung von f können wir als eine stetige Funktion

$$Df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

betrachten. Falls diese Vektorwertige Funktion auf U selbst wieder stetig differenzierbar ist, so sagen wir f sei **zweimal stetig differenzierbar**. Die Ableitung von Df ist dann eine stetige Funktion

$$D^2 f : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

die wir **zweite totale Ableitung** von f nennen. Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ kann kanonisch mit dem Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ identifiziert werden. Falls die zweite totale Ableitung als Vektorwertige Funktion auf U stetig differenzierbar ist, können wir die dritte totale Ableitung definieren. Sie nimmt Werte in den trilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an. Wie auch Differenzierbarkeit kann man die Existenz höherer totaler Ableitungen mit Hilfe partieller Ableitungen charakterisieren. Wir machen dies zur Definition. Wir werden oft nur $\mathbb{R}$-wertige statt $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen betrachten, da sich die meisten der nachfolgenden Aussagen mittels Lemma 11.10 einfach auf den Fall $m > 1$ verallgemeinern lassen.

Definition 11.23. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $d \geq 1$. Wir sagen, dass f **d-mal stetig differenzierbar** ist, falls für alle $j_1, \ldots, j_d$ in $\{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung

$$\partial_{j_1} \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_d} f(x)$$

an jedem Punkt $x \in U$ existiert, und in Abhängigkeit von $x \in U$ eine stetige Funktion auf U definiert. Wir schreiben

$$C^d(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } d\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

für den Vektorraum der d-mal stetig differenzierbaren $\mathbb{R}^m$-wertigen Funktionen auf U. Wir nennen die Funktion f **glatt**, falls f beliebig oft stetig differenzierbar ist. Wir schreiben

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } d\text{-mal stetig differenzierbar für alle } d \geq 1\}$$

für den Vektorraum der glatten $\mathbb{R}^m$-wertigen Funktionen auf U.

Satz 11.24 (Satz von Schwarz). — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt $\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.*

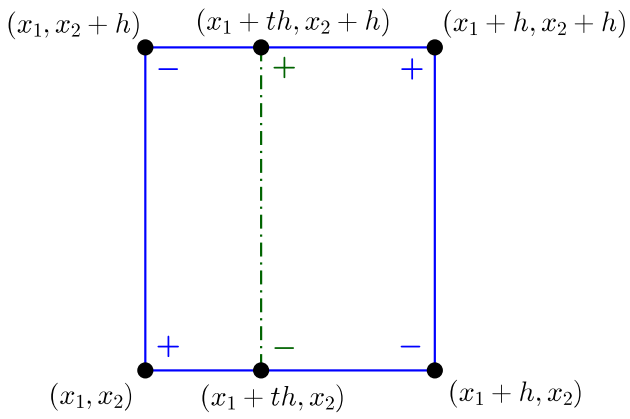
Beweis. Es genügt den Fall $n = 2$ und $j = 1$, $k = 2$ zu betrachten, der allgemeine Fall folgt durch Umbenennen der Variablen aus dem betrachteten Spezialfall. Für $x \in U$ und ein genügend kleines $h > 0$ definieren wir eine Funktion F durch

$$F(h) = f(x_1 + h, x_2 + h) - f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2 + h) + f(x_1, x_2).$$

Weiter betrachten wir für ein genügend kleines aber festes $h \in (0, 1)$ die nach der Kettenregel differenzierbare Funktion $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) = f(x_1+th, x_2+h)-f(x_1+th, x_2)$ und erhalten

$$F(h) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi_1) = \big(\partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2 + h) - \partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2)\big)h$$

für ein $\xi_1 \in (0, 1)$ nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz 8.30.



Figur 11.2: Die Funktion $h \mapsto F(h)$ ist eine vorzeichenbehaftete Summe von Funktionswerten von f bei den Ecken eines Quadrats (hier gekennzeichnet durch eine durchgezogene Linie). Die Funktion $t \mapsto \varphi(t)$ entspricht der Differenz der Funktionswerte auf einer vertikalen Strecke durch das Quadrat.

Nochmaliges Anwenden des eindimensionalen Mittelwertsatzes auf $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(t) = \partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2 + th)$ ergibt gemeinsam mit der Kettenregel

$$F(h) = \big(\partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2 + h) - \partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2)\big)h = \partial_2\partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2 + \xi_2 h)h^2$$

für einen Zwischenpunkt $\xi_2 \in (0, 1)$. Da in der Funktion $h \mapsto F(h)$ die beiden Komponenten symmetrisch verwendet wurden, können wir das Argument auch mit vertauschten Rollen der ersten und zweiten Komponenten durchführen. Dies ergibt analog

$$F(h) = \partial_1\partial_2 f(x_1 + \xi_1' h, x_2 + \xi_2' h)h^2.$$

für geeignete $\xi_1', \xi_2' \in (0, 1)$. Wir dividieren durch $h^2 > 0$ und erhalten

$$\partial_2\partial_1 f(x_1 + \xi_1 h, x_2 + \xi_2 h) = \partial_1\partial_2 f(x_1 + \xi_1' h, x_2 + \xi_2' h).$$

Wegen $\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2' \in (0,1)$ streben $(\xi_1 h, \xi_2 h)$ und $(\xi_1' h, \xi_2' h)$ gegen $(0,0)$ wenn h gegen 0 strebt. Also folgt $\partial_2\partial_1 f(x) = \partial_1\partial_2 f(x)$ auf Grund der Stetigkeit beider partiellen Ableitungen. $\square$

11.25. — Die **Hesse-Matrix** $H(x) = (H_{ij}(x))_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ bei $x \in U$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_{ij}(x) = \partial_i \partial_j f(x)$$

für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Der Satz von Schwarz 11.24 besagt, dass $H(x)$ eine symmetrische Matrix ist. Die zweite Ableitung von f als Bilinearform $D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist durch

$$D^2 f(x)(e_i, e_j) = H_{ij}(x)$$

charakterisiert, das heisst, $H(x)$ ist die Matrix der Bilinearform $D^2 f(x)$ bezüglich der Standardbasis. Für allgemeine Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt also $D^2 f(x)(v, w) = \langle v, H(x)w \rangle$, und der Satz von Schwarz besagt dass $D^2 f(x)$ eine symmetrische Bilinearform ist. Ist f von Klasse C^d, so ist die d-te Ableitung von f als Multilinearform in d Variablen durch

$$D^d f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad Df(x)(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_d}) = \partial_{i_1}\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_d} f(x)$$

charakterisiert. Der Satz von Schwarz besagt, dass diese Multilinearform symmetrisch ist, das heisst, dass für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_d$

$$D^d f(x)(v_1, v_2, \ldots, v_d) = D^d f(x)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(d)})$$

gilt.

11.26. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine d-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung d keine Rolle. Die höheren partiellen Ableitungen können insbesondere alle in die Form

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(x)$$

gebracht werden, wobei die einzelnen Komponenten von $\alpha \in \mathbb{N}^n$ angeben wie oft wir nach den einzelnen Koordinatenrichtungen abgeleitet haben. Der Satz von Schwarz nimmt in dieser Notation die Form

$$\partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^{\alpha+\beta} f = \partial^\beta \partial^\alpha f$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ an, wobei f auf U als genügend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wir bezeichnen in diesem Zusammenhang $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ als einen **Multiindex**.

11.2.2 Mehrdimensionale Taylor-Approximation

Satz 11.27. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(d+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} D^k f(x)(h,\dots,h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{d!} D^{d+1} f(x+th)(h,\dots,h)dt$$

Beweis. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ so, dass $x + th \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ gilt. Wir verwenden die eindimensionale Taylor-Approximation auf $\varphi : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) = f(x+th)$ an. Nach Satz 9.64 erhält man für die Taylor-Approximation um 0 bei 1

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{d} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \varphi^{(d+1)}(t) \frac{(1-t)^d}{d!} dt. \tag{11.4}$$

Wenden wir die Kettenregel in Satz 11.15 auf φ an, so erhalten wir für $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$$\varphi'(t) = Df(x+th)(h)$$

Für die zweite Ableitung von φ, für festes x und h, ergibt sich ebenso

$$\varphi''(t) = D(Df(x+th)(h))(h) = D^2 f(x+th)(h,h)$$

über die Identifikation von $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ mit Bilinearformen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Per Induktion erhält man

$$\varphi^{(k)}(t) = D^2 f(x+th)(h,h,\dots,h)$$

für alle $k \leq d+1$. Setzen wir dies in (11.4) ein, so ergibt sich der Satz. □

11.28. — Die Formel in Satz 11.27 nennt man **Taylor Entwicklung mit Restglied** von f an der Stelle x. Der Hauptterm

$$P(h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} D^k f(x)(h,\dots,h)$$

ist genau wie in der eindimensionalen Taylor-Approximation eine Polynomiale Funktion, diesmal allerdings in d Variablen. Dabei ist $D^k f(x)(h,\dots,h)$ gerade der homogene Teil vom Grad k. Das Integral

$$R(h) = \int_0^1 \varphi^{(d+1)}(t) \frac{(1-t)^d}{d!} dt$$

heisst **Restglied**. Die Abschätzung $R(h) = O(\|h\|^{d+1})$ folgt aus dem eindimensionalen Fall.

Applet 11.29 (Taylor-Approximation). *Wir sehen wie die Taylor-Approximationen erster, zweiter, oder dritter Ordnung die Funktion $f(x,y) = \sin(x)\cos(y) + 2$ annähern.*

11.2.3 Extremwerte

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Wir diskutieren den Zusammenhang zwischen Ableitungen und Extrema von reellewertigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Wir wollen insbesondere die Resultate aus Abschnitt 8.2.1 verallgemeinern. Wie schon für Funktionen in einer Variablen ist das Verschwinden der Ableitung eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremwerts.

11.30. — Wir erinnern daran, dass ein Element $x_0 \in U$ ein **lokales Maximum** von f genannt wird, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$ gilt. Wir sagen x_0 sei ein **isoliertes lokales Maximum** oder auch **striktes lokales Maximum**, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$ mit $x \neq x_0$ gilt. Die Definition eines **lokalen Minimum** ist analog, und zusammenfassend sprechen wir über **lokale Extrema**.

Proposition 11.31. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in U$ ein Punkt an dem f differenzierbar ist und ein lokales Extremum annimmt. Dann gilt $Df(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass f in x_0 ein lokales Maximum annimmt. Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und genügend kleine $h > 0$ gilt nach Annahme

$$f(x_0 + he_j) - f(x_0) \leq 0 \qquad \text{und} \qquad f(x_0 - he_j) - f(x_0) \leq 0$$

und daraus folgt $\partial_j f(x_0) = 0$ aufgrund von

$$\partial_j f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h} \leq 0, \qquad \partial_j f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - he_j) - f(x_0)}{-h} \geq 0.$$

Da $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig war, folgt $Df(x_0) = 0$ aus Proposition 11.6. □

Korollar 11.32. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in U$ mit $Df(x) = 0$. Sei $H(x_0)$ die Hesse Matrix von f im Punkt x_0.*

1. *Ist $H(x_0)$ positiv definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Minimum an.*
2. *Ist $H(x_0)$ negativ definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Maximum an.*
3. *Ist $H(x_0)$ indefinit und nicht ausgeartet, so hat f bei x_0 kein lokales Extremum.*

Beweis. Die Hesse Matrix $H(x_0)$ ist die Matrix der zweiten Ableitung von f bei x_0 als symmetrische Bilinearform $D^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir schreiben Q für die assoziierte quadratische Form.

$$Q(h) = Df(x_0)(h, h) = \langle h, H(x_0)h \rangle$$

Nach Satz 11.27 über mehrdimensionale Taylorentwicklung gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \Big(Q\Big(\tfrac{h}{\|h\|}\Big) + \alpha(x_0, h) \Big) \tag{11.5}$$

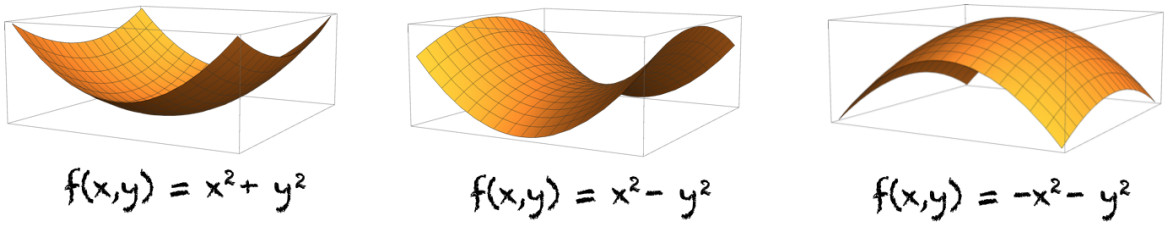
für $\alpha(x_0, h) = o(1)$ für $h \to 0$. Ist Q positiv definit, so gilt $Q(w) > 0$ für alle $w \in \mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$. Da $\mathbb{S}^{n-1}$ nach dem Satz von Heine-Borel 10.57 kompakt ist und Q stetig ist, existiert nach Satz 10.47 ein $c > 0$ mit $Q(w) \geq c$ für alle $w \in \mathbb{S}^{n-1}$. Es existiert weiter ein $\delta > 0$, so dass der Fehlerterm $\alpha(x_0, h)$ im Absolutbetrag kleiner als $\frac{c}{2}$ ist für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$. Es folgt, dass

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \tfrac{1}{2}\|h\|^2\Big(Q\Big(\tfrac{h}{\|h\|}\Big) - \tfrac{c}{2}\Big) \geq \tfrac{c}{4}\|h\|^2 > 0$$

für alle $h \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$ gilt, also nimmt f in x_0 ein striktes lokales Minimum an. Falls Q negativ definit ist, so ersetzen wir f durch $-f$, womit Q durch $-Q$ ersetzt wird. Die quadratische Form $-Q$ ist aber positiv definit und somit nimmt $-f$ in x_0 ein striktes lokales Minimum an, was die zweite Aussage im Korollar beweist.

Falls Q indefinit aber nicht ausgeartet ist, so existieren $w_-, w_+ \in \mathbb{S}^{n-1}$, mit $Q(w_-) < 0$ und $Q(w_+) > 0$. Für hinreichend kleine $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt $|\alpha(x_0, sw_-)| < \frac{1}{2}|Q(w_-)|$ und $|\alpha(x_0, sw_+)| < \frac{1}{2}Q(w_+)$ und damit folgt $f(x_0 + sw_-) - f(x_0) < 0$ und $f(x_0 + sw_+) - f(x_0) > 0$ aus (11.5). Daher nimmt f bei x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum an. □

Beispiel 11.33. — Das Verhalten der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^2$ illustriert die drei Fälle im Korollar. In dem indefiniten Fall spricht man auch von einem **Sattelpunkt**.



Die entsprechenden Hesse-Matrizen sind $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Ist Die Hesse-Matrix ausgeartet, das heisst, falls 0 ein Eigenwert von $H(x_0)$ ist, so kann im Allgemeinen nichts ausgesagt werten. Die Funktion $f(x, y) = ax^4 + by^4$ hat für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder weder noch an der Stelle 0, und die Hesse-Matrix an der Stelle 0 ist unabhängig von der Wahl von a und b die Nullmatrix.

Beispiel 11.34. — Seien $a, b \in \mathbb{R}$ feste Parameter. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x\sin(y) + ax^2 + by^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und betrachten den Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $Df(0) = 0$, und die Hesse-Matrix von f bei 0 ist durch

$$H = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix}$$

gegeben, mit $\det H = 4ab - 1$. Wir erhalten folgende Fälle.

- Falls $a > 0$ ist und $4ab - 1 > 0$ ist, so ist H positiv definit und f hat bei 0 ein lokales Minimum.
- Falls $a < 0$ ist und $4ab - 1 > 0$ ist, so ist H negativ definit und f hat bei 0 ein lokales Maximum.
- Falls $\det H = 4ab - 1 = 0$ ist, so ist die Hesse-Matrix ausgeartet.
- Falls $4ab - 1 < 0$ ist, so ist die Hesse-Matrix indefinit und 0 ist ein Sattelpunkt.

Übung 11.35. — Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an denen die Ableitung der durch $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$ gegebenen Funktion verschwindet. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Extremum handelt und wenn ja, ob ein lokales Minimum oder Maximum angenommen wird.

11.3 Parameterintegrale

11.3.1 Vertauschen von Ableitung und Integration

Seien $a < b$ reelle Zahlen, sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Integral der Form

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

wird als **Parameterintegral** bezeichnet. Dabei setzen wir üblicherweise voraus, dass die Funktion f in $n + 1$ Variablen zumindest stetig ist, so dass insbesondere für jedes fixe $x \in U$ die Abbildung $t \mapsto f(x, t)$ stetig, und somit Riemann-integrierbar nach Satz 5.45.

Satz 11.36. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $a < b$ reelle Zahlen und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert das Parameterintegral*

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

eine stetige Funktion $F : U \to \mathbb{R}$. Falls die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k = 1, \ldots, n$ existieren und auf $U \times [a, b]$ stetig sind, dann ist F stetig differenzierbar, und es gilt

$$\partial_k F(x) = \int_a^b \partial_k f(x, t)dt$$

für alle $x \in U$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Wir prüfen Stetigkeit von F bei $x_0 \in U$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $r > 0$ so, dass $K := \overline{B(x_0, r)}$ in U enthalten ist. Nach dem Satz von Heine-Borel 10.57 ist $K = \overline{B(x_0, r)} \times [a, b]$ kompakt und $f|_{K\times[a,b]}$ ist gleichmässig stetig nach Proposition 10.51. Es existiert also ein $\delta \in (0, r)$, so dass für alle $x \in B(x_0, \delta)$ und $t \in [a, b]$ die Abschätzung $|f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon(b - a)^{-1}$ gilt. Dies impliziert

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|dt < \varepsilon$$

für alle $x \in B(x_0, \delta)$ und beweist Stetigkeit von F bei x_0.

Angenommen die partielle Ableitung $\partial_k f$ existiert und ist stetig. Für $s \in (-r, r) \setminus \{0\}$ und $t \in [a, b]$ existiert nach dem Mittelwertsatz 11.18 ein $\xi \in (0, 1)$ mit

$$\frac{f(x_0 + se_k, t) - f(x_0, t)}{s} = \partial_k f(x_0 + \xi se_k, t).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der gleichmässigen Stetigkeit von $\partial_k f$ auf $K \times [a, b]$ existiert ein $\delta \in (0, r)$, so dass für $x \in B(x_0, \delta)$ und alle $t \in [a, b]$ die Abschätzung

$$|\partial_k f(x, t) - \partial_k f(x_0, t)| < \varepsilon(b - a)^{-1}$$

gilt. Gemeinsam ergibt sich nun für $s \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{F(x_0+se_k)-F(x_0)}{s}-\int_a^b \partial_k f(x_0,t)dt\right| = \left|\int_a^b \left(\frac{f(x_0+se_k,t)-f(x_0,t)}{s}-\partial_k f(x_0,t)\right)dt\right|$$
$$= \left|\int_a^b \left(\partial_k f(x_0+\xi se_k,t)-\partial_k f(x_0,t)\right)dt\right| \leq \varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\partial_k F(x_0) = \lim_{s\to 0}\frac{F(x_0+se_k)-F(x_0)}{s} = \int_a^b \partial_k f(x_0,t)dt.$$

Nach dem ersten Teil des Satzes ist $\partial_k F$ stetig und da $k \in \{1,\dots,n\}$ beliebig war, folgt stetige Differenzierbarkeit von F aus Satz 11.11. □

Beispiel 11.37. — Satz 11.36 erlaubt uns Funktionen zu analysieren, die mittels Integralen gegeben sind. Ein Beispiel einer solchen Funktion erhalten wir, indem wir den Umfang der Ellipse mit Achsenlängen $2a$ und $2b$ berechnen. Seien also $a \geq b > 0$ reell. Die Ellipse mit Parametern a, b ist dann durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

gegeben. Eine Parametrisierung dieser Ellipse ist durch $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ für $t \in [0,2\pi]$ gegeben. Der Umfang der Ellipse ist also, wie in Abschnitt 9.4.2 erklärt:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2(t)+(\tfrac{b}{a})^2\cos^2(t)}dt$$
$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2(t)}dt = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2(t)}dt,$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ die **Exzentrizität** der Ellipse bezeichnet, welche gewissermassen die Abweichung der Ellipse von einem Kreis misst. Das Parameterintegral

$$F(x) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}dt$$

definiert für $x \in (0,1)$ nennt sich das vollständige elliptische Integral zweiter Art. Die Funktion $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 11.36 und Induktion eine glatte Funktion.

Korollar 11.38. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : U \times (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k \in \{1,\dots,n\}$. Seien $\alpha, \beta : U \to (a,b)$ stetig differenzierbar. Dann ist das Parameterintegral mit veränderlichen Grenzen*

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$$

stetig differenzierbar auf U, und es gilt

$$\partial_k F(x) = f(x, \beta(x))\, \partial_k \beta(x) - f(x, \alpha(x))\, \partial_k \alpha(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x,t) dt$$

für alle $x \in U$.

Beweis. Wir kombinieren Satz 11.36, den Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung (9.2) und die mehrdimensionale Kettenregel (11.15). Dazu definieren wir die Hilfsfunktion

$$\varphi : U \times (a,b)^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, \alpha, \beta) \mapsto \int_\alpha^\beta f(x,t) dt$$

Wir zeigen zuerst, dass φ stetig ist. Sei also $(x_n, \alpha_n, \beta_n) \in U \times (a,b)^2$ eine Folge, die gegen $(x, \alpha, \beta) \in U \times (a,b)^2$ konvergiert. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ und $c, d \in (a,b)$ so, dass

$$\overline{B(x,\varepsilon)} \subset U \qquad \text{und} \qquad c \leq \alpha_n, \beta_n \leq d$$

für alle $n \geq 0$ gilt. Damit ist $K = \overline{B(x,\varepsilon)} \times [c,d]$ eine kompakte Teilmenge von $U \times (a,b)$ und

$$M = \max\{|f(x',t')| \mid (x',t') \in K\}$$

existiert. Für alle hinreichend grossen n gilt $x_n \in B(x,\varepsilon)$ und damit

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x_n, \alpha_n, \beta_n) - \varphi(x, \alpha, \beta)| \\
&\qquad \leq \left| \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x_n,t) dt - \int_\alpha^\beta f(x_n,t) dt \right| + \left| \int_\alpha^\beta f(x_n,t) dt - \int_\alpha^\beta f(x,t) dt \right| \\
&\qquad\qquad \leq M|\alpha_n - \alpha| + M|\beta_n - \beta| + \left| \int_\alpha^\beta f(x_n,t) dt - \int_\alpha^\beta f(x,t) dt \right|,
\end{aligned}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für das Integral, Satz 5.26, über die Teilintervalle zwischen α_n und α, beziehungsweise β_n und β, und die Schranke M für die Funktionswerte von f verwendet haben. Für $n \to \infty$ folgt nun aus Satz 11.36, dass dieser Ausdruck gegen 0 strebt. Da die Folge $(x_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^\infty$ eine beliebige Folge mit beliebigem Grenzwert (x, α, β) war, erhalten wir mit Proposition 10.30, dass φ stetig ist.

Nach Satz 11.36 existieren die partiellen Ableitungen $\partial_k \varphi$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, und sind durch

$$\partial_k \varphi(x, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \partial_k f(x,t) dt$$

gegeben. Nach obigem Argument ist $\partial_k \varphi$ ebenso stetig. Nach Satz 9.2 existieren auch die partiellen Ableitungen von φ nach α und β und sind durch

$$\partial_\alpha \varphi(x, \alpha, \beta) = -f(x, \alpha) \qquad \text{und} \qquad \partial_\beta \varphi(x, \alpha, \beta) = f(x, \beta)$$

gegeben. Insbesondere sind $\partial_\alpha \varphi$ und $\partial_\beta \varphi$ stetig. Nach Satz 11.11 ist φ also stetig differenzierbar.

Die Funktion F ist durch $F(x) = \varphi(x, \alpha(x), \beta(x))$ gegeben, und kann somit als Verknüpfung von φ mit der Funktion $\psi : U \to U \times (a, b)^2$

$$\psi(x) = (x, \alpha(x), \beta(x))$$

gelesen werden. Nach Annahme ist auch ψ stetig differenzierbar, mit totaler Ableitung durch

$$D\psi(x)(v) = (v, D\alpha(x)(v), D\beta(x)(v))$$

gegeben. Wir können die Kettenregel anwenden und erhalten, dass F stetig differenzierbar ist, mit totaler Ableitung

$$DF(x)(v) = D\varphi(\psi(x))(D\psi(x)(v)) = D\varphi(\psi(x))(v, D\alpha(x)(v), D\beta(x)(v)).$$

Für $v = e_k$ und also $\partial_k F(x) = DF(x)(e_k)$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned}\partial_k F(x) &= \partial_k \varphi(x, \alpha(x), \beta(x)) + \partial_\alpha \varphi(x, \alpha(x), \beta(x))\partial_k \alpha(x) + \partial_\beta \varphi(x, \alpha(x), \beta(x))\partial_k \beta(x) \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x, t)dt - f(x, \alpha(x))\partial_k \alpha(x) + f(x, \beta(x))\partial_k \beta(x)\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

11.3.2 Die Bessel-Differentialgleichung

Als Anwendung der allgemeinen Theorie zu Parameterintegralen möchten wir diese hier verwenden, um eine Differentialgleichung zu lösen. Für einen Parameter $n \geq 0$, meist eine natürliche Zahl, heisst die Differentialgleichung

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (x^2 - n^2)u(x) = 0 \tag{11.6}$$

für $u \in C^2((0, \infty), \mathbb{R})$ **Bessel-Differentialgleichung**. Sie ist linear, homogen von zweiter Ordnung. Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, welchen wir gegen Ende des Semesters beweisen werden, folgt, dass (11.6) gemeinsam mit zwei beliebigen Anfangswerten $u(1) = a$ und $u'(1) = b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung auf $(0, \infty)$ besitzt. Insbesondere ist der Vektorraum der Lösungen von (11.6) zweidimensional. Wir wollen zwei linear unabhängige Lösungen angeben. Hierfür nehmen wir $n \in \mathbb{N}$ an.

11.39. — Die durch das Parameterintegral

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t) - nt)dt \tag{11.7}$$

definierte Funktion $J_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird **Bessel-Funktion erster Gattung** genannt, und löst die Differentialgleichung (11.6), was wir mit Hilfe von Satz 11.36 nachrechnen können. In

der Tat gilt $\partial_x(\cos(x\sin(t)-nt)) = -\sin(x\sin(t)-nt)\sin(t)$, und daher

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(-\sin(x\sin(t)-nt)\sin(t)\big)dt$$

und analog

$$J_n''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(-\cos(x\sin(t)-nt)\sin^2(t)\big)dt.$$

Für den Ausdruck $x^2J_n''(x) + (x^2-n^2)J_n(x)$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi &\big(-x^2\cos(x\sin(t)-nt)\sin^2(t) + (x^2-n^2)\cos(x\sin(t)-nt)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t)-nt)\big(x^2\cos^2(t)-n^2\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t)-nt)\underbrace{\big(x\cos(t)-n\big)}_{\partial_t(x\sin(t)-nt)}\big(x\cos(t)+n\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\sin(x\sin(t)-nt)(x\cos(t)+n)\Big]_0^\pi \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(t)-nt)x\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -xJ_n'(x)
\end{aligned}$$

mit partieller Integration und der Annahme $n \in \mathbb{N}$. Daher erfüllt (11.7) die Differentialgleichung (11.6).

11.40. — Die **Bessel-Funktion zweiter Gattung** ist durch das uneigentliche Integral

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(t)-nt)x\sin(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \big(\exp(t)+(-1)^n\exp(-nt)\big)\exp(-x\sinh(t))dt$$

für $x \in (0,\infty)$ definiert. Es kann gezeigt werden, dass Y_n die Differentialgleichung (11.6) ebenfalls löst. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)dt$$

nach Satz 11.36 und

$$\lim_{x\to 0} Y_n(x) = -\infty. \tag{11.8}$$

Dies zeigt, dass J_n und Y_n linear unabhängig sind.

Übung 11.41. — Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Bessel-Funktion Y_n zweiter Gattung wohldefiniert ist und beweisen Sie die Asymptotik in (11.8).

(b) Nehmen Sie eine geeignete Verallgemeinerung der Differentiation unter dem Integral für das uneigentliche Integrale an, und beweisen Sie damit, dass Y_n eine Lösung der Bessel-Differentialgleichung (11.6) ist.

(c) Für den Beweis der geeigneten Verallgemeinerung der Differentiation unter dem Integral betrachte man die reellwertige Funktion

$$f(x,t) = \big(\exp(t) + (-1)^n \exp(-nt)\big) \exp(-x \sinh(t))$$

auf $(0,\infty) \times [1,\infty)$ und

$$F(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{falls } s = 0 \\ \dfrac{f(x,s^{-1})}{s^2} & \text{falls } s > 0 \end{cases}$$

auf $(0,\infty) \times [0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_1^\infty f(x,t)dt = \int_0^1 F(x,s)ds$$

gilt und dass F alle Voraussetzungen von Satz 11.36 erfüllt.

11.4 Wegintegrale

11.4.1 Skalare Wegintegrale

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg. In Abschnitt 9.4.2 haben wir die Länge von γ durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

definiert. Hier soll $\|\gamma'(t)\|$ als **Geschwindigkeit** des Weges zur Zeit t gelesen werden.

Definition 11.42. — Eine stetige Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heisst **stückweise stetig differenzierbar**, falls eine Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = b$ von $[a,b]$ existiert, so dass $\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}$ für alle $k \in \{1,\ldots,N\}$ stetig differenzierbar ist. Wir sagen in dem Fall γ sei stückweise stetig differenzierbar **bezüglich** dieser Zerlegung, und definieren die **Länge** von γ durch

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{N} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left\|(\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t)\right\| dt.$$

Übung 11.43. — Zeigen Sie, dass der Begriff der Länge eines stückweise differenzierbaren Weges nicht von der Wahl einer Zerlegung abhängt.

11.44. — Es gibt auch Situationen, wo das **skalare Wegintegral** einer stetigen reellwertigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ entlang eines stetigen differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to U$, definiert als

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt$$

von Bedeutung ist. Wie zuvor die Weglänge lässt sich dieser Begriff auf stückweise differenzierbare Wege erweitern. Zum Beispiel könnte die physikalische Bedeutung der Funktion $f : U \to [0,\infty)$ die Dichte eines Mediums sein, duch das sich der Punkt $\gamma(t)$ im Zeitraum $[a,b]$ mit entsprechendem Kraftaufwand bewegt.

Übung 11.45. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge und sei $f : U \to (0,\infty)$ stetig. Definieren Sie in Analogie zu Übung 11.22 die Distanz $d_f(x,y)$ zweier Punkte $x, y \in U$ als

$$\inf\left\{ \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt \,\middle|\, \gamma : [a,b] \to U \text{ stückweise differenzierbar mit } \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y \right\}.$$

Zeigen Sie, dass d_f in der Tat eine Metrik auf U definiert und dass diese die Standardtopologie auf U induziert.

11.4.2 Wegintegrale von Vektorfeldern

11.46. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** auf U ist eine Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$. Stetige, stetig differenzierbare oder glatte Vektorfelder sind dementsprechende Funktionen $F : U \to \mathbb{R}^n$. Wir visualisieren Vektorfelder oft, indem wir bei $x \in U$ den Vektor $F(x)$ mit Fusspunkt x zeichnen. In der Physik sind Vektorfelder oft Kraftfelder, oder geben die Strömungsgeschwindigkeit eines Mediums an.

Definition 11.47. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das **Wegintegral des Vektorfelds** F entlang eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to U$ durch

$$\int_\gamma F dt = \int_a^b \big\langle F(\gamma(s)), \gamma'(t) \big\rangle \, dt$$

Ist γ stückweise stetig differenzierbar bezüglich einer Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = b$, so ist das Integral als Summe von Integralen über Intervalle $[s_{k.1}, s_k]$ zu lesen.

Lemma 11.48. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ändert sich der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma F dt$ nicht unter orientierungserhaltenden Reparametrisierungen von γ.*

Beweis. Sei $[c, d]$ ein Intervall und $\psi : [c, d] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare, monoton wachsende, surjektive Funktion. Dann gilt

$$\int_{\gamma\circ\psi} F dt = \int_c^d \big\langle f(\gamma(\psi(t))), (\gamma \circ \psi)'(t) \big\rangle \, dt = \int_c^d \big\langle f(\gamma(\psi(t))), \gamma'(\psi(t)) \big\rangle \, \psi'(t) dt$$
$$= \int_a^b \big\langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \big\rangle \, ds = \int_\gamma F \cdot ds.$$

was zu zeigen war. □

Lemma 11.49. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\gamma : [0, 1] \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gibt es eine stetig differenzierbare Reparametrisierung $\varphi = \gamma \circ \psi$. Darüberhinaus kann man $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ einrichten.*

Beweis. Sei $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$ eine passende Zerlegung des Einheitsintervalls. Es existiert eine glatte Funktion $\beta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit nichtnegativen Werten, so, dass $\beta(s_k) = 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ gilt, sowie

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} \beta(t) dt = s_k - s_{k-1}$$

für $k = 1, 2, \ldots, N$. Die Funktion $\psi : [0, 1] \to [0, 1]$ gegeben durch

$$\psi(t) = \int_0^s \beta(s) ds$$

ist stetig differenzierbar, monoton wachsend und es gilt $\psi(s_k) = s_k$ und $\psi'(s_k) = 0$ für alle k. Die Reparametrisierung $\varphi = \gamma \circ \psi$ ist damit stetig differenzierbar, und es gilt $\varphi'(s_k) = 0$ für alle k, insbesondere $\varphi'(s_0) = \varphi'(0) = 0$ und $\varphi'(s_N) = \varphi'(1) = 0$. □

Definition 11.50. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heisst **Potential** für F, falls $F = \operatorname{grad}(f)$ gilt.

Proposition 11.51. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Angenommen es existiere ein Potential $f : U \to \mathbb{R}$ für F. Dann gilt*

$$\int_\gamma F dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

für jeden stückweise stetig differenzierbaren Pfad $\gamma : [0,1] \to U$.

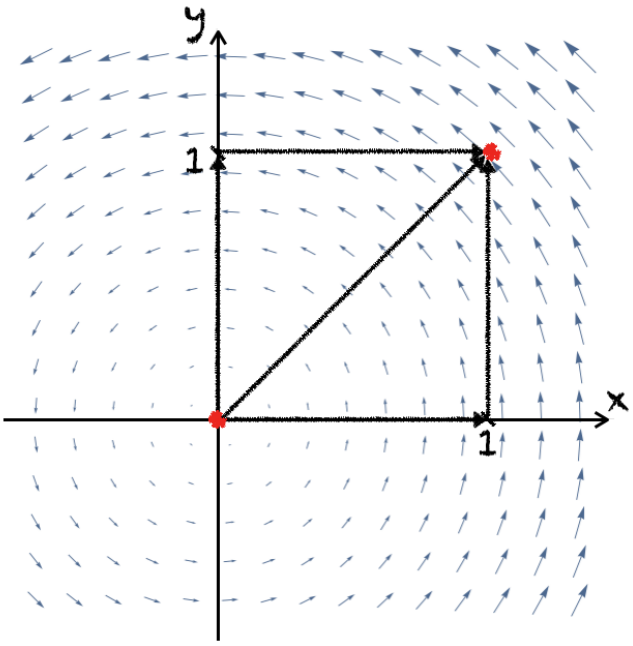
Beweis. Falls $\gamma : [0,1] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg ist, dann gilt für $t \in [0,1]$ also $F(\gamma(t)) = \operatorname{grad} f(\gamma(t)) = Df(\gamma(t))$, und somit

$$\int_\gamma F dt = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 Df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

nach der Kettenregel. Falls γ bloss stückweise stetig differenzierbar ist, bezüglich einer Zerlegung $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$, so kann man obige Rechnung auf die Teilintervalle $[s_{k-1}, s_k]$ anwenden. Dies führt zu einer Teleskopsumme bei der sich alle Terme bis auf $f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$ kürzen. □

11.52. — Eine von vielen physikalischen Interpretationen solcher Wegintegrale ist die Berechnung der Arbeit entlang eines Weges γ. Angenommen $F(x)$ gibt die Richtung und die Stärke eines Kraftfeldes an der Stelle $x \in U$ an. Dann ist $\langle F(\gamma(t)), \gamma(t+\delta) - \gamma(t) \rangle$ näherungsweise die Arbeit die verrichtet wird, wenn sich ein Körper entlang des Pfades γ von $\gamma(t)$ nach $\gamma(t+\delta)$ bewegt. Dies führt zur Interpretation von $\int_\gamma F dt$ als die geleistete **Arbeit** entlang des Weges γ. Diese Gesamtarbeit hängt im Allgemeinen vom gewählten Weg und nicht nur vom Anfangsort $\gamma(a)$ und vom Zielort $\gamma(b)$ ab. Die geleistete Arbeit hängt aber nicht von der gewählten Parametrisierung des Weges ab, vergleiche Lemma 11.48.

Beispiel 11.53. — Wir betrachten das Vektorfeld F auf $\mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x,y) = (-y, x)$, und berechnen das Integral von F entlang verschiedener Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$.



Figur 11.3: Das Vektorfeld F - die Längen der Vektoren sind um den Faktor 0.1 skaliert.

Seien γ_0, γ_1 und $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$, gegeben durch $\gamma_0(t) = (t,t)$ und

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (2t, 0) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 2t-1) & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t-1, 1) & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} F dt = \int_0^1 \left\langle F(\gamma_0(t)), \gamma_0'(t) \right\rangle dt = \int_0^1 \langle (-t,t), (1,1) \rangle \, dt = 0$$

$$\int_{\gamma_1} F dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \langle (0,2t), (2,0) \rangle \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle (1-2t, 1), (0,2) \rangle \, dt = 1$$

$$\int_{\gamma_2} F dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \langle (-2t, 0), (0,2) \rangle \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle (-1, 2t-1), (2,0) \rangle \, dt = -1$$

Wir sehen, dass die geleistete Arbeit $\int_\gamma F dt$ vom gewählten Weg γ abhängt. Bewegt man sich senkrecht zum Vektorfeld, so wird gar keine Arbeit geleistet. Bewegt man sich mit dem Vektorfeld, so wird positive Arbeit geleistet, und bewegt man sich entgegen dem Vektorfeld, so wird negative Arbeit geleistet.

Aus diesen Rechnungen folgt insbesondere, dass das Vektorfeld F kein Potential besitzt.

11.4.3 Konservative Vektorfelder

Definition 11.54. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heisst F **konservativ**, falls für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [0,1] \to U$

und $\eta : [0,1] \to U$ die Implikation

$$\gamma(0) = \eta(0) \text{ und } \gamma(1) = \eta(1) \quad \Longrightarrow \quad \int_\gamma F dt = \int_\eta F dt.$$

gilt.

Übung 11.55. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und seien $x_0, x_1 \in U$. Zeigen Sie, dass x_0 und x_1 durch einen stetig differenzierbaren Weg miteinander verbunden werden können.

Übung 11.56. — Eine **Schlaufe** in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe γ in U

$$\int_\gamma F dt = 0$$

gilt.

Satz 11.57. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist F genau dann konservativ, wenn F ein Potential besitzt.*

Beweis. Falls F ein Potential besitzt so ist F konservativ nach Proposition 11.51. Angenommen F sei konservativ. Sei $x_0 \in U$ ein fester Punkt. Da U zusammenhängend ist, gibt es nach Übung 11.55 zu jedem $x \in U$ einen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ_x in U mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x. Wir betrachten die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_{\gamma_x} F dt$$

welche nicht von den gewählten Wegen γ_x abhängt, da F konservativ ist. Wir überprüfen für $k = 1, 2, \ldots, n$, dass $\partial_k f(x) = F_k(x)$ gilt, wobei $F_k(x) = \langle F(x), e_k \rangle$ für die k-te Komponente von $F(x) \in \mathbb{R}^n$ steht. Sei also $x \in U$ und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ klein genug, so dass $x + the_k \in U$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Wir können dann mit Hilfe des Weges $\gamma_x : [0,1] \to U$ von x_0 nach x einen Weg φ_h von x_0 nach $x + he_k$ durch

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} \gamma_x(2t) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ x + (2t-1)he_k & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

definieren. Für die partielle Ableitung $\partial_k f$ ergibt sich dadurch

$$\begin{aligned} \partial_k f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\varphi_h} F dt - \int_{\gamma_x} F dt \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \langle F(x + the_k), he_k \rangle \, dt = \lim_{h \to 0} \int_0^1 F_k(x + she_k) ds = F_k(x) \end{aligned}$$

auf Grund von Satz 11.36 und der Stetigkeit von F. Da dies für alle $x \in U$ und $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt, und $F_1, \ldots, F_n$ nach Annahme stetig sind, folgt aus Satz 11.11, dass f differenzierbar ist und $\operatorname{grad} f(x) = F(x)$ für alle $x \in U$ gilt. □

KOROLLAR 11.58. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei F ein stetig differenzierbares konservatives Vektorfeld auf U, mit Komponenten $F_1, \ldots, F_n$. Dann gilt*

$$\partial_j F_k = \partial_k F_j$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Ist F konservativ, so existiert nach Satz 11.57 eine differenzierbare Funktion f mit $\operatorname{grad} f = F$. Da F stetig differenzierbar ist, ist f zweimal stetig differenzierbar. Für $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt dann

$$\partial_j F_k = \partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f = \partial_k F_j \tag{11.9}$$

nach dem Satz von Schwarz 11.24. □

11.4.4 Integrabilitätsbedingungen

Dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld F auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die in Korollar 11.58 aufgestellten partiellen Differentialgleichungen (11.9) erfüllt ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials zu F. Wir nennen diese Differentialgleichungen **Integrabilitätsbedingungen** und wollen untersuchen, inwiefern sie auch hinreichend für die Existenz eines Potentials zu F sind. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Gleichungen 11.58 im Allgemeinen nicht implizieren, dass F ein Potential besitzt.

BEISPIEL 11.59. — Wir betrachten $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und das Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \left(\tfrac{-y}{x^2+y^2}, \tfrac{x}{x^2+y^2}\right)$$

für $(x, y) \in U$. Eine direkte Rechnung zeigt

$$\partial_1 F_2(x, y) = \partial_x \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \partial_2 F_1(x, y)$$

womit die Integrabilitätsbedingungen (11.9) auf ganz U erfüllt sind. Dennoch ist F nicht konservativ. Sei $\gamma : [0, 1] \to U$ die stetig differenzierbare Schlaufe definiert durch

$$\gamma(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big)$$

die einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Einheitskreis läuft. Dann ist

$$\int_\gamma F dt = 2\pi \int_0^1 \Big\langle \big(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)\big), \big(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)\big) \Big\rangle \, dt = 2\pi,$$

obwohl γ ein geschlossener Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ ist.

Satz 11.60. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das den Integrabilitätsbedingungen*

$$\partial_k F_j = \partial_j F_k \tag{11.10}$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ genügt. Seien $\gamma_0 : [0, 1] \to U$ und $\gamma_1 : [0, 1] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Pfade mit dem selben Anfangspunkt x_0 und dem selben Endpunkt x_1. Sind γ_0 und γ_1 homotop, so gilt

$$\int_{\gamma_0} F dt = \int_{\gamma_1} F dt.$$

Korollar 11.61. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U ist genau dann konservativ, falls es den Integrabilitätsbedingungen* (11.10) *genügt.*

Beweis. Das folgt direkt aus Satz 11.60 und Definition 10.93. □

11.62. — Satz 11.60 ist ein Beispiel für einen sogenannten **globalen Integrationssatz**, weil er, wie in Korollar 11.61 ersichtlich, etwas mit der globalen Form des Definitionsbereichs U zu tun hat. Wir geben zwei Beweise für den Satz 11.60, einen geometrischen Beweis über Zurückziehen von Vektorfeldern (Definition 11.65) und Glätten von Funktionen, und einen topologischen Beweis bei dem wir Zusammenhangskomponenten eines Funktionenraumes untersuchen.

Lemma 11.63. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das den Integrabilitätsbedingungen* (11.10) *genügt. Dann ist F konservativ.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Integrabilitätsbedingungen wurde bereits in Korollar 11.58 bewiesen. Für die Umkehrung nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an dass $0 \in U$ gilt. Wir verwenden das Wegintegral von F über die gerade Strecke von 0 nach $x \in U$, um eine Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt$$

für $x \in U$ zu definieren. Entsprechend dem Beweis von Satz 11.57 ist f ein Kandidat für ein Potential von F. Wir fixieren ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und betrachten als Vorbereitung zur Berechnung von $\partial_j f$ zuerst für $h \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_h F_j = \sum_{k=1}^n h_k \partial_k F_j = \sum_{k=1}^n h_k \partial_j F_k \tag{11.11}$$

nach den vorausgesetzten Integrabilitätsbedingungen. Nach Satz 11.36 über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen existiert die partielle Ableitung $\partial_j f$ der Funktion f, und es gilt für

$x \in U$

$$\partial_j f(x) = \partial_j \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n F_k(tx) x_k \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (\partial_j F_k)(tx) t x_k + F_j(tx) \right) dt, \tag{11.12}$$

da einzig der Term mit $k = j$ die Produktregel erfordert und da die partielle Ableitung von $x \mapsto F_k(tx)$ nach x_j durch $t(\partial_j F_k)(tx)$ für $x \in U$ gegeben ist. Letzteres folgt aus der Kettenregel. Wir verwenden (11.11) für $h = x$ in (11.12) und erhalten mit partieller Integration

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 t \underbrace{\partial_x F_j(tx)} dt + \int_0^1 F_j(tx) dt = [t F_j(tx)]_0^1 - \int_0^1 F_j(tx) dt + \int_0^1 F_j(tx) dt = F_j(x)$$

wobei wir im unterklammerten Term die Ableitung nach t von $F_j(tx)$ erkannt haben. Daher gilt $F = \operatorname{grad} f$, und f ist stetig differenzierbar nach Satz 11.11. Das Lemma folgt somit aus der Charakterisierung der Konservativität in Satz 11.57. □

Übung 11.64. — Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y) = \big(\lambda x \exp(y), (y + 1 + x^2) \exp(y)\big)$$

konservativ? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von f.

Definition 11.65. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : V \to U$ eine stetig differenzierbare Funktion. Das Vektorfeld $\varphi^* F$ auf V, gegeben durch

$$\varphi^* F : x \mapsto \sum_{k=1}^m \langle \partial_k \varphi(x), F(\varphi(x)) \rangle \, e_k \tag{11.13}$$

heisst **Pullback** von F, oder das entlang φ **zurückgezogene** Vektorfeld. Die dadurch entstehende Abbildung

$$\varphi^* : \big\{\text{Stetige Vektorfelder auf } U\big\} \to \big\{\text{Stetige Vektorfelder auf } V\big\}$$

nennen wir **Zurückziehen** von Vektorfeldern.

Proposition 11.66. — *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und sei $\varphi : V \to U$ eine stetig differenzierbare Funktion.*

(1) Die in (11.13) *betrachtete Abbildung φ^* ist linear.*

(2) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\psi : W \to V$ stetig differenzierbar. Dann gilt $\psi^* \varphi^* F = (\varphi \circ \psi)^* F$ für jedes stetige Vektorfeld F auf U. Ausserdem gilt $\mathrm{id}_U^* F = F$.

(3) Sei $\gamma : [0, 1] \to V$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt

$$\int_\gamma \varphi^* F dt = \int_{\varphi \circ \gamma} F dt$$

für jedes stetige Vektorfeld F auf U.

(4) Ist F ein Vektorfeld von Klasse C^k auf U und $\varphi : V \to U$ von Klasse C^{k+1}, dann ist φF von Klasse C^k.

(5) Sei F ein Vektorfeld von Klasse C^1 auf U und $\varphi : V \to U$ von Klasse C^2. Erfüllt F die Integrabilitätsbedingungen (11.9)*, dann erfüllt $\varphi^* F$ ebenfalls die Integrabilitätsbedingungen.*

Beweis. Dass (11.13) linear ist folgt direkt aus der Bilinearität des Skalarprodukts. Die Aussage (2) folgt essentiell aus der Kettenregel, nämlich ist für $x \in W$ und $y = \psi(x)$ sowie $1 \leq q \leq p$ die q-te Komponente von $(\psi^*\varphi^*F)(x)$ durch

$$\langle \partial_q \psi(x), \varphi^* F(y) \rangle = \sum_{k=1}^{m} \partial_q \psi_k(x) \langle \partial_k \varphi(y), F(\varphi(y)) \rangle = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \partial_q \psi_k(x) \partial_k \varphi_l(y) F_l(\varphi(y))$$

gegeben. Nach der Kettenregel gilt $D(\psi \circ \varphi)(x) = D\psi(x) \circ D\varphi(\psi(x))$ was heisst, dass die Jacobi Matrix $D(\psi \circ \varphi)(x)$ das Produkt der Jacobi Matrizen $D\psi(x)$ mit $D\varphi(\psi(x))$ ist. Für den Koeffizienten $D\varphi(\psi(x))_{q,l}$ folgt also

$$\partial_q (\psi \circ \varphi)(x)_l = \sum_{k=1}^{m} \partial_q \psi_k(x) \partial_k \varphi_l(y),$$

und damit können wir die q-te Komponente von $(\psi^*\varphi^*F)(x)$ als

$$\langle \partial_q \psi(x), \varphi^* F(y) \rangle = \sum_{l=1}^{n} \partial_q (\psi \circ \varphi)(x)_l F_l(\varphi(y)) = \langle \partial_k (\psi \circ \varphi)(x), F(\varphi(\psi(x))) \rangle$$

schreiben. Dies ist aber nach Definition die q-te Komponente von $(\varphi \circ \psi)^* F(x)$, was Aussage (2) zeigt. Um Aussage (3) zu zeigen, bemerken wir zuerst, dass ein stückweise stetiges Vektorfeld auf einem Intervall dasselbe wie eine stückweise stetige reellwertige Funktion ist. Das in 11.47 definierte Pfadintegral für einen stückweise stetig differenzierbaren Pfad $\gamma : [0,1] \to U$ können wir alternativ als

$$\int_\gamma F dt = \int_0^1 (\gamma^* F)(t) dt$$

schreiben, wobei wir die Randpunkte 0, 1 und die endlich vielen Punkte in $[0,1]$ an denen γ nicht differenzierbar ist für das Integral ignorieren können. Aussage (3) folgt damit aus

$$\int_\gamma \varphi^* F dt = \int_0^1 \gamma^* \varphi^* F(t) dt \qquad \text{und} \qquad \int_{\varphi \circ \gamma} F dt = \int_0^1 (\varphi \circ \gamma)^* F(t) dt$$

und Aussage (2). Aussage (4) folgt direkt aus der Definition und der Tatsache, dass Summen, Produkte und Verknüpfungen von Funktionen der Klasse C^k wiederum von Klasse C^k sind. Wir prüfen schliesslich die Integrabilitätsbedingungen für $\varphi^* F$ in Aussage (5). Seien $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in U$. Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die Komponenten von φ, so gilt

$$\partial_k \varphi(x) = \partial_k \varphi_1(x) e_1 + \partial_k \varphi_2(x) e_2 + \cdots + \partial_k \varphi_n(x) e_n$$

mit reellen Koeffizienten $\partial_k \varphi_l(x) \in \mathbb{R}$. Dies sind gerade die Koeffizienten der Jacobi-Matrix von φ an der Stelle x. Nach Definition von $\varphi^* F$ gilt

$$\varphi^* F(x)_k = \langle \partial_k \varphi(x), F(\varphi(x)) \rangle = \sum_{l=1}^{n} \partial_k \varphi_l(x) F_l(\varphi(x))$$

sowie

$$\partial_j F_l(\varphi(x)) = DF_l(\varphi(x))(\partial_j \varphi(x)) = \sum_{p=1}^{n} \partial_p F_l(\varphi(x)) \partial_j \varphi_p(x)$$

nach der Kettenregel. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_j(\varphi^* F(x)_k) = \sum_{l=1}^{n} \partial_j \big(\partial_k \varphi_l(x) F_l(\varphi(x))\big) &= \sum_{l=1}^{n} \partial_j \partial_k \varphi_l(x) \cdot F_l(\varphi(x)) + \partial_k \varphi_l(x) \cdot \partial_j F_l(\varphi(x)) \\ &\sum_{l=1}^{n} \partial_j \partial_k \varphi_l(x) \cdot F_l(\varphi(x)) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \partial_k \varphi_l(x) \partial_j \varphi_p(x) \partial_p F_l(\varphi(x))\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt $\partial_j \partial_k \varphi_l = \partial_k \partial_j \varphi_l(x)$, und nach Hypothese gilt $\partial_p F_l = \partial_l F_p$. Der Ausdruck rechterhand bleibt also gleich wenn man k und j vertauscht, was zu zeigen war. □

Lemma 11.67. — *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig mit kompaktem Träger $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$, sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$. Es existiert eine glatte Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derart, dass*

$$\|f(x) - \widetilde{f}(x)\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad B(x, \delta) \cap K = \varnothing \implies \widetilde{f}(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m = 1$ an. Da f gleichmässig stetig ist, existiert ein $\eta > 0$ mit $\eta \leq \frac{1}{n}\delta$ und so, dass $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| \leq \eta$ gilt. Sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $b(t) = 0$ für $t \leq \eta$ und für $t \geq \eta$, und so dass

$$\int_{-\eta}^{\eta} b(t) dt = 1$$

gilt. Wir definieren $\widetilde{f_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{f_1}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} b(x_1 - t) f_1(t, \ldots, x_n) dt$$

Nach Satz 11.36 ist $\widetilde{f_1}$ beliebig oft stetig nach x_1 ableitbar, da das Integral auch als ein Integral über ein kompaktes Intervall geschrieben werden kann. Die Funktion $\widetilde{f_1}$ ist auch stetig nach $x_2, \ldots, x_n$ ableitbar, und zwar genauso oft wie f. Es gilt $\widetilde{f_1}(x) = 0$ für $x \notin K + B(0, \frac{1}{n}\delta)$, und es gilt

$$|\widetilde{f_1}(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} b(x_1 - t) f_1(t, \ldots, x_n) dt - f(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\eta}^{\eta} b(t)\big(f_1(x_1 - t, \ldots, x_n) - f(x)\big)dt \right| \leq \int_{-\eta}^{\eta} b(t)\,|f_1(x_1 - t, \ldots, x_n) - f(x)|\,dt$$
$$\leq \int_{-\eta}^{\eta} b(t)\tfrac{1}{n}\varepsilon dt = \tfrac{1}{n}\varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir wiederholen diese Konstruktion der Reihe nach auf den Koordinaten $x_2, x_3, \ldots, x_n$ und erhalten damit Funktionen $\widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_n$ wobei $\widetilde{f}_k$ beliebig oft stetig nach $x_1, \ldots, x_k$ ableitbar ist, mit $\widetilde{f}_k(x) = 0$ für $x \notin K + B(0, \frac{k}{n}\delta)$ und $|f(x) - \widetilde{f}_k(x)| < \frac{k}{n}\varepsilon$. Die Funktion $\widetilde{f} = \widetilde{f}_n$ hat die geforderten Eigenschaften. □

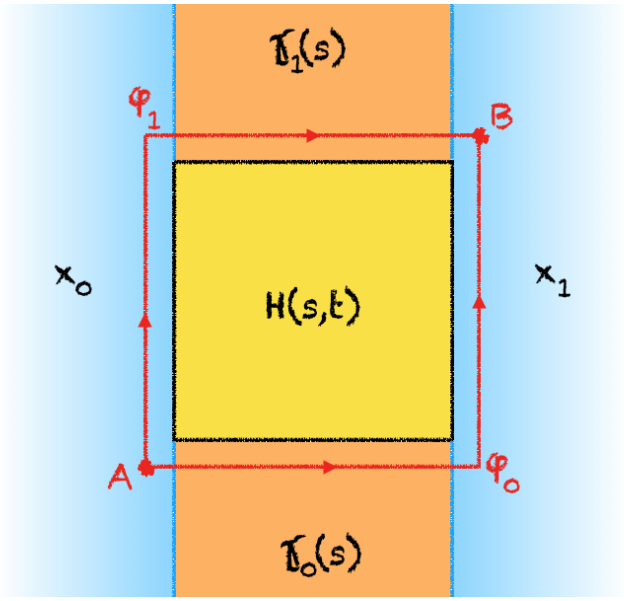
Erster Beweis von Satz 11.60. Seien $\gamma_0 : [0,1] \to U$ und $\gamma_1 : [0,1] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Pfade mit dem selben Anfangspunkt x_0 und demselben Endpunkt x_1 wie im Satz. Nach Lemma 11.48 und 11.49 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit γ_0 und γ_1 beliebig reparametrisieren, und insbesondere annehmen dass γ_0 und γ_1 stetig differenzierbar sind, mit $\gamma_0'(0) = \gamma_0'(1) = 0$ und $\gamma_1'(0) = \gamma_1'(1) = 0$. Sei $H : [0,1]^2 \to U$ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1. Es gilt also

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \qquad \text{und} \qquad H(s,0) = x_0, \quad H(s,1) = x_1$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $s \in [0,1]$. Wir setzten die Abblidung H stetig nach $H : \mathbb{R}^2 \to U$ fort, indem wir

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 & \text{falls } t \leq 0 \\ x_1 & \text{falls } t \geq 1 \\ \gamma_0(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \text{ und } s \leq 0 \\ \gamma_1(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \text{ und } s \geq 1 \end{cases}$$

definieren. Die folgende Graphik illustriert dies. Da γ_0 und γ_1 stetig differenzierbar sind, mit Ableitung 0 bei $t = 0$ und $t = 1$, ist H auf dem Komplement von $[0,1]^2$ stetig differenzierbar. Sei $\delta > 0$. Wir betrachten Pfade φ_0 und φ_1 von $A = -(\delta, \delta)$ nach $B = (1+\delta, 1+\delta)$ wie in der Graphik. Dann sind $H \circ \varphi_0$ und $H \circ \varphi_1$ Reparametrisierungen von γ_0, beziehungsweise γ_1.



Figur 11.4: Die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to U$, und zwei Wege von A nach B.

Falls H stetig differenzierbar ist, so gilt

$$\int_{\gamma_0} F dt = \int_{H\circ\varphi_0} F dt = \int_{\varphi_0} H^* F dt = \int_{\varphi_1} H^* F dt = \int_{H\circ\varphi_1} F dt = \int_{\gamma_1} F dt \tag{11.14}$$

nach Proposition 11.66, Lemma 11.63 und Konvexität von $\mathbb{R}^2$. Der Beweis des Satzes ist in dem Fall erbracht. Wir führen den allgemeinen Fall darauf zurück, indem wir die Funktion H in einer Umgebung von $[0,1]^2$ glätten. Das Bild der erweiterten Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to U$ ist gleich dem Bild von $H : [0,1]^2 \to U$, und ist also kompakt. Es existiert demnach ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|H(s,t) - x\| < \varepsilon\}$$

in U enthalten ist. Sei $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetig differenzierbare Funktion, so, dass

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{1}{4}\delta \le t \le 1 + \frac{1}{4}\delta \\ 0 & \text{falls } t \le -\frac{1}{2}\delta \text{ oder } 1 + \frac{1}{2}\delta \le t \end{cases}$$

gilt. Wir schreiben auch η für die durch $(s,t) \mapsto \eta(s)\eta(t)$ gegebene Funktion auf $\mathbb{R}^2$. Wir wenden Lemma 11.67 auf die stetige Funktion $G(s,t) = \eta(s,t)H(s,t)$ an. Es gibt also eine glatte Funktion $\widetilde{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\|G(s,t) - \widetilde{G}(s,t)\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \widetilde{G}(s,t) = 0 \text{ falls } (s,t) \notin [-\tfrac{3}{4}\delta, 1 + \tfrac{3}{4}\delta]^2$$

Die Funktion $\widetilde{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\widetilde{H}(s,t) = (1 - \eta(s,t))H(s,t) + \widetilde{G}(s,t)$$

ist stetig differenzierbar. Aufgrund der entsprechenden Eigenschaften von $\widetilde{G}$ gilt

$$\|H(s,t) - \widetilde{H}(s,t)\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \widetilde{H}(s,t) = H(s,t) \text{ falls } (s,t) \notin [-\tfrac{3}{4}\delta, 1+\tfrac{3}{4}\delta]^2.$$

Aufgrund der Wahl von $\varepsilon > 0$ nimmt $\widetilde{H}$ Werte in U an, und es gilt $\widetilde{H} \circ \varphi_0 = H \circ \varphi_0$ sowie auch $\widetilde{H} \circ \varphi_1 = H \circ \varphi_1$. Die Rechnung (11.14) mit $\widetilde{H}$ anstelle von H beweist den Satz. □

11.68. — Wir skizzieren in groben Zügen einen zweiten Beweis von Satz 11.60, der ohne das Zurückziehen von Vektorfeldern auskommt. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $x_1, x_2 \in U$. Wir statten die Menge

$$\Omega = \{\gamma : [0,1] \to U \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1, \text{ und } \gamma \text{ ist stückweise stetig differenzierbar}\}$$

mit der Topologie aus die von der durch $d(\gamma_0, \gamma_1) = \sup\{\|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)\| \mid 0 \le t \le 1\}$ gegebenen Metrik induziert wird. Wir studieren Ω als topologischen Raum.

Lemma 11.69. — *Seien $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega$. Sind die Pfade γ_0 und γ_1 homotop, so existiert ein Pfad $\varphi : [0,1] \to \Omega$ mit $\varphi(0) = \gamma_0$ und $\varphi(1) = \gamma_1$.*

Beweis. Das kann man mit Glättung zeigen, ähnlich wie wir auch im ersten Beweis Homotopien geglättet haben. Man kann auch ohne Integralrechnung zu benutzen zeigen, dass es eine Homotopie $H : [0,1]^2 \to U$ von γ_0 nach γ_1 gibt, so, dass für jedes $s \in (0,1)$ der Pfad $\gamma_s : t \mapsto H(s,t)$ stückweise linear ist. Dann ist $\varphi : [0,1] \to \Omega$ mit $\varphi(s) = \gamma_s$ ein Pfad in Ω. □

Zweiter Beweis von Satz 11.60. Unter den Hypothesen von Satz 11.60, seien x_0 und x_1 Elemente von U, und definiere Ω wie in 11.68. Wir betrachten die Funktion

$$I : \Omega \to \mathbb{R} \qquad I(\gamma) = \int_\gamma F dt = \int_0^1 \big\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \, dt$$

und behaupten, dass für jeden Punkt $\gamma_0 \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so, dass I auf dem offenen Ball $B(\gamma_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ konstant ist. Sei also $\gamma_0 \in \Omega$ fix gewählt. Das Bild $\gamma_0([0,1]) \subseteq U$ von γ_0 ist kompakt, und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen. Es existiert also ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $t \in [0,1]$

$$B(\gamma_0(t), \varepsilon) \subseteq U$$

gilt, wobei $B(\gamma_0(t), \varepsilon)$ für den offenen Ball in $\mathbb{R}^n$ mit Zentrum $\gamma_0(t)$ und Radius ε steht. Für $\gamma \in B(\gamma_0, \varepsilon)$ und alle $t \in [0,1]$ gilt dann $\gamma(t) \in B(\gamma_0(t), \varepsilon)$ und demnach insbesondere

$$H(s,t) = s\gamma(t) + (1-s)\gamma_0(t) \in U$$

für alle $s \in [0,1]$ und $t \in [0,1]$. Wir betrachten das Parameterintegral

$$E(s) = I(s\gamma + (1-s)\gamma_0) = \int_0^1 \big\langle F(s\gamma(t) + (1-s)\gamma_0(t), s\gamma'(t) + (1-s)\gamma_0'(t) \big\rangle \, dt$$

Eine direkte, wenn auch etwas langwierige Rechnung (ähnlich dem Nachweis von (5) in 11.66) zeigt $E'(s) = 0$. Hier benutzt man die Integrabilitätsbedingungen für F, sowie $\partial_s \partial_t H = \partial_t \partial_s H$, was hier direkt ersichtlich ist, ohne den Satz von Schwarz 11.24 zu verwenden. Die Funktion $I : \Omega \to \mathbb{R}$ ist also wie behauptet lokal konstant. Für $c = I(\gamma_0)$ ist also die Teilmenge

$$\{\gamma \in \Omega \mid I(\gamma) = c\}$$

offen und abgeschlossen, und enthält insbesondere die Wegzusammenhangskomponente von γ_0. Sind nun $\gamma_0 \in \Omega$ und $\gamma_1 \in \Omega$ zueinander homotope Pfade wie im Satz, so liegen nach Lemma 11.69 γ_0 und γ_1 in der selben Wegzusammenhangskomponente von Ω. Es folgt $I(\gamma_0) = I(\gamma_1)$, was zu zeigen war. □

Applet 11.70 (Integrabilitätsbedingungen)**.** *Welche verschiedenen Werte für das Wegintegral können Sie erhalten wenn Sie geschlossene Wege betrachten? Warum ändert sich der Wert des Wegintegrals meist nicht aber manchmal schon wenn Sie die mittleren drei Punkte bewegen?*

Kapitel 12

Anfänge der Differentialgeometrie

12.1 Sätze zur impliziten Funktion und zur inversen Abbildung

12.1.1 Satz der impliziten Funktion

12.1. — Die Sätze 12.3 und 12.4 bezeichnet man einzeln oder zusammengefasst als **Satz der impliziten Funktion**. Die Idee dieser Sätze ist, dass man m Gleichungen der Form

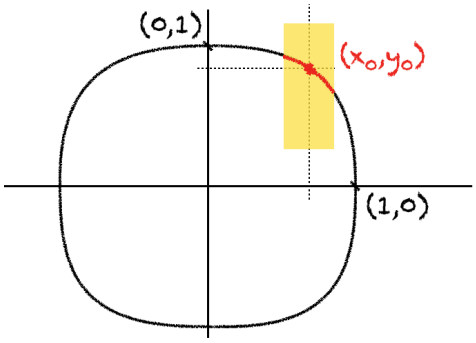
$$F_1(x,y) = 0, \quad F_2(x,y) = 0, \quad \ldots, \quad F_m(x,y) = 0$$

in Variablen $(x,y) = (x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m)$ gegeben hat, und man für vorgegebene $(x_1, \ldots, x_n)$ diese Gleichungen nach $y_1, \ldots, y_m$ auflösen möchte, das heisst, wir möchten y als Funktion von x schreiben. Da die Anzahl von Gleichungen gleich der Anzahl unbekannter Variablen ist, ist dies eine sinnvolle Aufgabenstellung. Die m Gleichungen fassen wir zu einer Gleichung $F(x,y) = 0$ in $\mathbb{R}^m$ zusammen, und wir möchten eine Funktion f in n Variablen $x = (x_1, \ldots x_n)$ und Werten $f(x) = y$ mit $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ finden, so, dass

$$F(x, f(x)) = 0$$

gilt. Diese Funktion f, die nach Satz 12.3 unter geeigneten Umständen existiert und eindeutig ist, heisst die durch $F(x,y) = 0$ implizit gegebene Funktion. Sie konkret auszurechnen ist oft schwer, aber wir können wiederum unter geeigneten Voraussetzungen etwas über ihre Ableitung aussagen.

Beispiel 12.2. — Wir betrachten den Fall $m = n = 1$, und wollen die Gleichung $x^4 + y^4 = 1$ nach y auflösen. Dazu betrachten wir die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. Die Menge M der Nullstellen von F, dargestellt in der folgenden Skizze, sind gerade die Lösungen dieser Gleichung.



Offenbar ist $M \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir können jedoch zu einem Punkt $(x_0, y_0) \in M$ wie in der Graphik eine Umgebung der Form $B(x_0, r) \times B(y_0, s)$ und eine Funktion $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$ finden, deren Graph gerade $M \cap (B(x_0, r) \times B(y_0, s))$ ist. Mit anderen Worten gilt

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

für alle $(x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s)$. Das funktioniert für alle Punkte $(x_0, y_0) \in M$, ausser für die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$, an denen die Tangente an M vertikal ist. Dies widerspiegelt die Hypothese 3 im folgenden Satz.

Satz 12.3. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $(x_0, y_0) \in U$, und sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *$F(x_0, y_0) = 0$.*
2. *Für alle $k = 1, \ldots, m$ existiert die partielle Ableitung $\partial_{y_k} F : U \to \mathbb{R}^m$ und ist stetig.*
3. *Die Matrix $A = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ ist invertierbar.*

Dann existieren $r > 0$ und $s > 0$ und eine stetige Funktion $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$, so dass für alle $(x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s)$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt.

Beweis. Da $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen ist, existieren $r_0 > 0$ und $s_0 > 0$ so, dass das kartesische Produkt von $B_n := B(x_0, r_0)$ und $B_m := B(y_0, s_0)$ in U enthalten ist. Wir ersetzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Definitionsbereich U von F durch $B_n \times B_m$. Für ein festes $x \in B_n$ schreiben wir

$$F_x : B_m \to \mathbb{R}^m$$

für die durch $F_x(y) = F(x, y)$ gegebene Funktion. Die invertierbare Matrix A ist damit gerade die Jacobi-Matrix der Funktion F_{x_0} an der Stelle $y = y_0$. Für ein festes $x \in B_n$ definieren wir die Hilfsfunktion

$$T_x : B_m \to \mathbb{R}^m \qquad T_x(y) = y - A^{-1} F_x(y)$$

und bemerken, dass für $(x, y) \in B(x_0, r_0) \times B(y_0, s_0)$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ zur Fixpunktgleichung $T_x(y) = y$ äquivalent ist.

Behauptung: *Es existieren $r > 0$ und $s > 0$, so, dass sich die Abbildung T_x zu einer Lipschitz Kontraktion $T_x : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)}$ einschränkt.*

Die Abbildung $B_n \times B_m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ gegeben durch $(x, y) \mapsto DT_x(y)$ ist nach Voraussetzung stetig. Ausserdem gilt

$$DT_{x_0}(y_0) = \mathrm{id}_m - A^{-1} DF_{x_0}(y_0) = \mathrm{id}_m - A^{-1}A = 0$$

wonach es also ein $r > 0$ und ein $s > 0$ gibt, so dass $\|DT_x(y)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \overline{B(x_0, r)}$ und alle $y \in \overline{B(y_0, s)}$ gilt. Wir zeigen, dass dies die Lipschitz-Kontraktionseigenschaft impliziert. Für $x \in \overline{B(x_0, r)}$ und $y_1, y_2 \in \overline{B(y_0, s)}$ folgt mit Hilfe des Weges $\gamma(t) = (1-t)y_1 + ty_2$

$$\begin{aligned}\|T_x(y_2) - T_x(y_1)\| &= \|T_x \circ \gamma(1) - T_x \circ \gamma(0)\| = \left\| \int_0^1 (T_x \circ \gamma)'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|DT_x(\gamma(t))(y_2 - y_1)\| dt \leq \int_0^1 \|DT_x(\gamma(t))\|_{\mathrm{op}} \|(y_2 - y_1)\| dt \leq \tfrac{1}{2}\|y_2 - y_1\|.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass für jedes $x \in \overline{B(x_0, r)}$ die eingeschränkte Abbildung $T_x : \overline{B(y_0, s)} \to \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $\frac{1}{2}$ ist. Nach Stetigkeit von F und wegen $F(x_0, y_0) = 0$ gilt für ein klein genug gewähltes $r > 0$ die Abschätzung

$$\|T_x(y_0) - y_0\| = \|A^{-1}F(x, y_0)\| < \tfrac{s}{2}$$

für alle $x \in \overline{B(x_0, r)}$. Für alle $x \in \overline{B(x_0, r)}$ und $y \in \overline{B(y_0, s)}$ folgt damit

$$\begin{aligned}\|T_x(y) - y_0\| &= \|T_x(y) - T_x(y_0) + T_x(y_0) - y_0\| \\ &\leq \|T_x(y) - T_x(y_0)\| + \|T_x(y_0) - y_0\| \leq \tfrac{1}{2}\|y - y_0\| + \tfrac{s}{2} \leq s\end{aligned}$$

was die aufgestellte Behauptung beweist.

Da $\overline{B(y_0, s)}$ ein vollständiger metrischer Raum ist, existiert nach dem Banach'schen Fixpunktsatz 10.33 für jedes $x \in \overline{B(x_0, r)}$ ein eindeutiges $y = f(x) \in \overline{B(y_0, s)}$ mit $T_x(y) = y$. Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Funktion $f : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)}$ stetig ist. Wir betrachten dazu die Teilmenge

$$\Omega = \{g : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)} \mid g \text{ ist stetig}\}$$

von $C(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R}^m)$. Nach Proposition 10.68 ist der Vektorraum $C(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R}^m)$ ausgestattet mit der Supremumsnorm ein vollständiger metrischer Raum. Die Teilmenge Ω ist der abgeschlossene Ball mit Radius s und Zentrum der konstanten Funktion mit Wert y_0. Damit ist Ω selbst ein vollständiger metrischer Raum. Wir definieren eine Abbildung $\widetilde{T} : \Omega \to \Omega$ durch

$$\widetilde{T}(g)(x) = T_x(g(x)) = g(x) - A^{-1}F(x, g(x)),$$

was auf Grund der Stetigkeit von F und den obigen Abschätzungen auch Sinn ergibt. Für $g_1, g_2 \in \Omega$ und $x \in \overline{B(x_0, r)}$ erhalten wir

$$\|(\widetilde{T}(g_1) - \widetilde{T}(g_2))(x)\| = \|T_x(g_1(x)) - T_x(g_2(x))\| \leq \tfrac{1}{2}\|g_1(x) - g_2(x)\| \leq \tfrac{1}{2}\|g_1 - g_2\|_\infty,$$

da T_x Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\frac{1}{2}$ ist. Dies zeigt, dass $\widetilde{T} : \Omega \to \Omega$ eine Lipschitz-Kontraktion ist und damit nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt. Sei $\widetilde{f}$ dieser Fixpunkt. Dann ist also $\widetilde{f} : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)}$ eine stetige Funktion, und für alle $x \in \overline{B(x_0, r)}$ gilt $\widetilde{f}(x) = \widetilde{T}(\widetilde{f})(x) = T_x(\widetilde{f}(x))$, wonach $\widetilde{f}(x) = f(x)$ gelten muss.

Schliesslich bemerken wir noch, dass die stetige Funktion $f : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)}$ zu einer stetigen Funktion $B(x_0, r') \to B(y_0, s)$ für ein genügend kleines $0 < r'$ eingeschränkt werden kann, was die genaue Aussage des Satzes zeigt. □

Satz 12.4. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $(x_0, y_0) \in U$, und sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften aus Satz 12.3, und sei $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$ die stetige lokale Lösungsfunktion aus Satz 12.3. Angenommen F ist d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$. Dann ist die Funktion f ebenso d-mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in B(x_0, r)$ ist durch*

$$Df(x) = -(D_yF)(x, f(x)))^{-1} \circ (D_xF)(x, f(x)) \tag{12.1}$$

gegeben.

12.5. — In der Aussage bezeichnet $D_xF(x_1, y_1)$ die totale Ableitung der Funktion $x \mapsto F(x, y_1)$ an der Stelle x_1 für ein festes y_1, und $D_yF(x_1, y_1)$ die totale Ableitung der Funktion $y \mapsto F(x_1, y)$ an der Stelle y_1 für ein festes x_1. Als Matrix ist $D_xF(x_1, y_1)$ durch die partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ nach $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, und $D_yF(x_1, y_1)$ durch die partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ nach $y_1, \ldots, y_m$. A priori ist die Invertierbarkeit der linearen Abbildung $(D_yF)(x, f(x)))$ nicht klar, und wird im Beweis nachgewiesen.

Falls bereits bekannt wäre, dass f differenzierbar ist, so würde (12.1) direkt aus der Kettenregel angewandt auf $F(x, f(x)) = 0$ folgen.

Beweis von Satz 12.4. Nach Annahme ist $A = DF_{x_0}(y_0) = D_yF(x_0, y_0)$ invertierbar. Seien T_x und $r > 0$ und $s > 0$ wie im Beweis von Satz 12.3. Dann gilt $DT_x = \mathrm{id}_m - A^{-1}(DF_x)$ und dadurch auch

$$A^{-1}DF_x(y) = \mathrm{id}_m - DT_x(y) \qquad \text{und} \qquad \|DT_x(y)\|_{\mathrm{op}} \leq \tfrac{1}{2}$$

für alle $(x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s)$. Daraus folgt mit Übung 12.7, dass $A^{-1}DF_x(y)$ invertierbar ist. Insbesondere ist $D_yF(x, y) = DF_x(y) = AA^{-1}DF_x(y)$ für alle $(x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s)$ als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar, und der Ausdruck (12.1) beschreibt für alle $x \in B(x_0, r)$ eine wohldefinierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

Um Differenzierbarkeit von f und (12.1) zu beweisen, fixieren wir $x \in B(x_0, r)$ und definieren $A_x = D_yF(x, f(x))$ und $a = \|A_x^{-1}\|_{\mathrm{op}}$ sowie $L_x = -A_x^{-1}D_xF(x, f(x))$ und $b = \|L_x\|_{\mathrm{op}}$. Für genügend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + h$ in $B(x_0, r)$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\| &= \|f(x+h) - f(x) + A_x^{-1}D_xF(x, f(x))(h)\| \\ &\le a\|D_xF(x, f(x))h + D_yF(x, f(x))\big(f(x+h) - f(x)\big)\|,\end{aligned}$$

wobei wir A_x^{-1} herausgehoben und die Definition der Matrixnorm verwendet haben. Der Vektor $D_xF(x, f(x))(h) + D_yF(x, f(x)(f(x+h) - f(x))$ ist die totale Ableitung von F im Punkt $(x, f(x))$, angewendet auf den Vektor $(h, f(x+h) - f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Als nächstes ändern wir das Vorzeichen dieses Terms innerhalb der Norm und fügen die Funktionswerte von F bei $(x, f(x))$ beziehungsweise $(x+h, f(x+h))$ hinzu. Dies führt zu

$$\begin{aligned}&\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\| \\ &\quad \le a \cdot \left\| \underbrace{F\Big(x+h, f(x+h)\Big)}_{=0} - \underbrace{F\Big(x, f(x)\Big)}_{=0} - DF(x, f(x))\Big(h, f(x+h) - f(x)\Big) \right\| \\ &\qquad \le \alpha(h) \ \left\| \Big(h, f(x+h) - f(x)\Big) \right\| \le \alpha(h) \ \big(\|h\| + \|f(x+h) - f(x)\|\big)\end{aligned}$$

mit $\alpha(h) = o(1)$ für $h \to 0$, da F bei $(x, f(x))$ differenzierbar und f stetig ist. Dies wäre die gewünschte Abschätzung für die Differenzierbarkeit von f, wenn rechts nicht der Term $\|f(x+h) - f(x)\|$ auftauchen würde. Wir können diesen jedoch mit einer kleinen Rechnung loswerden. Es gilt

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x)\| &= \|f(x+h) - f(x) - L_x(h) + L_x(h)\| \\ &\le \|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\| + \|L_x(h)\| \le \alpha(h)\big(\|h\| + \|f(x+h) - f(x)\|\big) + b\|h\|\end{aligned}$$

und daher auch

$$\big(1 - \alpha(h)\big)\|f(x+h) - f(x)\| \le \big(\alpha(h) + b\big)\|h\|.$$

Da $\alpha(h) = o(1)$ für $h \to 0$, gibt es ein $\rho \in (0, 1)$, so dass $\alpha(h) \le \frac{1}{2}$ für alle $h \in B(0, \rho)$. Damit ergibt sich $1 - \alpha(h) \ge \frac{1}{2}$ und

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le 2\big(\alpha(h) + b\big)\|h\| \le c\|h\|$$

für $c = 2(\frac{1}{2} + b)$. Wir setzen dies in die Abschätzung für $\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\|$ ein und erhalten

$$\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\| \le \alpha(h)(1 + c)\|h\|$$

für $h \in B(0, \rho)$. Da $\alpha(h) = o(1)$ für $h \to 0$, ergibt dies die Differenzierbarkeit von f sowie die Gleichung (12.1) für jedes $x \in B(x_0, r)$.

Sei nun F zweimal stetig differenzierbar. Die Einträge der Inversen einer Matrix lassen sich nach der Cramer'schen Regel durch ein Polynom in den Einträgen der Matrix und dem

Kehrwert der Determinante ausdrücken. Nach Gleichung (12.1) lassen sich die partiellen Ableitungen von f also als Polynome im Kehrwert von $h(x) = \det\big(D_yF(x, f(x))\big)$ und den ersten partiellen Ableitung von F ausgewertet bei $(x, f(x))$ ausdrücken. Da f stetig differenzierbar und F zweimal stetig differenzierbar ist, können wir nun diese partiellen Ableitungen nochmals ableiten. Wir erhalten nach der Kettenregel dafür wiederum Polynomiale Ausdrücke, in den partiellen Ableitungen von f, den zweiten Partiellen Ableitungen von F und $h(x)^{-1}$. Es folgt, dass f zweimal stetig differenzierbar ist. Mit Induktion ergibt sich dieselbe Aussage für alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung d, da F als d-mal stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde. □

Beispiel 12.6. — Die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x^2 + y + z - 2 \\ y - 2z + w^3 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Auflösbarkeit der Gleichung $F(x, y, z, w) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 1, 1, 1)$ untersuchen. Dazu betrachten wir das Differential

$$DF(x_0, y_0, z_0, w_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Satz der impliziten Funktion besagt, dass wir die Gleichung $F(x, y, z, w) = 0$ nahe (x_0, y_0, z_0, w_0) nach zwei der Variablen x, y, z, w auflösen können, sofern die 2×2-Teilmatrix obigen Differentials bestehend aus den zu diesen Variablen gehörigen partiellen Ableitungen invertierbar ist. Zum Beispiel ist dies der Fall für das Variablenpaar y und w, da die Teilmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ bestehend aus der 2. und 4. Spalte invertierbar ist. Die Ableitung der so definierten impliziten Funktionen f in $(x_0, z_0) = (0, 1)$ ist gemäss der Formel in Satz 12.4 dann durch

$$Df(x_0, z_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Übung 12.7. — Zeigen Sie, dass für $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Matrix $I_m - B$ invertierbar ist mit

$$(1_m - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j.$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ ist dabei als Grenzwert der Folge $\big(\sum_{j=0}^{n} B^j\big)_{n=0}^{\infty}$ aufzufassen; ein Teil der Aussage ist also, dass diese Folge unter den getroffenen Annahmen konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ offen ist und dass zu $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls invertierbar ist.

12.1.2 Satz zur inversen Abbildung

Wir möchten die Differenzierbarkeit der inversen Abbildung vom eindimensionalen Fall in Satz 8.20 auf Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Wir werden dazu den Satz der impliziten Funktion verwenden.

Satz 12.8 (Satz zur inversen Abbildung). — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare Funktion mit $d \geq 1$. Sei $x_0 \in U$ so, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x_0 und eine offene Umgebung $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv ist, und die Umkehrabbildung ebenso d-mal stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt*

$$(Df^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$$

für alle $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$.

Beweis. Wir definieren eine d-mal stetig differenzierbare Funktion $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F(x, y) = f(x) - y$$

und wollen die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach x auflösen. Da $D_xF(x_0, y_0) = Df(x_0)$ invertierbar ist, erfüllt F alle Voraussetzungen der Sätze 12.3 und 12.4 über implizite Funktionen (wobei x und y vertauschte Rollen einnehmen). Es folgt, dass $r > 0$ und $s > 0$ und eine d-mal stetig differenzierbare Funktion $g : B(y_0, r) \to B(x_0, s)$ existiert, so dass für alle $(x, y) \in B(x_0, s) \times B(y_0, r)$ die Äquivalenzen

$$y = f(x) \iff F(x, y) = 0 \iff x = g(y)$$

gelten. Wir definieren $U_0 = \tilde{U} \cap f^{-1}(V_0)$, was als Durchschnitt zweier offener Mengen wieder offen ist. Es folgt, dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ invertierbar ist, und insbesondere $V_0 \subseteq f(U)$ gilt, und dass $g : V_0 \to U_0$ die zu $f|_{U_0}$ inverse Abbildung ist. Aus Satz 12.4 folgt, dass g d-mal stetig differenzierbar ist und dass für $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$

$$Dg(y) = (Df(x))^{-1}$$

gilt, was auch aus der Kettenregel und $(g \circ f)|_{U_0} = \mathrm{id}_{U_0}$ folgt. Dies beendet den Beweis des Satzes. □

Definition 12.9. — Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive, glatte Funktion $f : U \to V$ mit glatter Inversen $f^{-1} : V \to U$ wird **Diffeomorphismus** genannt. Sind f und f^{-1} jeweils bloss d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$, so nennen wir f einen C^d**-Diffeomorphismus**.

Übung 12.10. — Verwenden Sie den Satz zur inversen Abbildung, um die Sätze zur impliziten Funktion 12.3 und 12.4 zu beweisen.

Korollar 12.11. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare, injektive Funktion mit $d \geq 1$. Angenommen $DF(x)$ sei für jeden Punkt $x \in U$ invertierbar. Dann ist $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ ist ein C^d-Diffeomorphismus mit*

$$(Df^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$$

für alle $x \in U$ und $y = f(x) \in V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $V = f(U)$ offen ist. Sei $y_0 = f(x_0)$ für ein $x_0 \in U$. Da $Df(x_0)$ invertierbar ist, können wir den Satz 12.8 zur inversen Abbildung anwenden und erhalten offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von y_0, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ ein C^d-Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $V_0 = f(U_0) \subset f(U) = V$, womit V offen ist, da $y_0 \in V$ beliebig war. Des Weiteren stimmt $(f|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ mit $f^{-1}|_{V_0} : V_0 \to U_0$ überein, wobei $f^{-1} : V \to U$ auf Grund der vorausgesetzten Injektivität existiert. Wir erhalten, dass f^{-1} auf V_0 also d-mal stetig differenzierbar ist. Da $y_0 \in V$ beliebig war, und da stetige Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, zeigt dies, dass f^{-1} d-mal stetig differenzierbar ist. Somit ist $f : U \to V$ ein C^d-Diffeomorphismus. □

Beispiel 12.12. — Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (x + y^2, y + x^2)$$

und wollen geeignete offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ finden, so dass $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Die Jacobi-Matrix von f bei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist durch

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, mit Determinante $1 - 4xy$. Das heisst, für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die nicht auf der Hyperbel $xy = \frac{1}{4}$ liegen, existiert nach dem Satz 12.8 über die inverse Abbildung eine Umgebung, so dass f eingeschränkt auf diese Umgebung ein Diffeomorphismus auf eine andere offene Menge ist. Wir betrachten das Quadrat $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ zwischen den beiden Punkten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ auf der Hyperbel. Man prüft leicht nach, dass $f|_U$ injektiv ist. Daraus, und aus Korollar 12.11 folgt dann, dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, da die Jacobi-Matrix auf U invertierbar ist.

12.1.3 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

12.13. — Die **Polarkoordinatenabbildung** ist die durch

$$f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\}) \qquad f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

definierte Funktion. Diese Funktion ist bijektiv (nach Abschnitt 7.5.4) und hat bei $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ die Jacobi-Matrix

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit Determinante $r > 0$, womit nach Korollar 12.11 die Abbildung f ein Diffeomorphismus ist.

12.14. — Eine dreidimensionale Verallgemeinerung der Polarkoordinaten stellen die **Zylinderkoordinaten** dar. Die entsprechende Abbildung ist der Diffeomorphismus

$$f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}) \qquad f(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit Jacobi-Matrix

$$Df(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und Jacobi-Determinante $r > 0$.

12.15. — Eine weitere Verallgemeinerung der Polarkoordinaten für den dreidimensionalen Raum stellen die **Kugelkoordinaten** dar. Hier werden ein Radius $r \in (0, \infty)$ und zwei Winkel $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ verwendet, wobei θ den Winkel eines Punktes relativ zum Nordpol der Sphäre $\mathbb{S}^2$ und φ den Winkel der Projektion auf die xy-Ebene relativ zu $(1, 0, 0)$ angeben soll. Der entsprechende Diffeomorphismus ist also durch

$$f : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}) \qquad f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben. Die entsprechende Jacobi-Matrix ist

$$Df(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und hat Determinante $r^2 \sin\theta \neq 0$.

12.2 Teilmannigfaltigkeiten des Euklidschen Raumes

Eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sollte man sich als Teilmenge vorstellen, die lokal wie eine offene Teilmenge eines Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^k$ mit meist niedrigerer Dimension $0 < k < n$ aussieht, und keine Ecken oder Kanten hat. Beispielsweise kann man sich vorstellen, dass man um jeden Punkt auf der 2-Dimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Umgebung findet, die sich durch „Flachdrücken“ zu einer offenen Kreisscheibe formen lässt.

Mannigfaltigkeiten sind von fundamentaler geometrischer Bedeutung und erscheinen zum einen in sehr vielen Bereichen der reinen und angewandten Mathematik, aber auch in der Physik, wie zum Beispiel der allgemeinen Relativitätstheorie. Wir begnügen uns hier mit der Untersuchung von Untermannigfaltigkeiten des Euklidischen Raumes.

12.2.1 Definition und Beispiele

Definition 12.16. — Sei $0 \leq k \leq n$ für $n \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale **Teilmannigfaltigkeit**, falls für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi_p(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\varphi_p(U_p \cap M) = \{y \in V_p \mid y_i = 0 \text{ für alle } i > k\}$$

gilt. Wir nennen den Diffeomorphismus φ eine **Karte** von M um p, und den zu φ inversen Diffeomorphismus $\varphi^{-1} : V \to U_p$ eine **Parametrisierung** von M um p.

12.17. — In anderen Worten sieht eine Teilmannigfaltigkeit M, in der Nähe eines jeden Punktes $p \in M$ und bis auf einen Diffeomorphismus, wie ein Teil des Teilraumes $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ von $\mathbb{R}^n$ aus. Wenn wir das wollen, können wir nach Anpassen des obigen Diffeomorphismus weitere Bedingungen an U_p oder V_p stellen. Zum Beispiel könnten wir durch Einschränken von φ_p einrichten, dass $U_p = B(p, r)$ für ein geeignetes $r > 0$ gilt. Oder wir könnten durch Verschieben von V einrichten, dass $\varphi_p(p) = 0$ gilt.

Beispiel 12.18. — Jede offene Teilmenge U in $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. In der Tat lässt sich der Diffeomorphismus φ_p zu $p \in U$ als die Identitätsabbildung auf U wählen. Umgekehrt ist nach Übung 12.24 jede n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Jede endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit. Dabei lässt sich φ_p zu $p \in M$ als eine Verschiebung $B(p, \varepsilon) \to B(0, \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug wählen.

Beispiel 12.19. — Ein auch für die Theorie sehr wichtiges Beispiel einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist der Graph einer glatten Funktion definiert auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, mit $k < n$ und

$n = k + m$. Dann ist

$$M = \mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \mid x \in U, y = f(x)\} \quad \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$$

eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Für $p \in M$ können wir $U_p = V_p = U \times \mathbb{R}^m$ und die glatte Abbildung

$$\varphi_p : U_p \to V_p, \qquad \varphi_p(x, y) = (x, y - f(x))$$

betrachten. Diese ist in der Tat einen Diffeomorphismus und

$$\varphi_p(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}^m \iff (x, y) \in U_p \cap M$$

erfüllt für alle (x, y) in U_p. In Proposition 12.21 werden wir zeigen, dass sich jede k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit lokal als Graph einer Funktion darstellen lässt. Dazu beachtet man aber, dass diese Darstellung nicht zwingend über die ersten k Koordinaten ablaufen muss, wir lassen Koordinatenvertauschungen zu.

Beispiel 12.20. — Die n-dimensionale **Einheitssphäre** $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Dies kann man mit Hilfe der stereographischen Projektion direkt nachprüfen - rechnerische Details sind dem Leser überlassen. Für jedes $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ existiert ein eindeutiges $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda(x)(x - e_{n+1}) + e_{n+1} \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

gilt. Wir schreiben $U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} < 1\}$, und für $x \in U$ schreiben wir $P(x)$ für den eindeutigen Schnittpunkt von $\mathbb{S}^n$ mit der Geraden durch x und e_{n+1}. Jetzt kann man zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi : U \to U \qquad \varphi(x) = \lambda(P(x)) \cdot (x - e_{n+1}) + e_{n+1}$$

ein Diffeomorphismus ist, und sich zu einer Bijektion $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$ einschränkt. Mit anderen Worten ist φ eine Karte um jeden Punkt $p \in \mathbb{S}^n$, ausser e_{n+1}. Durch eine geeignete Permutation der Koordinaten kann auch eine Karte in einer Umgebung von e_{n+1} konstruiert werden. Die stereographische Projektion kommt in der Kartographie und Computergraphik zum Einsatz, ist aber etwa auch in der Kristallographie nützlich.

Proposition 12.21. — *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von p in $\mathbb{R}^n$, eine glatte Funktion $f_p : \tilde{U}_p \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $\tilde{U}_p \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gibt, so dass*

$$M \cap U_p = P_\sigma(\mathrm{Graph}(f_p))$$

gilt. Hier bezeichnet $P_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die von σ induzierte Permutation der Koordinaten.

Beweis. Angenommen M ist eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Sei $p \in M$, U_p eine offene Umgebung von $p \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi_p : U_p \to V_p \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus wie in Definition 12.16 mit $\varphi_p(p) = 0$. Definiere

$$\psi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \to M \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad \psi(y_1, \ldots, y_k) = \varphi_p^{-1}(y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$$

für ein $\varepsilon > 0$ klein genug. Dann hat das Differential $D\psi(0)$ Rang k, womit k linear unabhängige Zeilen in der Jacobi-Matrix $D\psi(0)$ existieren. Nach Koordinatenvertauschung (von hier stammt σ in der Aussage) können wir annehmen, dass dies die ersten k Zeilen sind. Damit hat die Abbildung

$$g : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \to \mathbb{R}^k, \qquad g(y) = (\psi_1(y), \ldots, \psi_k(y))$$

ein invertierbares Differential bei 0. Also existiert nach dem Satz 12.8 zur inversen Abbildung eine nichtleere offene Menge $U \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^k$, so dass die Einschränkung von g auf U ein Diffeomorphismus ist. Wir betrachten nun die Abbildung $f = \psi \circ (g|_U)^{-1} : g(U) \to M$. Für $i \leq k$ und alle $y \in g(U)$ gilt $f_i(y) = \psi_i(g|_U^{-1}(y)) = y_i$ nach Konstruktion. Die Teilmannigfaltigkeit M ist also lokal der Graph der Abbildung

$$h : g(U) \to \mathbb{R}^n, \qquad h(y) = (f_{k+1}(y), \ldots, f_n(y))$$

womit eine Implikation bewiesen ist. Für die Umkehrung kann man analog vorgehen wie in Beispiel 12.19. □

Applet 12.22 (Illustration zur Darstellbarkeit durch Graphen)**.** *In diesem Applet illustrieren wir Proposition 12.21 anhand einer eindimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, wobei Sie rechts auswählen können ob für den ausgewählten Punkt die Vertauschung der Koordinaten angewendet werden sollte.*

Übung 12.23. — Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y^2 - x) = 0\}$. Zeigen Sie unter Verwendung von Proposition 12.21, dass $M \setminus \{0\}$ eine Teilmannigfaltigkeit ist, aber M nicht.

Übung 12.24. — Zeigen Sie, dass jede n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie ebenso, dass jede nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

12.25. — Der Begriff der Teilmannigfaltigkeit lässt sich zum Begriff von C^d-Teilmannigfaltigkeiten für ein beliebiges $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ verallgemeinern. Dazu verwendet man C^d-Diffeomorphismen als Karten.

12.2.2 Niveaumengen als Teilmannigfaltigkeiten

Viele interessante Teilmannigfaltigkeiten sind über Gleichungen definiert, das heisst, als Nullstellen einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Allerdings ist bereits für sehr einfache Funktionen die Nullstellenmenge nicht immer Teilmannigfaltigkeit, so etwa im Fall der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = xy$. Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Nullstellenmenge von F eine Teilmannigfaltigkeit ist.

Satz 12.26 (Satz vom konstanten Rang). — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion. Die Nullstellenmenge $M = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ ist eine $(n-m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, falls für alle $p \in M$ die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist.*

Beweis. Wir nehmen an, das $0 < m \leq n$ gilt, da sonst nichts zu zeigen ist. Sei $p \in M$. Nach Voraussetzung ist der Rang der totalen Ableitung $DF(p)$ gleich $\min(m, n) = m$. Wir schreiben auch $DF(p)$ für die Jacobi-Matrix $DF(p) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, mit m Zeilen und n Spalten. Nach Annahme existieren m dieser Spalten, welche gemeinsam eine invertierbare Matrix bilden. Wenn nötig, ordnen wir die Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ um, so, dass die letzten m Spalten von $DF(p)$ linear unabhängig sind. Wir bezeichnen die ersten $k = n - m$ Koordinaten mit x und die letzten m Koordinaten mit y. Durch diese Vertauschung können wir annehmen, dass $D_yF(p)$ invertierbar ist. Somit erfüllen die Funktion $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und der Punkt $p = (x_0, y_0)$ die Voraussetzung der Sätze 12.3 und 12.4 über implizite Funktionen. Es existieren also $r > 0$ und $s > 0$ und eine glatte Funktion $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$, so dass

$$M \cap \big(B(x_0, r) \times B(y_0, s)\big) = \mathrm{Graph}(f)$$

gilt. Wir können also eine Karte $\varphi_p : U_p \to V_p$ durch $U_p = V_p = B(x_0, r) \times B(y_0, s)$ und

$$\varphi_p(x, y) = (x, y - f(x))$$

definieren, genau wie in Beispiel 12.19. Da $p \in M$ beliebig war, beweist dies den Satz. □

Definition 12.27. — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in U$ heisst **kritischer Punkt** von f, falls $Df(x)$ Rang kleiner als $\min(m, n)$ hat, andernfalls nennt man $x \in U$ einen **regulären Punkt** der Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$. Das Bild eines kritischen Punktes unter f nennt man einen **kritischen Wert**; Punkte in $\mathbb{R}^m$ im Komplement der kritischen Werte von f heissen **reguläre Werte**.

Beispiel 12.28. — Der einzige kritische Punkt der Funktion $F : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ auf $\mathbb{R}^3$ ist der Ursprung. Aus diesem Grund ist für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nach Satz 12.26 das sogenannte **Hyperboloid**

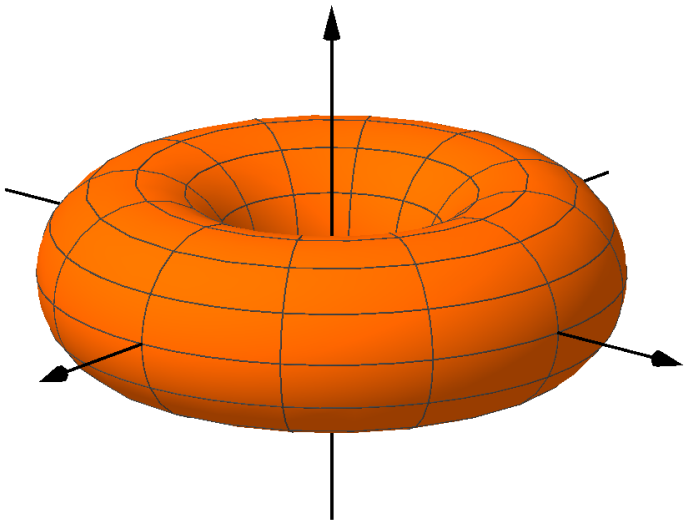
$$H_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - a = 0\}$$

eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Dies lässt sich auf beliebige quadratische Formen anstelle von F verallgemeinern. Insbesondere ist die n-dimensionale **Einheitssphäre**

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 - 1 = 0\}$$

eine n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel 12.29. — Der zweidimensionale **Torus** mit Radien $0 < r < R$ ist der Rotationskörper in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man den Kreis in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, R)$ und Radius r um die z-Achse rotiert.



Wir möchten zeigen, dass dieser Torus $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit ist. Wir beschreiben dazu M durch die Gleichung

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}.$$

das heisst, als Nullstellenmenge der Funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + R^2 - r^2$. Diese Funktion ist glatt auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \neq (0, 0)\}$, und aufgrund der Ungleichung $r < R$ ist der Torus M eine Teilmenge von U. Die Ableitung von F an der Stelle $p = (x, y, z) \in U$ ist

$$DF(p) = \left(2x\left(1 - \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), 2y\left(1 - \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), 2z\right).$$

Falls p ein kritischer Punkt ist, das heisst, falls $DF(p) = 0$ gilt, so gilt $z = 0$ und $R^2 = x^2 + y^2$. Keiner dieser Punkte liegt aber auf M. Nach Satz 12.26 ist der Torus M eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

12.2.3 Tangentialraum und Tangentialbündel

Wir wollen zu einer gegebenen Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ den zugehörigen „Phasenraum“ definieren, der analog zum einfacheren Fall $M = U$ für eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$, aus

allen Paaren der möglichen Orte $p \in M$ und den bei p möglichen Geschwindigkeitsvektoren bestehen soll.

Definition 12.30. — Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Der **Tangentialraum** von M bei $p \in M$ ist durch

$$\mathrm{T}_p M = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-1,1) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = p\} \quad \subseteq \mathbb{R}^n$$

definiert. Das **Tangentialbündel** von M ist durch

$$\mathrm{T}M = \{(p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in \mathrm{T}_p M\}$$

definiert. Die Abbildung $\pi : \mathrm{T}M \to M$ gegeben durch $\pi(p,v) = p$ heisst **kanonische Projektion**, und die Abbildung $0_M : M \to \mathrm{T}M$ gegeben durch $0_M(p) = (p,0)$ heisst **Nullschnitt**. Eine Abbildung $s : M \to \mathrm{T}M$ heisst **Schnitt** von $\mathrm{T}M$ oder auch **Vektorfeld** auf M, falls $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ gilt.

12.31. — In Worten ausgedrückt ist die Menge $\mathrm{T}_p M$, die sich als k-dimensionaler Vektorraum herausstellen wird, die Menge der Geschwindigkeitsvektoren von kurzen Wegen durch p in M. Stellen wir uns Elemente von $\mathrm{T}_p M$ als Vektoren mit Fusspunkt p vor, so entspicht $\mathrm{T}_p M$ einem k-dimensionalen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der M im Punkt p berührt. Wir bemerken, dass die Wahl von $(-1,1)$ als Definitionsbereich von differenzierbaren Pfaden belanglos ist, wir hätten genausogut eine andere offene Ungebung von $0 \in \mathbb{R}$ wählen können, etwa ein offenes Intervall $(-\varepsilon,\varepsilon)$ für ein idealerweise kleines $\varepsilon > 0$.

Zur Vereinfachung der Notation werden wir für $k < n$ im Folgenden $\mathbb{R}^k$ mit dem Teilraum $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^n$ identifizieren.

Satz 12.32. — *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $\psi : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit $U \cap M = \psi(V \cap \mathbb{R}^k)$. Dann ist die Abbildung $\mathrm{T}\psi : (V \cap \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \to \mathrm{T}(M \cap U)$ gegeben durch*

$$\mathrm{T}\psi(y,h) = \big(\psi(y), D\psi(y)(h)\big)$$

eine Bijektion. Insbesondere ist für $p = \psi(y_0)$ der Tangentialraum $\mathrm{T}_p M = \operatorname{Im} D\psi(y_0)$ ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Da $V \cap \mathbb{R}^k$ offen in $\mathbb{R}^k$ ist, gibt es zu jedem $y \in V \cap \mathbb{R}^k$ und $h \in \mathbb{R}^k$ einen differenzierbaren Weg $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to V \cap \mathbb{R}^k$ mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma'(0) = h$, zum Beispiel den geraden Weg $\gamma(t) = y + th$. Damit ist $\psi \circ \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U \cap M$ ein differenzierbarer Weg mit $\psi \circ \gamma(0) = \psi(y)$ und $(\psi \circ \gamma)'(0) = \psi(y)(h)$. Also gilt

$$\mathrm{T}\psi(y,h) = (\psi(y), D\psi(y)(h)) \in \mathrm{T}(U \cap M),$$

und also ist $\mathrm{T}\psi$ wohldefiniert. Da ψ injektiv ist und da $D\psi(y)$ für jedes $y \in V$ injektiv ist, ist auch $\mathrm{T}\psi$ injektiv. Um Surjektivität zu zeigen wählen wir ein $p = \psi(y) \in U \cap M$ und einen differenzierbaren Pfad $\gamma : (-1,1) \to M \cap U$ mit $\gamma(0) = p$. Wir betrachten den Weg $\psi^{-1} \circ \gamma : (-1,1) \to (V \cap \mathbb{R}^k)$, welcher bei 0 die Ableitung $h = (D\psi^{-1})(p)(\gamma'(0)) \in \mathbb{R}^k$ hat. Gemeinsam mit $(D\psi^{-1})(p) = D\psi(y)^{-1}$ aus dem Satz zur inversen Abbildung 12.8, erhalten wir

$$(p, \gamma'(0)) = (\psi(y), D\psi(y)(h)) = \mathrm{T}\,\psi(y,h)$$

und also ist $\mathrm{T}\,\psi$ surjektiv. □

Proposition 12.33. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion und $M = F^{-1}(0)$. Falls für alle $p \in M$ die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist, so ist der Tangentialraum der Mannigfaltigkeit M gegeben durch*

$$\mathrm{T}M = \{(p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid F(p) = 0 \text{ und } DF(p)(v) = 0\}.$$

Beweis. Nach dem Satz vom konstanten Rang ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k = n - m$. Sei $p \in M$ beliebig. Nach Satz 12.32 ist $\mathrm{T}_p M$ ein k-dimensionaler Vektorraum, und auch der Kern von $DF(p)$ ist k-dimensional. Es reicht also die Inklusion

$$\mathrm{T}_p M \subseteq \ker DF(p)$$

zu zeigen. Sei $\gamma : (-1,1) \to M$ ein differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = p$. Dann gilt $F \circ \gamma(t) = 0$ für alle $t \in (-1,1)$ nach Definition von M und es folgt $DF(p)(\gamma'(0)) = (F \circ \gamma)'(0) = 0$, was den Beweis abschliesst. □

Beispiel 12.34. — Wir betrachten die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$ mit $F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$. Dann ist für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$DF(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n) = 2x,$$

und somit ist der Tangentialraum bei $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$\mathrm{T}_x \mathbb{S}^{n-1} = \ker(DF(x)) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle 2x, v\rangle = 0\} = \langle x \rangle^\perp$$

gegeben. Die Menge $\{x + v \mid v \in \mathrm{T}_x \mathbb{S}^{n-1}\}$ ist eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die die Einheitssphäre tangential im Punkt x schneidet.

Übung 12.35. — Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + a\big\}$. Für welche a ist M_a eine Teilmannigfaltigkeit?

Übung 12.36. — Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax\rangle = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Übung 12.37. — In dieser Übung möchten wir zeigen, dass die Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \right\}$$

eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass $I_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein regulärer Punkt von det ist und dass $D\det(I_2) = \mathrm{tr}$ ist, wobei $\mathrm{tr} : (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \mapsto a_{11} + a_{22}$ die Spur bezeichnet.

(ii) Sei $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $v \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Richtungableitung $\partial_v \det(g)$ existiert und durch $\mathrm{tr}(g^{-1}v)$ gegeben ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine Teilmannigfaltigkeit ist.

Übung 12.38. — Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $\mathrm{T}M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ eine $2k$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit ist.

Übung 12.39. — Sei M eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit gegeben durch den Graphen einer glatten Funktion wie in Beispiel 12.19 oder Proposition 12.21. Charakterisieren Sie in dieser Situation des Tangentialbündel von M in Analogie zu Proposition 12.33.

Übung 12.40 (Challenge). — Sei M eine zusammenhängende, 1-dimensionale, kompakte Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass ein regulärer, einfacher, glatter Weg $\gamma : [0,1] \to M$ existiert mit $\gamma([0,1]) = M$.

12.3 Extremwertprobleme

Jede stetige, reellwertige Funktion f auf einem kompakten topologischen Raum hat ein globales Maximum und ein globales Minimum, nach Satz 10.47. Zum Beispiel nimmt die Funktion $f(x, y, z) = xy + yz + 6z^4$ auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ an irgend einer Stelle ihr Maximum an. Der Beweis von Satz 10.47 liefert keine Methode um dieses Extremum zu finden. In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man mit Hilfe der sogenannten Methode der **Lagrange-Multiplikatoren** solche Extrema in gewissen Fällen auffinden kann.

12.3.1 Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren

12.41. — Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension k, und $p \in M$. Der Raum der Normalvektoren an M bei p ist definiert als das orthogonale Komplement

$$(\mathrm{T}_p M)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in \mathrm{T}_p M\}$$

zum Tangentialraum $\mathrm{T}_p M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dies ist ein Vektorraum der Dimension $n - k$. Als **Normalenbündel** bezeichnen wir

$$(\mathrm{T}M)^\perp = \{(p, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, w \in (\mathrm{T}_p M)^\perp\}$$

und definieren wie auch für das Tangentialbündel die kanonische Projektion und den Nullschnitt.

Proposition 12.42. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Angenommen $f|_M$ nimmt in $p \in M$ ein lokales Extremum an. Dann ist* $\operatorname{grad} f(p)$ *ein Normalvektor an M bei p.*

Beweis. Wir betrachten einen differenzierbaren Weg $\gamma : (-1, 1) \to M$ mit $\gamma(0) = p$. Da f in p ein lokales Extremum annimmt, nimmt $f \circ \gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ in 0 ein lokales Extremum an. Daher gilt nach Proposition 8.26 und der Kettenregel

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \big\langle \operatorname{grad} f(p), \gamma'(0)\big\rangle\,.$$

Da γ ein beliebiger differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = p$ war, folgt daraus mit der Definition des Tangentialraums die Proposition. □

12.43. — Damit wir Proposition 12.42 in die Praxis umsetzen können, nehmen wir im Folgenden an, dass die k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq U$ durch $M = \{x \in U | F(x) = 0\}$ für eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^m$ mit konstantem Rang wie in Satz 12.26 gegeben ist, mit $n = k + m$. Zu F und einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ betrachten wir die

sogenannte **Lagrange-Funktion**

$$L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad\qquad L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j(x).$$

Die Komponenten von $\lambda \in \mathbb{R}^m$ werden **Lagrange-Multiplikatoren** genannt.

Korollar 12.44. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit gegeben als Niveaumenge durch eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f|_M$ in $p \in M$ ein lokales Extremum annimmt, und sei L die zu F und f gehörige Lagrange-Funktion. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so dass die Gleichungen*

$$\partial_{x_i} L(p, \lambda) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \partial_{\lambda_j} L(p, \lambda) = 0$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ erfüllt sind.

Beweis. Die Gleichungen $\partial_{\lambda_j} L(p, \lambda) = -F_j(p) = 0$ für $j = 1, \dots, m$ folgen direkt aus der Definition von L und M. Die Gleichungen $\partial_{x_i} L(p, \lambda) = 0$ können wir zu

$$\operatorname{grad} f(p) = \lambda_1 \operatorname{grad} F_1(p) + \lambda_2 \operatorname{grad} F_2(p) + \cdots + \lambda_m \operatorname{grad} F_m(p)$$

zusammenfassen. Die Behauptung ist also, dass $\operatorname{grad} f(p)$ eine Linearkombination der Zeilen von $DF(p) \in \operatorname{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ ist. Nach Annahme hat $DF(p)$ vollen Rang m, und nach Proposition 12.33 gilt somit

$$\mathrm{T}_p M = \ker DF(p) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} F_j(p), v \rangle = 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}.$$

Also sind die Vektoren $\operatorname{grad} F_1(p), \dots, \operatorname{grad} F_m(p)$ Normalvektoren an M bei p. Wegen linearer Unabhängigkeit und $\dim((\mathrm{T}_p M)^\perp) = m$ lässt sich jeder Normalvektor als Linearkombination dieser Vektoren schreiben. Nach Proposition 12.42 ist $\operatorname{grad} f(p)$ ein Normalvektor und das Korollar folgt. □

Beispiel 12.45. — Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = y^3 - x^2$, und die kompakte Menge

$$K = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

und wollen das Minimum der Funktion $f(x, y) = 4y - 3x$ auf auf K finden. Die Menge $M = K \setminus \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1)\}$ ist eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Es gilt

$$f(0, 0) = 0, \qquad f(1, 1) = 1, \qquad f(-1, 1) = 7.$$

Wir wollen nun mit der Methode der Lagrange Multiplikatoren die lokalen Extremwerte von $f|_M$ auffinden. Die zu f und F gehörige Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x, y, \lambda) = 4y - 3x - \lambda(y^3 - x^2).$$

Man berechnet

$$\begin{aligned}
\partial_x L(x, y, \lambda) &= -3 + 2\lambda x \\
\partial_y L(x, y, \lambda) &= 4 - 3\lambda y^2 \\
\partial_\lambda L(x, y, \lambda) &= -(y^3 - x^2).
\end{aligned}$$

Aus $-3 + 2\lambda x = 0$ folgt $\lambda \neq 0$ und $x \neq 0$ sowie $\lambda = \frac{3}{2x}$. Genauso folgt aus $4 - 3\lambda y^2 = 0$, dass $y \neq 0$ und $\lambda = \frac{4}{3y^2}$. Damit gilt $\frac{3}{2x} = \frac{4}{3y^2}$ oder äquivalent dazu $x = \frac{9}{8}y^2$. Andererseits gilt des Weiteren $\partial_\lambda L(x, y, \lambda) = -(y^3 - x^2) = 0$. Setzen wir nun $x = \frac{9}{8}y^2$ ein, so erhalten wir

$$0 = y^3 - \left(\tfrac{9}{8}y^2\right)^2 = y^3 - \tfrac{9^2}{8^2}y^4 = y^3\left(1 - \tfrac{9^2}{8^2}y\right).$$

Da $y \neq 0$ ist, ergibt dies $y = \frac{8^2}{9^2}$ und $x = \frac{9}{8}y^2 = \frac{8^3}{9^3}$. Wir erhalten also mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren einen einzigen weiteren Kandidaten für die Extremwerte, nämlich

$$f(\tfrac{8^3}{9^3}, \tfrac{8^2}{9^2}) = 4\tfrac{8^2}{9^2} - 3\tfrac{8^3}{9^3} = 1.053\ldots.$$

Die Menge aller Punkte von K an denen f auf K ein lokales Extremum annimmt ist also in

$$\{(0,0), (1,1), (1,-1), (\tfrac{8^3}{9^3}, \tfrac{8^2}{9^2})\}$$

enthalten. Das Globale Maximum von f ist am Punkt $(1, 1)$ mit Wert 7, das globale Minimum am Punkt $(0, 0)$ mit Wert 0.

Applet 12.46 (Lagrange-Multiplikatoren und Normalenvektoren)**.** *In diesem Applet illustrieren wir Proposition 12.42 und Korollar 12.44 anhand einer eindimensionalen Teilmannigfaltigkeit. Unter dieser Annahme liegt nur ein Gradientenvektor ∇F vor, womit Proposition 12.42 besagt, dass ∇F und ∇f parallel sein sollen.*

12.3.2 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen

Mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren können wir relativ einfach folgenden wichtigen Satz aus der Linearen Algebra beweisen.

Satz 12.47. — *Jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, und es existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.*

Lemma 12.48. — *Sei $n \geq 1$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann besitzt A einen reellen Eigenvektor.*

Beweis. Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}$ als Niveaumenge der Funktion $F\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben duch $F(x) = \|x\|^2 - 1$, und die reellwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^t Ax.$$

Da $\mathbb{S}$ kompakt ist, nimmt $f|_{\mathbb{S}}$ ein Maximum und ein Minimum an. Also angenommen f nimmt in $p \in \mathbb{S}$ ein Extremum an. Sei

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \qquad L(\lambda, x) = f(x) - \lambda F(x) = x^t Ax - \lambda(\|x\|^2 - 1)$$

die zu $\mathbb{S}$ und f gehörige Lagrange-Funktion. Nach Korollar 12.44 existiert also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\partial_{x_j} L(p, \lambda) = \partial_j f(p) - \lambda \partial_j F(p) = 0 \tag{12.2}$$

für alle $j = 1, \ldots, n$ sowie $\partial_\lambda L(p, \lambda) = F(p) = 0$. Letzteres besagt bloss, dass $\|p\| = 1$ oder anders ausgedrückt $p \in \mathbb{S}$, wie bereits bekannt ist.

Wir berechnen nun die partiellen Ableitungen von F und f. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\partial_j F(x) &= \partial_j \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = 2x_j \\
\partial_j f(x) &= \partial_j \left(\sum_{k,\ell=1}^n a_{k\ell} x_k x_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell + \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k
\end{aligned}$$

nach der Produktregel und da $\partial_j(x_k)$ genau dann Null ist, wenn $k \neq j$ ist. Da A per Annahme aber symmetrisch ist, erhalten wir

$$\partial_j f(x) = 2 \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell = 2(Ax)_j.$$

Somit gilt $(Ap)_j = \lambda p_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$ oder äquivalent dazu $Ap = \lambda p$. □

Beweis von Satz 12.47. Wir benötigen zusätzlich zu Lemma 12.48 etwas mehr Lineare Algebra für den Beweis, den wir jetzt mit Induktion nach n durchführen werden. Für $n = 1$ gibt es nichts zu beweisen. Sei also $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Nach Lemma 12.48 existiert ein reeller Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ zu einem Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das orthogonale Komplement

$$W = v_1^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v_1 \rangle = 0\}$$

von v_1. Für $w \in W$ gilt auf Grund der Symmetrie von A

$$\langle Aw, v_1 \rangle = \langle w, Av_1 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle = 0$$

und es folgt, dass $A(W) \subset W$. Sei $w_1, \ldots, w_{n-1}$ eine Orthonormalbasis von W bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (welche wegen des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens existiert). Für $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt nun

$$\langle Aw_j, w_i \rangle = \langle w_j, Aw_i \rangle = \langle Aw_i, w_j \rangle .$$

In anderen Worten ist die Basisdarstellung B von $A|_W : W \to W$ bezüglich der Basis $w_1, \ldots, w_{n-1}$ wieder symmetrisch. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für B eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von B. Da aber B (gemeinsam mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^{n-1}$) genau $A|_W$ (gemeinsam mit der Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_{n-1}$) entspricht, existiert also auch für W eine Orthonormalbasis $v_2, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren von A.

Wir erhalten damit, dass $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bildet und aus Eigenvektoren von A besteht. □

Übung 12.49. — Der Vollständigkeit halber möchten wir hier ein elementares Argument zum Beweis von Lemma 12.48 unter Verwendung des Fundamentalsatzes angeben. Sei $n \geq 1$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

(i) Zeigen Sie, dass alle komplexen Eigenwerte von A reell sind.

(ii) Beweisen Sie Lemma 12.48, indem Sie zeigen, dass A genau dann einen komplexen Eigenvektor besitzt, wenn A einen reellen Eigenvektor besitzt.

Das in unserem Beweis gewonnene geometrische Verständnis der Eigenwerte von A kann aber auch anders genutzt werden. Als Beispiel davon kann man einen Spezialfall des Satzes von Courant-Fischer beweisen.

(iii) Zeigen Sie, dass die Werte

$$\min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} x^t A x, \quad \max_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} x^t A x$$

den kleinsten respektive den grössten Eigenwert von A darstellen.

Übung 12.50. — Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass zwei Punkte $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ genau dann maximalen Abstand haben, wenn $x = -y$ gilt. Betrachten Sie hierzu die Funktion $(x, y) \mapsto \|x - y\|^2$ auf $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.

Kapitel 13

Mehrdimensionale Integralrechnung

Wir werden in diesem Kapitel das Riemann-Integral über ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zu einem mehrdimensionalen Riemann-Integral über Jordan-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, insbesondere über Quader in $\mathbb{R}^n$, ausbauen. Es genügt hier wiederum, reellwertige Funktionen zu betrachten, da die Verallgemeinerung zu komplexwertigen oder vektorwertigen Funktionen komponentenweise erfolgt, wie in Abschnitt 6.5.3.

Wie wir sehen werden, sind die Definitionen und die anfängliche Theorie in Abschnitt 13.1 weitgehend analog zum eindimensionalen Fall in Kapitel 5. Bei der Berechnung der Integrale in Abschnitt 13.2.2 und der Substitutionsregel in Abschnitt 13.3 werden wir neue Phänomene antreffen, für die wir hier die formal korrekte mathematische Grundlage liefern.

13.1 Das Riemann-Integral für Quader

Wir fixieren für diesen Abschnitt eine ganze Zahl $n \geq 0$, und wollen Intervalle als Integrationsbereiche durch Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ ersetzen. Wir beginnen mit dem Fall eines Quaders.

13.1.1 Definition und erste Eigenschaften

13.1. — Unter einem **Quader** verstehen wir eine Teilmenge Q von $\mathbb{R}^n$ die ein Produkt von Intervallen ist, also

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n$$

für Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Falls die Längen der Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ alle übereinstimmen, so nennen wir Q auch einen **Würfel**. Für $n = 2$ sprechen wir auch von **Rechtecken**.

Definition 13.2. — Für beschränkte nichtleere Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ ist das **Volumen** des Quaders $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ in $\mathbb{R}^n$ durch

$$\mathrm{vol}(Q) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

definiert, mit $a_k = \inf I_k$ und $b_k = \sup I_k$.

13.3. — Sei $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ ein beschränkter, abgeschlossener Quader mit $I_k = [a_k, b_k]$. Unter einer **Zerlegung** von Q verstehen wir die Vorgabe einer Zerlegung für jedes Intervall I_k, im Sinn von Definition 5.1. Ist so eine Zerlegung gegeben, also

$$a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,l(k)} = b_k \tag{13.1}$$

für jedes k, dann nennen wir für ein $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $0 \leq \alpha_k \leq l(k)$ eine **Adresse** zu dieser Zerlegung. Für jede solche Adresse schreiben wir

$$Q_\alpha = \prod_{k=1}^{n} [x_{k,\alpha_k}, x_{k,\alpha_k+1}]$$

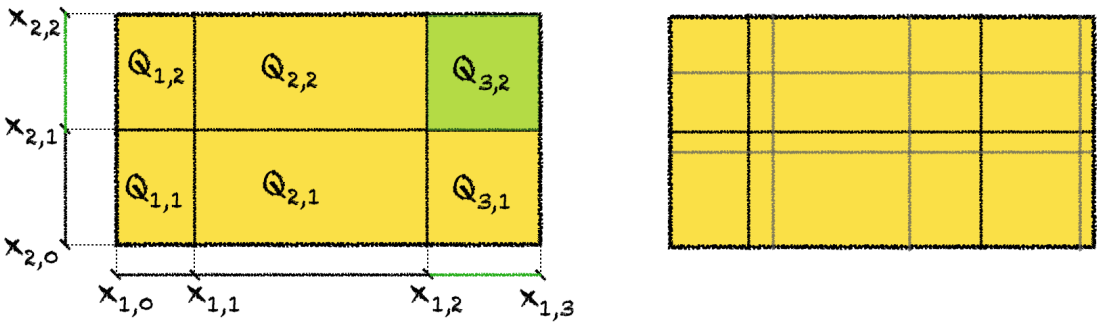
für den entsprechenden abgeschlossenen Teilquader von Q. Mit anderen Worten ist $Q_\alpha \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^n$ die Teilmenge all jener $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ für die $x_{k,\alpha_k} \leq t_k \leq x_{k,\alpha_k+1}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Mittels vollständiger Induktion zeigt man die **Additionsformel**

$$\mathrm{vol}(Q) = \sum_\alpha \mathrm{vol}(Q_\alpha) \tag{13.2}$$

wobei die Summe sich über alle Adressen zur gegebenen Zerlegung (13.1) erstreckt. Eine **Verfeinerung** der Zerlegung (13.1) ist eine Zerlegung

$$a_k = y_{k,0} \leq y_{k,1} \leq y_{k,2} \leq \cdots \leq y_{k,m(k)} = b_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

so dass für jedes fixe k die Zerlegung $a_k = y_{k,0} \leq \cdots \leq y_{k,m(k)} = b_k$ von I_k eine Verfeinerung von $a_k = x_{k,0} \leq \cdots \leq x_{k,l(k)} = b_k$ ist, so wie in 5.2 diskutiert. Zu zwei beliebigen Zerlegungen von Q existiert stets eine gemeinsame Verfeinerung.



Figur 13.1: Links eine Zerlegung eines Quaders $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Dabei wurde das horizontal dargestellte Intervall $[a_1, b_1]$ in drei Teile, und das vertikal dargestellte Intervall $[a_2, b_2]$ in zwei Teile zerlegt. Zur Adresse $\alpha = (3, 2)$ gehört der Teilquader $Q_\alpha = [x_{1,2}, x_{1,3}] \times [x_{2,1}, x_{2,2}]$. Rechts ist eine Verfeinerung dieser Zerlegung gezeigt.

13.4. — Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine **Treppenfunktion** auf Q ist eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ derart, dass eine Zerlegung von Q existiert, so, dass für jede Adresse α die Funktion f konstant auf dem offenen Teilquader Q_α° ist. Wir sagen in dem Fall auch, f sei eine Treppenfunktion bezüglich dieser Zerlegung von Q. Ist c_α der konstante Wert von f auf

dem offenen Teilquader Q_α°, so schreiben wir

$$\int_Q f(x)dx = \sum_\alpha c_\alpha \operatorname{vol}(Q_\alpha) \tag{13.3}$$

wobei die Summe sich über alle Adressen zur gegebenen Zerlegung erstreckt. Wir nennen diese Zahl das **Integral** von f über Q. Im Fall $n = 1$ erhalten wir damit die Definitionen 5.3 und 5.6 von Treppenfunktionen und deren Integral zurück.

Übung 13.5. — Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Zeigen Sie, dass die Menge aller Treppenfunktionen $\mathcal{TF}(Q)$ auf Q einen Vektorraum bezüglich der Punktweisen Addition und Multiplikation bildet. Zeigen Sie, dass (13.3) von der Auswahl der Zerlegung unabhängig ist, und dass dadurch eine monotone und lineare Abbildung

$$\textstyle\int_Q : \mathcal{TF}(Q) \to \mathbb{R}$$

definiert wird.

13.6. — Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $\mathcal{TF}$ bezeichne den Vektorraum der Treppenfunktionen auf Q, und $f : Q \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Dann definieren wir die Mengen der **Untersummen** $\mathcal{U}(f)$ und **Obersummen** $\mathcal{O}(f)$ von f durch

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_Q u dx \;\middle|\; u \in \mathcal{TF} \text{ und } u \leq f \right\} \qquad \mathcal{O}(f) = \left\{ \int_Q o dx \;\middle|\; o \in \mathcal{TF} \text{ und } f \leq o \right\}$$

Falls f beschränkt ist, so sind diese Mengen nicht leer. Aufgrund der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen gilt die Ungleichung

$$\sup \mathcal{U}(f) \leq \inf \mathcal{O}(f)$$

falls f beschränkt ist.

Definition 13.7. — Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Wir nennen $\sup \mathcal{U}(f)$ das **untere**, und $\inf \mathcal{O}(f)$ das **obere Integral** von f. Die Funktion f heisst **Riemann-integrierbar**, falls $\sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$ gilt. Der gemeinsame Wert wird in diesem Fall als das **Riemann-Integral** von f bezeichnet, und als

$$\int_Q f(x)dx = \sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$$

geschrieben.

13.8. — Treppenfunktionen sind Riemann integrierbar, und das Riemann-Integral einer Treppenfunktion ist gerade durch (13.3) gegeben. Die folgenden alternativen Schreibweisen

für das Riemann Integral sind gebräuchlich:

$$\int_Q f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad \int_Q f(x) d\mathrm{vol}$$

Die Notation linkerhand ist nützlich falls f als Funktion von Variablen $x, y, z, \ldots$ gegeben ist, deren Zusammenfassung keinen eigenen Namen hat. Die Notation rechterhand zeigt an, dass das Integral bezüglich dem Standardvolumen für Quader im $\mathbb{R}^n$ definiert ist - Alternativen dazu sind denkbar, und Gegenstand der sogenannten **Masstheorie** . Folgende Proposition ist eine Verallgemeinerung von Proposition 5.14.

Proposition 13.9. — *Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen u und o auf Q gibt, die*

$$u \leq f \leq o \qquad \text{und} \qquad \int_Q (o - u) dx < \varepsilon$$

erfüllen.

Beweis. Selber Beweis wie für Proposition 5.14. □

Proposition 13.10. — *Sei $Q \subseteq \mathbb{Q}^n$ ein Quader, und es bezeichne $\mathcal{R}(Q)$ die Menge aller Riemann-Integrierbaren Funktionen auf Q. Dann ist $\mathcal{R}(Q)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der Punktweisen Addition und Multiplikation, und Integration*

$$\textstyle\int_Q : \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R}$$

ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Die Integration ist ausserdem monoton und erfüllt die Dreiecksungleichung: Es gilt

$$f \leq g \implies \int_Q f(x) dx \leq \int_Q g(x) dx \qquad \text{und} \qquad \left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx$$

für alle $f, g \in \mathcal{R}(Q)$. Insbesondere ist $|f|$ Riemann-integrierbar.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen für das Riemann Integral auf einem Intervall, siehe Satz 5.21 für die Linearität, Proposition 5.24 für die Monotonie, und Satz 5.26 für die Dreiecksungleichung. □

Übung 13.11. — Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ der Quader $[-1, 1]^2$. Berechnen Sie das zwei-dimensionale Integral

$$\int_Q (2 - x^2 - y^2) dx dy$$

entsprechend den Definitionen dieses Abschnittes. Berechnen Sie anschliessend

$$F(y) = \int_{-1}^{1} f(x, y) dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^{1} F(y) dy$$

und vergleichen Sie die Resultate.

Übung 13.12. — Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es sei eine beliebige Zerlegung von Q gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann Riemann integrierbar ist, wenn für jeden Teilquader Q_α der gegebenen Zerlegung die eingeschränkte Funktion $f|_{Q_\alpha} : Q_\alpha \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\int_Q f dx = \sum_\alpha f|_{Q_\alpha} dx$$

gilt.

13.1.2 Nullmengen

Definition 13.13. — Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ wird eine **Lebesgue-Nullmenge** oder einfach **Nullmenge** genannt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie von offenen Quadern $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k, \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k) < \varepsilon \tag{13.4}$$

gilt.

13.14. — Wir interpretieren die Bedingung in der Definition von Nullmengen so, dass 0 der einzig vernünftige Wert für das Volumen einer Nullmenge N ist. In der Tat lässt sich (13.4) so lesen, dass N in einer Menge $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell$ enthalten ist, deren Volumen klein ist. Dabei wurde das Volumen der abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell$ nicht definiert, aber $\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_\ell)$ lässt sich als eine obere Schranke von diesem auffassen. Wir sagen, dass eine Aussage A über Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ für **fast alle** $x \in \mathbb{R}^n$ wahr ist, falls

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \neg A(x)\}$$

eine Nullmenge ist. Ist beispielsweise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sagen wir f sei „fast überall stetig“ falls die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$ an denen f unstetig ist eine Nullmenge ist.

Lemma 13.15. — *Eine Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge. Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.*

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus (13.4). Seien $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ und sei N ihre Vereinigung. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert per Definition von Nullmengen für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Familie offener Quader $(Q_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$N_j \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{jk} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_{jk}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Dies impliziert aber

$$N = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{jk} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_{jk}) < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon.$$

Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist und $\varepsilon > 0$ beliebig war zeigt dies, dass N eine Nullmenge ist. □

Beispiel 13.16. — Jede abzählbare Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge. Insbesondere ist zum Beispiel $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist. Jeder Quader mit leerem Inneren ist eine Nullmenge. Jeder lineare Unterraum $V \subsetneq \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge $\mathbb{R}^n$. In Proposition 13.18 werden wir zeigen, dass eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge ist, wenn und nur wenn U leer ist.

Übung 13.17. — Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, und $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\alpha(N)$ eine Nullmenge ist.

Proposition 13.18. — *Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren ist keine Nullmenge.*

Beweis. Ist das Innere von X nicht leer, so enthält X einen abgeschlossenen Quader mit nichtleerem Inneren. Sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ so ein Quader, $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$. Es genügt zu zeigen, dass Q nicht eine Nullmenge ist. Falls Q eine Nullmenge ist, dann existieren offene Quader $O_1, O_2, \ldots$ mit

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(O_k) < \frac{\operatorname{vol}(Q)}{2}.$$

Nach dem Satz von Heine Borel 10.57 ist Q kompakt, und nach Satz 10.47 existiert also ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^{m} O_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{m} \operatorname{vol}(O_k) < \frac{\operatorname{vol}(Q)}{2}. \tag{13.5}$$

Wir definieren die Quader $Q_k = \overline{O_k} \cap Q$ und schreiben $Q_k = [a_{k,1}, b_{k,1}] \times \ldots \times [a_{k,n}, b_{k,n}]$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Insbesondere gilt $Q = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$.

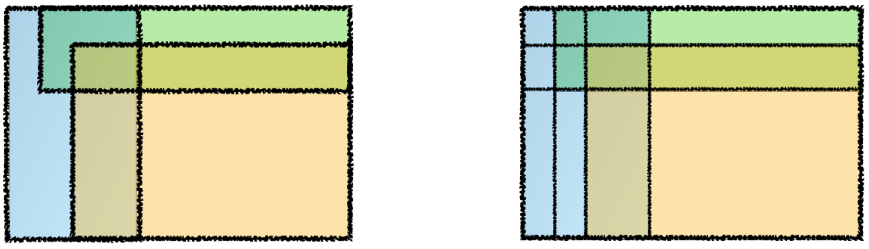
Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ lässt sich eine Zerlegung von $[a_j, b_j]$ durch Anordnen der Punkte $\{a_{1,j}, b_{1,j}, \ldots, a_{m,j}, b_{m,j}\}$ definieren. Damit erhalten wir eine Zerlegung von Q derart, dass jeder abgeschlossene Teilquader $Q_k \subseteq Q$ eine endliche Vereinigung von Quadern $\overline{Q}_\alpha$ ist, für Adressen α zu dieser Zerlegung von Q. Es gilt also

$$\operatorname{vol}(Q) = \sum_{\alpha} \operatorname{vol}(Q_\alpha) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{vol}(Q_k) = \sum_{\alpha | Q_\alpha \subseteq Q_k} \operatorname{vol}(Q_\alpha)$$

woraus sich nach Summieren über k die Ungleichung

$$\operatorname{vol}(Q) \leq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{vol}(Q_k)$$

ergibt, die (13.5) widerspricht. □



Figur 13.2: Nach Reduktion zu einer endlichen Überdeckung des Quaders Q ist es wesentlich einfacher, zu zeigen, dass das Gesamtvolumen der überdeckenden Quader mindestens so gross ist wie das Volumen von Q. In der Tat, für letzteres fabriziert man aus $Q_1, \ldots, Q_m$ eine Zerlegung wie illustriert, und wendet dann die Additionsformel (13.2) an.

Übung 13.19. — Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Familie $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *abgeschlossener* Quader gibt, mit

$$N \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell \qquad \text{und} \qquad \sum_{\ell=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_\ell) < \varepsilon.$$

Proposition 13.20. — *Sei $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^n$ von f eine Nullmenge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f Riemann-integrierbar ist, existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen u und o auf Q mit $u \leq f \leq o$ und $\int_Q (o-u)dx < \varepsilon$. Wir wählen eine Zerlegung von Q so, dass für jede Adresse α beide Funktionen u und o konstant auf Q_α° sind. Sei c_α der konstante Wert von u, und d_α der konstante Wert von o auf Q_α°. Zu jeder Adresse α definieren wir den Quader $P_\alpha = Q_\alpha \times [c_\alpha, d_\alpha]$ und erhalten

$$\operatorname{graph}(f) \subseteq \bigcup_\alpha P_\alpha \cup \bigcup_\alpha \big(\partial Q_\alpha \times \mathbb{R}\big)$$

wobei die zweite Vereinigung sozusagen dem Raster der Zerlegung von Q entspricht. Sie ist eine endliche Vereinigung von achsenparallelen Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$, die wir mit abzählbar vielen Quadern mit Volumen 0 abdecken können. Es gilt

$$\sum_\alpha \operatorname{vol}(P_\alpha) = \sum_\alpha (d_\alpha - c_\alpha) \operatorname{vol}(Q_\alpha) = \int_Q (o-u)dx < \varepsilon,$$

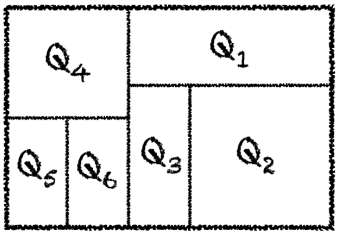
was zeigt, dass $\operatorname{graph}(f)$ von abzählbar vielen Quadern mit Summe der Volumina kleiner als ε überdeckt werden kann. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Proposition. □

Übung 13.21. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter Φ wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Übung 13.22. — Sei $n \geq 1$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ ein abgeschlossener Quader und f eine stetige Funktion auf Q mit Werten in $\mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Übung 13.23. — Verwenden Sie vorherige Übung, um zu zeigen, dass jede k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ für $k < n$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Übung 13.24. — Gegeben sei ein Rechteck $Q \subseteq \mathbb{R}^2$, das eine endliche Überdeckung mit Rechtecken $Q_1, \ldots, Q_n \subset Q$ besitzt, die sich jeweils höchstens an den Kanten schneiden.



Angenommen jedes der Rechtecke $Q_1, \ldots, Q_n$ hat mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge. Zeigen Sie, dass dann auch Q mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge hat.

13.1.3 Das Lebesgue Kriterium

Satz 13.25 (Lebesgue-Kriterium). — *Eine reellwertige, beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Quader Q ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist, das heisst, falls die Menge*

$$N = \{x \in Q \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

eine Nullmenge ist.

Korollar 13.26. — *Sei Q ein abgeschlossener Quader mit nicht-leerem Inneren. Dann ist jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. Das folgt direkt aus dem Lebesgue Kriterium. Da da Q kompakt ist, sind alle stetigen Funktionen auf Q beschränkt. □

13.27. — In Definition 10.52 wurde die Oszillation $\omega(f, x)$ von $f : Q \to \mathbb{R}$ eingeführt, welche die Schwankung von f um einen Punkt $x \in Q$ beschreibt. Wir definieren für $\delta > 0$

$$\omega(f, x, \delta) = \sup f(Q \cap B_\infty(x, \delta)) - \inf f(Q \cap B_\infty(x, \delta)).$$

wobei $B_\infty(x, \delta)$ für den Ball bezüglich der Supremumsnorm steht. So ein Ball ist ein offener, achsenparalleler Würfel mit Zentrum x und Kantenlänge 2δ. Die Oszillation $\omega(f, x)$ ist definiert als der von der Form der Bälle unabhängige Grenzwert von $\omega(f, x, \delta)$ für $\delta \to 0$.

Lemma 13.28. — *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem metrischen Raum X. Für jedes $\eta \geq 0$ ist die Teilmenge $N_\eta = \{x \in X \mid \omega(f,x) \geq \eta\} \subseteq X$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $\eta \geq 0$ und sei $(x_k)_{k=0}^\infty$ eine konvergente Folge in X mit $\omega(f,x_k) \geq \eta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und mit Grenzwert $x \in X$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert ein k mit $x_k \in B(x,\delta)$. Da $B(x,\delta)$ offen ist, gibt es ein $\delta_k > 0$ mit $B(x_k,\delta_k) \subseteq B(x,\delta)$. Aus

$$\sup f(B(x,\delta)) \geq \sup f(B(x_k,\delta_k)), \qquad \inf f(B(x,\delta)) \leq \inf f(B(x_k,\delta_k))$$

folgt $\omega(f,x,\delta) \geq \omega(f,x_k,\delta_k)$. Mit $\omega(f,x_k,\delta_k) \geq \omega(f,x_k) \geq \eta$ erhalten wir $\omega(f,x,\delta) \geq \eta$, und da $\delta > 0$ beliebig war, folgt das Lemma. □

Übung 13.29. — Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem metrischen Raum X. Ist die Menge $\{x \in X \mid f \text{ ist in } x \text{ unstetig}\}$ abgeschlossen?

Beweis von Satz 13.25. Wir nehmen zuerst an, dass die beschränkte reellwertige Funktion f auf Q Riemann-integrierbar ist. Seien $\eta > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren nach Proposition 13.9 Treppenfunktionen u und o auf Q mit $u \leq f \leq o$ und $\int_Q (o-u)dx < \varepsilon\eta$. Wir wählen eine Zerlegung von Q so, dass für jede Adresse α die Funktion u konstant auf Q_α° mit Wert c_α, und o konstant auf Q_α° mit Wert d_α ist. Es gilt also

$$\sum_\alpha (d_\alpha - c_\alpha)\operatorname{vol}(Q_\alpha) < \varepsilon\eta.$$

Wir definieren die Menge von Adressen $A(\eta) = \{\alpha \mid (d_\alpha - c_\alpha) \geq \eta\}$ und erhalten

$$\sum_{\alpha \in A(\eta)} \operatorname{vol}(Q_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in A(\eta)} \eta^{-1}(d_\alpha - c_\alpha)\operatorname{vol}(Q_\alpha) < \varepsilon.$$

Nun betrachten wir die abgeschlossene Menge $N_\eta = \{x \in Q \mid \omega(f,x) \geq \eta\}$ aus Lemma 13.28. Für jedes $\alpha \notin A(\eta)$ und $x \in Q_\alpha^\circ$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B(x,\delta)$ in Q_α° enthalten ist. Damit folgt

$$\omega(f,x) \leq \omega(f,x,\delta) \leq \sup f(Q_\alpha^\circ) - \inf f(Q_\alpha^\circ) \leq d_\alpha - c_\alpha < \eta$$

für alle $\alpha \notin A(\eta)$ und $x \in Q_\alpha^\circ$. Jedes Element $x \in N_\eta$ ist also ein Element von ∂Q_α für eine Adresse α, oder aber ein Element von Q_α° für eine Adresse $\alpha \in A(\eta)$. Aus

$$N_\eta \subset \bigcup_\alpha \partial Q_\alpha \ \cup \bigcup_{\alpha \in A(\eta)} Q_\alpha^\circ \qquad \text{und} \qquad \sum_{\alpha \in A(\eta)} \operatorname{vol}(Q_\alpha) < \varepsilon$$

folgt, dass N_η eine Nullmenge ist. Aus Lemma 13.15 folgt damit, dass

$$N = \{x \in Q \mid f \text{ unstetig bei } x\} = \{x \in Q \mid \omega(f,x) > 0\} = \bigcup_{k=0}^\infty N_{2^{-k}}$$

eine Nullmenge ist. Damit ist eine Richtung des Lebesgue Kriteriums gezeigt.

Um die umgekehrte Richtung zu beweisen nehmen wir an, dass $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $N = \{x \in Q \mid f \text{ ist bei } x \text{ unstetig}\}$ eine Nullmenge ist. Schreibe $M = \sup |f(Q)|$ und sei $\varepsilon > 0$. Die Menge $N_\varepsilon = \{x \in Q \mid \omega(f,x) \geq \varepsilon\} \subseteq N$ ist nach Lemma 13.15 eine Nullmenge, nach Lemma 13.28 abgeschlossen und nach dem Satz von Heine-Borel 10.57 kompakt. Es gibt deshalb endlich viele offene Quader $O_1, \ldots, O_m$, so dass

$$N_\varepsilon \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{m} O_\ell \qquad \text{und} \qquad \sum_{\ell=1}^{m} \operatorname{vol}(O_\ell) < \varepsilon \tag{13.6}$$

gilt. Die Teilmenge $K = Q \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} O_\ell$ ist nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Nach Konstruktion gilt $K \subseteq Q \setminus N_\varepsilon$ und damit $\omega(f,x) < \varepsilon$ für alle $x \in K$. Nach Proposition 10.54 gibt es also ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in K$ die Abschätzung

$$\omega\big(f|_K, x, \delta\big) < \varepsilon \tag{13.7}$$

gilt. Wir wählen nun eine Zerlegung von Q, so dass die Maschenweite kleiner als δ ist und so dass jeder der Quader $\overline{O_k} \cap Q$ eine Vereinigung von abgeschlossenen Quadern Q_α ist. Wir definieren Treppenfunktionen u und o mit $u \leq f \leq o$ durch

$$u(x) = \begin{cases} \inf f(Q_\alpha^\circ) & \text{falls } x \in Q_\alpha^\circ \\ f(x) & \text{falls } x \notin Q_\alpha^\circ \ \forall \alpha \end{cases} \qquad o(x) = \begin{cases} \sup f(Q_\alpha^\circ) & \text{falls } x \in Q_\alpha^\circ \\ f(x) & \text{falls } x \notin Q_\alpha^\circ \ \forall \alpha \end{cases}$$

und möchten zeigen, dass $\int_Q (o-u)dx$ klein ist. Dazu trennen wir die (13.3) entsprechende Summe in zwei Teile auf. Im ersten summieren wir über Adressen α so dass Q_α Teil eines Quaders $\overline{O_\ell}$ ist, und im zweiten Teil summieren wir über die restlichen Adressen α. Auf die erste Summe wenden wir dann (13.6) und auf die zweite (13.7) an. Dies ergibt

$$\int_Q (o-u)dx \leq \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\alpha | Q_\alpha \subseteq O_\ell} 2M \operatorname{vol}(Q_\alpha) + \sum_{\alpha | Q_\alpha \subseteq K} \varepsilon \operatorname{vol}(Q_\alpha) \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \operatorname{vol}(Q) = (2M + \operatorname{vol}(Q))\varepsilon,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Riemann-Integrierbarkeit von f. □

13.1.4 Riemann-Integrierbarkeit und Stetigkeit

Stetige Funktionen auf Quadern sind integrierbar nach Korollar 13.26, und in vielerlei Hinsicht einfacher zu verstehen als allgemeine Riemann-integrierbare Funktionen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sich Riemann-integrierbare Funktionen zwischen stetigen Funktionen „einklemmen“ lassen. Dies wird uns später erlauben, einige Aussagen über Riemann-integrierbare Funktionen auf stetige Funktionen zu reduzieren.

Proposition 13.30. — *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen*

$f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ gibt, die

$$f_- \leq f \leq f_+ \qquad \textit{und} \qquad \int_Q (f_+ - f_-)dx < \varepsilon \tag{13.8}$$

erfüllen.

Beweis. Angenommen es existieren zu $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen f_- und f_+ auf Q die (13.8) erfüllen. Da f_- und f_+ nach Korollar 13.26 Riemann-integrierbar sind, existieren Treppenfunktionen u und o mit $u \leq f_-$ und $\int_Q (f_- - u)dx < \varepsilon$, sowie $f_+ \leq o$ und $\int_Q (o - f_+)dx < \varepsilon$. Damit gilt auch $u \leq f \leq o$ und

$$\int_Q (o - u)dx \leq \int_Q (o - f_+ + f_- - u)dx \leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Riemann-Integrierbarkeit von f aus Proposition 13.9.

Für die Umkehrung gehen wir schrittweise vor, indem wir immer schwächere Annahmen an die Funktionen f treffen.

<u>Fall 1</u>: $f = \mathbb{1}_{Q'}$ für einen abgeschlossenen Quader $Q' \subseteq Q$. Für $\delta > 0$ betrachten wir die Funktionen f_+ und f_- auf Q, gegeben durch

$$\begin{aligned} f_+(x) &= 1 - \min\{1, \delta^{-1} \inf\{\|y - x\| \mid y \in Q'\}\} \\ f_-(x) &= \min\{1, \delta^{-1} \inf\{\|y - x\| \mid y \in Q \setminus Q'\}\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen f_+ und f_- sind beide stetig, und es gilt $f_- \leq \mathbb{1}_{Q'} \leq f_+$. Tatsächlich ist die Funktion f_+ konstant mit Wert 1 auf Q', und konstant mit Wert 0 ausserhalb einer δ-Umgebung von Q'. Die Funktion f_- ist konstant mit Wert 0 auf dem Komplement von Q', und konstant mit Wert 0 ausserhalb einer δ-Umgebung von $Q \setminus Q'$. Insbesondere gilt $f_-(x) = \mathbb{1}_{Q'}(x) = f_+(x)$ für alle x ausserhalb einer δ-Umgebung von $\partial Q'$, woraus die Abschätzung für das Integral in (13.8) folgt solange δ klein genug gewählt ist.

<u>Fall 2</u>: f ist eine Treppenfunktion. Wir wählen eine zu f passende Zerlegung von Q. In dem wir jeden Zerteilungspunkt doppelt schreiben, können wir die Zerlegung so verfeinern, dass für jeden Teilquader Q_α jede Seitenfläche wiederum ein Teilquader in der Zerlegung ist. Sei N die Anzahl Quader in dieser Zerlegung, und sei $M \geq 0$ mit $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in Q$. Nach dem vorherigen Fall existieren für jedes α eine stetige Funktion $f_{\alpha,-} \leq \mathbb{1}_{Q_\alpha} \leq f_{\alpha,+}$ mit

$$\int_Q (f_{\alpha,+} - f_{\alpha,-})dx \leq \frac{\varepsilon}{2MN}$$

Falls das Innere von Q_α leer ist, so gilt $\int_Q \mathbb{1}_{Q_\alpha} dx = 0$, und also

$$-\frac{\varepsilon}{2MN} < \int_Q f_{\alpha,-} dx \qquad \text{und} \qquad \int_Q f_{\alpha,+} dx < \frac{\varepsilon}{2MN}$$

nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Wir betrachten die stetigen Funktionen

$$f_- = \sum_{\alpha|c_\alpha \geq 0} c_\alpha f_{\alpha,-} + \sum_{\alpha|c_\alpha < 0} c_\alpha f_{\alpha,+} - \sum_\beta M f_{\beta,-}, \qquad f_+ = \sum_{\alpha|c_\alpha \geq 0} c_\alpha f_{\alpha,+} + \sum_{\alpha|c_\alpha < 0} c_\alpha f_{\alpha,-} + \sum_\beta M f_{\beta,-}$$

wobei jeweils die ersten beiden Summen über alle Adressen α mit $Q_\alpha^\circ \neq \varnothing$ laufen und c_α für den konstanten Wert von f auf Q_α° steht, und die zweite summe über alle Adressen β mit $Q_\beta^\circ = \varnothing$. Es gilt $f_- \leq f \leq f_+$ nach Konstruktion, und

$$\int_Q (f_+ - f_-)dx = \sum_\alpha |c_\alpha| \int_Q (f_{\alpha,+} - f_{\alpha,-})dx + 2M \sum_\beta \int_Q (f_{\beta,+} + f_{\beta,-})dx < \sum_\alpha \frac{|c_\alpha|\varepsilon}{2MN} + 2M \sum_\beta \frac{\varepsilon}{2MN} \leq \varepsilon$$

was zu zeigen war.

<u>Fall 3</u>: f ist Riemann-integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$ und seien $u \leq f \leq o$ Treppenfunktionen mit $\int_Q (o-u)dx < \varepsilon$. Wir haben bereits gezeigt, dass es stetige Funktionen $u_- \leq u \leq u_+$ und $o_- \leq o \leq o_+$ mit $\int_Q (u_+ - u_-)dx \leq \varepsilon$ und $\int_Q (o_+ - o_-)dx \leq \varepsilon$. Es folgt $u_- \leq f \leq o_+$ und

$$\int_Q (o_+ - u_-)dx \leq \varepsilon + \int_Q (o_+ - o + u - u_-)dx \leq \varepsilon + \int_Q (o_+ - o_-)dx + \int_Q u_+ - u_-)dx \leq 3\varepsilon$$

was die Aussage beweist, da $\varepsilon > 0$ beliebig war. □

13.2 Das Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen

Wir wenden uns nun von der Integration über achsenparallele Quader ab und möchten allgemeinere Mengen wie zum Beispiel die Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ betrachten können.

13.2.1 Jordan Messbarkeit

Definition 13.31. — Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heisst **Jordan-messbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader Q in $\mathbb{R}^n$ mit $Q \supseteq B$ gibt, so dass die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Das **Volumen** oder **Jordan-Mass** von B ist in diesem Fall durch

$$\mathrm{vol}(B) = \int_Q \mathbb{1}_B dx$$

definiert.

Korollar 13.32 (zum Lebesgue-Kriterium). — *Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn B beschränkt ist und der Rand ∂B eine Nullmenge ist. Sind $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ und $B_1 \setminus B_2$ Jordan-messbar.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Lebesgue-Kriterium und der Gleichheit

$$\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{1}_B \text{ nicht stetig bei } x\} \tag{13.9}$$

die man direkt nachprüft. Seien nun $B_1, B_2 \subset Q$ Jordan-messbar. Es gilt

$$\mathbb{1}_{B_1 \cap B_2} = \mathbb{1}_{B_1} \cdot \mathbb{1}_{B_2}, \qquad \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2} = \mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} - \mathbb{1}_{B_1 \cap B_2}, \qquad \mathbb{1}_{B_1 \setminus B_2} = \mathbb{1}_{B_1} - \mathbb{1}_{B_1} \cdot \mathbb{1}_{B_2}$$

und nach Gleichung (13.9) sind die Ränder $\partial(B_1 \cup B_2)$, $\partial(B_1 \cap B_2)$ und $\partial(B_1 \setminus B_2)$ in der Vereinigung $\partial B_1 \cup \partial B_2$ enthalten und damit Nullmengen. Wiederum nach dem Lebesgue-Kriterium sind also $B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ und $B_1 \setminus B_2$ Jordan-messbar. □

Proposition 13.33. — *Sei $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein abgeschlossener Quader und seien $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, und sei $D \subseteq Q$ Jordan-messbar. Dann ist die Menge*

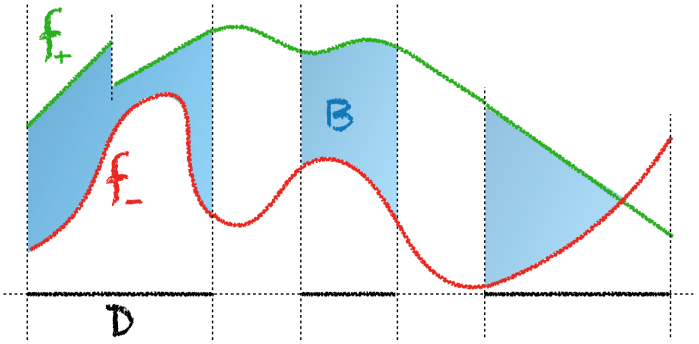
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in D,\ f_-(x) \leq y \leq f_+(x)\}$$

Jordan-messbar.

Beweis. Die Funktionen f_- und f_+ sind beschränkt, es existiert also $M \geq 0$ so dass $-M < f_-(x) \leq f_+(x) < M$ für alle $x \in Q$ gilt. Seien $N_- \subseteq D$ und $N_+ \subseteq D$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_-, respektive f_+, und schreibe $N = \partial D \cup N_- \cup N_+$. Die Menge ist B beschränkt, da sie in $Q \times [-M, M]$ enthalten ist. Der Rand von B ist in der Vereinigung

$$N \times [-M, M] \cup \mathrm{graph}(f_-) \cup \mathrm{graph}(f_+)$$

enthalten.



Nach Proposition 13.20 sind $\mathrm{graph}(f_-)$ und $\mathrm{graph}(f_+)$ Nullmengen. Nach dem Lebesgue Kriterium ist N als Vereinigung von drei Nullmengen eine eine Nullmenge, also ist auch $N \times [-M, M]$ eine Nullmenge. Tatsächlich ist für eine abzählbare Überdeckung durch offene Quader $\{Q_k | k \in \mathbb{N}\}$ von A die Familie $\{Q_k \times [-M, M] | k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Überdeckung durch offene Quader von $N \times [-M, M]$ und aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k) < \frac{\varepsilon}{2M} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k \times [-M, M]) < \varepsilon$$

folgt die Behauptung. Es folgt dass ∂B eine Nullmenge ist, also ist B Jordan-messbar. □

Übung 13.34. — Zeigen Sie, dass für eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ auch $N \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie, dass für eine Jordan messbare Menge $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und beliebige $a < b$ auch $D \times [a, b]$ eine Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition 13.35. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge und sei f eine reellwertige Funktion auf B. Dann heisst f **Riemann-integrierbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die durch

$$f_!(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus B \end{cases}$$

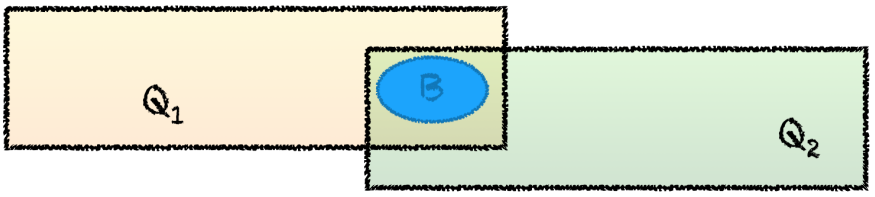
gegebene Funktion $f_! : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Wir schreiben in diesem Fall

$$\int_B f dx = \int_Q f_! dx$$

und nennen diese Zahl das **Riemann-Integral** von f über B.

13.36. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Das in 13.35 definierte Integral von f über B hängt a priori von der Wahl eines die Menge B enthaltenden Quaders Q ab. Das sieht man wie folgt: Angenommen

$Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ sind zwei abgeschlossene Quader mit $B \subset Q_1$ und $B \subset Q_2$. Dann ist auch $Q = Q_1 \cap Q_2$ ein Quader mit ebenso $B \subseteq Q$.



Das Integral der durch den konstanten Wert 0 fortgesetzten Funktion $f_!$ auf Q_1 ist gleich dem entsprechenden Integral über Q, was mit Übung 13.12 offensichtlich wird wenn man eine Zerlegung von Q_1 betrachtet, für die $Q \subseteq Q_1$ eine Teilquader ist.

Übung 13.37. — Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die Teilmenge $a + \lambda B = \{a + \lambda b \mid b \in B\}$ Jordan-messbar ist mit Volumen

$$\operatorname{vol}(a + \lambda B) = |\lambda^n| \operatorname{vol}(B).$$

Korollar 13.38 (Lebesgue-Kriterium). — *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und sei $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f auf B fast überall stetig ist, das heisst, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Insbesondere ist jede beschränkte stetige Funktion auf einer Jordan-messbaren Menge Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei Q ein abgeschlossener Quader mit $B \subseteq Q$. Da nach Annahme B Jordan-messbar ist, ist $\mathbb{1}_B$ auf Q Riemann-integrierbar, und die Menge ∂B der Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_B$ ist eine Nullmenge nach dem Lebesgue-Kriterium 13.25. Definieren wir $f_! : Q \to \mathbb{R}$ durch

$$f_!(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus B \end{cases}$$

so gilt

$$\{x \in Q \mid f_! \text{ ist unstetig in } x\} \subseteq \partial B \cup \{x \in B \mid f \text{ ist unstetig in } x\}.$$

Das Korollar folgt somit aus dem Lebesgue-Kriterium in Satz 13.25. □

Korollar 13.39. — *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge. Die Linearität des Riemann-Integrals, die Monotonie und die Dreiecksungleichung wie in Proposition 13.10 gelten analog für das Riemann-Integral von Riemann-integrierbaren Funktionen auf B.*

Beweis. Alle Aussagen folgen direkt durch Anwendung der Propositionen in Abschnitt 13.1.1 auf $\mathbb{1}_B f$ wie in Definition 13.35. □

Proposition 13.40. — *Seien $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $f|_{B_1}$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dx = \int_{B_1} f x d + \int_{B_2} f dx - \int_{B_1 \cap B_2} f dx.$$

Beweis. Integrierbarkeit der Einschränkung von f auf B_1, oder auf B_2 oder $B_1 \cap B_2$ folgt aus dem Lebesgue Kriterium. Es gilt $\mathbb{1}_{B_1 \cup B_2} = \mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} - \mathbb{1}_{B_1 \cap B_2}$. Die Proposition folgt damit nach Multiplikation mit f aus der Linearität des Riemann-Integrals in Proposition 13.10. □

Übung 13.41. — Eine Teilmenge $J \subset \mathbb{R}^n$ heisst eine **Jordan-Nullmenge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Familie $Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, so dass

$$J \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} Q_k, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_k) < \varepsilon$$

gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. J ist eine Jordan-Nullmenge.
2. J ist Jordan-messbar und $\mathrm{vol}(J) = 0$.
3. $\overline{J}$ ist eine beschränkte Lebesgue-Nullmenge.

Übung 13.42. — Sei J eine Jordan-Nullmenge und $f : J \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und $\int_J f dx = 0$ erfüllt.

Übung 13.43. — Sei Q ein abgeschlossener Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geq 0$ und $\int_Q f dx = 0$. Zeigen Sie in Analogie zu Übung 10.69, dass dann $f = 0$ fast überall gilt. Formulieren und beweisen Sie die analoge Aussage für Funktionen auf Jordan-messbaren Teilmengen.

13.44. — Sei Q ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren, und $\mathcal{R}(Q)$ der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf Q. Dann definiert

$$\| \cdot \|_1 : \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R} \qquad \|f\|_1 = \int_Q |f| dx$$

eine sogenannte **Seminorm** auf $\mathcal{R}(Q)$. In der Tat erfüllt $\| \cdot \|_1$ alle Eigenschaften einer Norm aus Definition 6.125, ausser Definitheit. Stattdessen gilt für $f \in \mathcal{R}(Q)$ mit $\|f\|_1 = 0$ nach Übung 13.43, dass f fast überall gleich Null ist. Die Menge

$$\mathcal{N}(Q) = \{f \in \mathcal{R}(Q) \mid \|f\|_1 = 0\}$$

ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{R}(Q)$, und die Seminorm $\| \cdot \|_1$ kann als eine Norm auf dem Quotientenraum $\mathcal{R}(Q)/\mathcal{N}(Q)$ interpretiert werden. Der so erhaltene normierte Vektorraum ist

nicht vollständig und damit für die weiterführende Analysis nicht so nützlich. Eine wichtige Rolle spielt jedoch die Vervollständigung dieses oder ähnlich konstruierter Räume, die in der **Masstheorie** ausführlich studiert werden.

13.2.2 Der Satz von Fubini

Wir haben bisher noch keine allgemeine Methode zur expliziten Berechnung von mehrdimensionalen Integralen gesehen. Wir holen dies in diesem Abschnitt mit der Diskussion des Satzes von Guido Fubini (1879-1943) nach. Dieser Satz besagt, dass ein Integral $\int_Q f dx$ über ein Quader als iteriertes Parameterintegral berechnet werden kann, wie bereits in Übung 13.11 angedeutet. Wir benutzen die in 13.6 eingeführte Notation für Unter- und Obersummen $\mathcal{U}(f)$, $\mathcal{O}(f)$ für beschränkte Funktionen f auf einem Quader Q.

Satz 13.45 (Fubini). — *Seien $P \subset \mathbb{R}^n$ und $Q \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Quader, und $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Für $x \in P$, schreibe $f_x : Q \to \mathbb{R}$ für die Funktion $f_x(y) = f(x, y)$, und definiere*

$$F_-(x) = \sup \mathcal{U}(f_x) \qquad \textit{und} \qquad F_+(x) = \inf \mathcal{O}(f_x)$$

Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq P$ so dass für alle $x \notin N$ die Funktion f_x Riemann integrierbar ist, und also

$$F_-(x) = F_+(x) = \int_Q f_x(y)dy = \int_Q f(x, y)dy$$

gilt. Die Funktionen F_- und F_+ auf P sind beide Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{P\times Q} f(x, y)d(x, y) = \int_P F_-(x)dx = \int_P F_+(x)dx.$$

Beweis. Eine Zerlegung des Quaders $P \times Q$ ist durch eine Zerlegung von P und eine Zerlegung von Q gegeben. Sind $P_\alpha \subseteq P$ und $Q_\beta \subseteq Q$ Teilquader bezüglich von Zerlegungen von P und Q, so ist $P_\alpha \times Q_\beta$ ein Teilquader bezüglich der entsprechenden Zerlegung von $P \times Q$, formell mit Adresse (α, β). Wir werden diese Korrespondenz im Beweis mehrmals implizit verwenden. Nach Definition des Volumens von Quadern gilt des Weiteren

$$\mathrm{vol}(P_\alpha \times Q_\beta) = \mathrm{vol}(P_\alpha) \cdot \mathrm{vol}(Q_\beta) \tag{13.10}$$

wobei wir in der Notation keinen Unterschied für Volumen von Quader in $\mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^m$ machen.

Sei $h : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit konstantem Wert $c_{\alpha,\beta}$ auf $P_\alpha^\circ \times Q_\beta^\circ$ für eine entsprechende Zerlegung. Für jede Adresse α und jedes fixe $x \in P_\alpha^\circ$ ist dann $h_x : y \mapsto h(x, y)$ eine Treppenfunktion auf Q bezüglich der gegebenen Zerlegung von Q und

$$\int_Q h_x(y)dy = \sum_\beta c_{\alpha,\beta}\, \mathrm{vol}(Q_\beta)$$

ist unabhängig von $x \in P_\alpha^\circ$. Daraus folgt, dass die durch

$$H_-(x) = \sup \mathcal{U}(h_x) \qquad \text{und} \qquad H_+(x) = \inf \mathcal{O}(h_x) \tag{13.11}$$

definierten Funktionen beides Treppenfunktionen auf P sind, bezüglich der bereits gegebenen Zerlegung von P. Es gilt

$$\int_{P\times Q} h(x,y)d(x,y) = \int_P H_-(x)dx = \int_P H_-(x)dx \tag{13.12}$$

aufgrund von (13.10).

Mit diesen Vorbereitungen betrachten wir nun eine Funktion $F : P \to \mathbb{R}$ mit $F_- \leq F \leq F_+$, wählen $\varepsilon > 0$ sowie Treppenfunktionen u und o auf $P \times Q$ mit $u \leq f \leq o$ und $\int_{P\times Q}(o - u)d(x,y) < \varepsilon$. Definieren wir Treppenfunktionen U_- und O_+ entsprechend (13.11), so folgt

$$U_- \leq F \leq O_+ \qquad \text{und} \qquad \int_P (O_+ - U_-)dx = \int_{P\times Q}(o-u)d(x,y) < \varepsilon$$

aus elementaren Eigenschaften von Supremum und Infimum sowie (13.12). Das zeigt, dass F Riemann-Integrierbar ist, und auch dass

$$\int_P F(x)dx = \int_{P\times Q} f(x,y)d(x,y)$$

gilt. Für die Wahl $F = F_-$ oder $F = F_+$ folgt damit die zweite Aussage im Satz von Fubini.

Es bleibt zu zeigen, dass die Funktion $f_x : Q \to \mathbb{R}$ für fast alle $x \in X$ Riemann-integrierbar ist, das heisst, dass $F_+(x) = F_-(x)$ für fast alle $x \in P$ gilt. Wir wissen, dass $g = F_+ - F_-$ eine nichtnegative, Riemann-integrierbare Funktion auf P mit Integral $\int_P g dx = 0$ ist. Nach dem Lebesgue Kriterium ist die Menge der Unstetigkeitsstellen $N \subseteq P$ von g eine Nullmenge. Falls g bei $x_0 \in P$ stetig ist, muss aber $g(x_0) = 0$ gelten, denn andernfalls gäbe es ein $\delta > 0$ so dass $g(x) \geq \frac{1}{2}g(x_0)$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$ gilt, was auf den Widerspruch

$$0 = \int_P g dx \geq \tfrac{1}{2}g(x_0)\,\mathrm{vol}(B(x_0,\delta) > 0$$

führt. Es folgt $g(x) > 0 \implies x \in N$, und damit

$$f_x \text{ nicht integrierbar} \iff g(x) > 0 \implies x \in N$$

was den Beweis des Satzes abschliesst. □

Korollar 13.46. — *Sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_Q f dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \ldots dx_1$$

falls alle Parameterintegrale existieren. Andernfalls können die Parameterintegrale durch Suprema von Untersummen oder auch durch Infima von Obersummen ersetzt werden.

Beweis. Dies folgt durch mehrmaliges Anwenden des Satzes von Fubini. □

Korollar 13.47. — *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine Jordan-messbare Menge, seien $\varphi_-, \varphi_+ : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Jordan-messbare Teilmenge*

$$B = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\}.$$

Für jede Riemann-integrierbare Funktion f auf B gilt

$$\int_B f(x, y)d(x, y) = \int_D \left(\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} f(x, y)dy \right) dx,$$

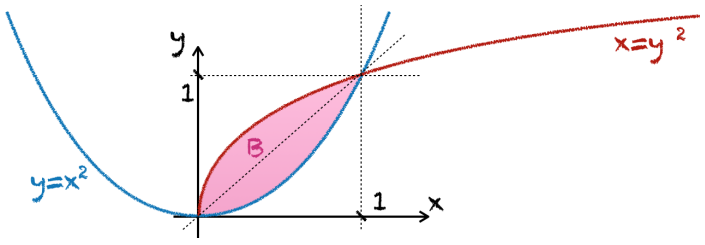
wobei wieder die selben Komplikationen wie in Satz 13.45 auftreten können.

Beweis. Nach Proposition 13.33 ist B tatsächlich Jordan-messbar. Wenden wir den Satz von Fubini für einen Quader $P \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit $D \subseteq Q$ und das Intervall $Q = [\inf \varphi_-(D), \sup \varphi_+(D)]$ an und schreiben $f_! : P \times Q \to \mathbb{R}$ für die Fortsetzung durch Null von f, so ergibt sich

$$\int_B f(x, y)d(x, y) = \int_{P \times Q} f_! d(x, y) = \int_P \int_Q f_! dydx = \int_D \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi^+(x)} f(x, y)dydx$$

wie behauptet. □

Beispiel 13.48. — Wir betrachten die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die zwischen den Parabeln mit Gleichungen $y = x^2$ und $x = y^2$ eingeschlossen ist. Wir fassen diese Menge als gleichmässig dicke, homogene Platte und möchten den Schwerpunkt berechnen.



Aus Abschnitt 1.1 wissen wir bereits, dass der Bereich definiert durch $0 \leq y \leq x^2$ und $0 \leq x \leq 1$ Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ hat. Aus Symmetriegründen folgt daraus, dass der Flächeninhalt von B ebenfalls $\frac{1}{3}$ ist. Ebenfalls aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt von B auf der Geraden mit gleichung $x = y$. Die x-Koordinate x_S, und also auch die y des Schwerpunkts S, ist per Definition durch $x_S = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B xdydx$ gegeben und berechnet sich mit Korollar 13.47 also zu

$$x_S = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B xdydx = 3 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xdydx = 3 \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{9}{20}.$$

Übung 13.49. — Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ über die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ für

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\} \qquad \text{und} \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

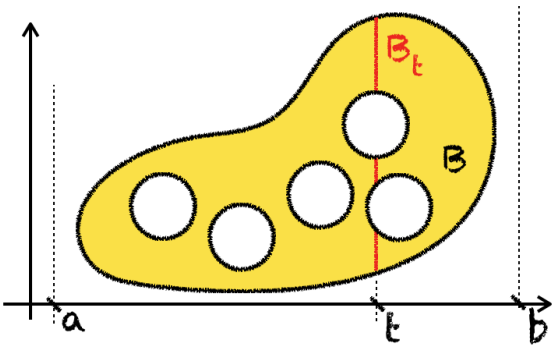
Berechnen Sie das Volumen der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die zwischen den Kurven $x^2 + y^2 = 8$ und $4y = x^2 + 4$ eingeschlossen wird.

Korollar 13.50 (Prinzip von Cavalieri). — *Sei $B \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}(B) = \int_a^b \mathrm{vol}(B_t)dt$$

wobei für $t \in [a,b]$ die Teilmenge $B_t \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch $B_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (t,y) \in B\}$ gegeben ist, und für fast alle $t \in [a,b]$ Jordan-messbar ist.

Beweis. Folgt direkt aus Satz 13.45 mit $f = \mathbb{1}_B$. □



Übung 13.51. — In Abschnitt 9.4.4 wurde das Volumen von Rotationskörpern definiert. Wir überprüfen hier, dass das im letzten Abschnitt eingeführte Volumen Jordan-messbarer Teilmengen damit kompatibel ist. Sei also $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und sei

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

der durch f gegebene Rotationskörper. Zeigen Sie, dass K Jordan-messbar ist und dass das das Volumen von K_f im Sinne von Definition 13.31 durch $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$ gegeben ist.

Übung 13.52. — Berechnen Sie $\int_0^1 \int_x^1 \exp(y^2) dy dx$.

13.53. — Satz 13.45 und Korollar 13.50 sind unter anderem, wie vielleicht nicht auf Anhieb klar ist, sogar für sehr elementare Volumenberechnungen nötig. Beispielsweise kann man sich fragen, ob sich das Volumen einer Pyramide im $\mathbb{R}^3$ elementar geometrisch berechnen lässt, in dem man die Pyramide durch endlich viele Operationen von Schneiden und Kleben zu Quadern zerlegt. In $\mathbb{R}^2$ funktioniert diese Methode ausgezeichnet für Polygone. Bereits für Pyramiden

im $\mathbb{R}^3$ kann man jedoch beweisen, mit Hilfe der sogenannten **Dehn-Invariante**, dass diese Methode im Allgemeinen nicht funktioniert - man muss also bereits für die Volumenberechnung von Polyedern in $\mathbb{R}^3$ auf Integrationsmethoden der Analysis zurückgreifen.

13.3 Mehrdimensionale Substitutionsregel

13.3.1 Die Substitutionsregel und erstste Beispiele

Wir stellen in diesem Abschnitt die mehrdimensionale Substitutionsregel für integrierbare Funktionen mit kompaktem Träger auf, und illustrieren sie anhand einiger Beispiele. Dazu verwenden wir den Begriff des Diffeomorphismus aus Definition 12.9. Diffeomorphismen kann man sich in diesem Zusammenhang als glatte Koordinatenwechsel vorstellen. Den Beweis behandeln wir in den nachfolgenden beiden Abschnitten 13.3.2 und 13.3.3.

13.54. — Sei $n \geq 1$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **Träger** oder **Support** einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Wir sagen, dass f **kompakten Träger** hat, falls $\operatorname{supp}(f)$ eine kompakte Teilmenge von U ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und Jordan-messbar und $f : U \to \mathbb{R}$ integrierbar, so hat die Fortsetzung durch Null von f auf $\mathbb{R}^n$, die wir üblicherweise als $f_! : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben, kompakten Träger in $\mathbb{R}^n$. Da nämlich U beschränkt ist, ist auch $\overline{U}$ und also auch $\operatorname{supp}(f_!)$ beschränkt, und da $\operatorname{supp}(f_!)$ nach Definition auch abgeschlossen ist, folgt die Behauptung aus dem Satz von Heine-Borel. Das bedeutet aber nicht, dass $f : U \to \mathbb{R}$ kompakten Träger hat. Ist umgekehrt $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so definieren wir das Integral

$$\int_U f dx$$

als das Integral von f über einen Quader, der $\operatorname{supp}(f)$ enthält, falls es existiert, und nennen in dem Fall f Riemann-integrierbar. Dabei braucht U nicht unbedingt beschränkt oder Jordan-messbar zu sein.

Satz 13.55. — *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus und sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist die Funktion $\Phi^* f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(\Phi^* f)(x) = (f \circ \Phi(x))|\det(D\Phi(x))|$ Riemann-integrierbar, hat kompakten Träger, und es gilt*

$$\int_Y f(y)dy = \int_X (f \circ \Phi(x))|\det(D\Phi(x))|dx.$$

13.56. — Der Grund warum die Hypothese über den Träger von f notwendig ist, ist folgender: Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist ein Diffeomorphismus. Nach der Substitutionsregel, hier in Dimension 1, müsste demnach für die konstante Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit Wert 1

$$\pi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dy = \int_{\mathbb{R}} \left|\arctan'(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

gelten. Das ist nicht gänzlich falsch, jedoch muss man dabei das Integral rechterhand als

uneigentliched Riemann-Integral auffassen, was wir im mehrdimensionalen Fall noch nicht eingeführt haben. Nach Definition 5.12 ist die Funktion $x \mapsto (x^2+1)^{-1}$ auf $\mathbb{R}$ nicht Riemann-integrierbar, da $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht Jordan-messbar ist.

Proposition 13.57. — *Seien X und Y offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und sei $\Phi : X \to Y$ ein Homeomorphismus. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion und schreibe $g = f \circ \Phi$.*

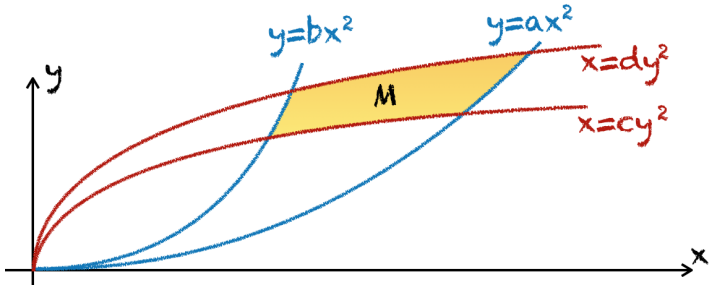
1. *Ist f Riemann-integrierbar, so ist auch g Riemann-integrierbar.*
2. *Es gilt* $\operatorname{supp}(g) = \Phi^{-1}(\operatorname{supp}(f))$.

Beweis. □

Beispiel 13.58. — Seien $0 < a < b$ und $0 < c < d$ feste Parameter, die wir verwenden, um das krummlinig begrenzte Viereck $M \subseteq X = \mathbb{R}^2_{>0}$ zu definieren, welches durch die vier Kurven

$$y = ax^2, \qquad y = bx^2, \qquad x = cy^2, \qquad x = dy^2$$

begrenzt wird. Dieses ist durch $M = \left\{(x,y) \in X \;\middle|\; \frac{1}{b} \leq x^2y^{-1} \leq \frac{1}{a},\ \frac{1}{d} \leq x^{-1}y^2 \leq \frac{1}{c}\right\}$ gegeben.



Wir wollen die Substitutionsregel verwenden, um den Flächeninhalt $\operatorname{vol}(M)$ von M zu berechnen. Wir führen dazu die Variablen $u = x^2y^{-1}$ und $v = x^{-1}y^2$ ein. Durch

$$\Psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^{-1} \\ x^{-1}y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Phi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} \\ u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

sind zueinander inverse Diffeomorphismen $\Psi : X \to X$ und $\Phi : X \to X$ gegeben, und es gilt $\mathbb{1}_M \circ \Phi = \mathbb{1}_Q$ für das Rechteck $Q = [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}] \times [\frac{1}{d}, \frac{1}{c}]$. Die Jacobi-Determinante von Φ ist

$$\det(D\Phi(u,v)) = \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

für alle $(u,v) \in X$. Dadurch erhalten wir

$$\operatorname{vol}(M) = \int_X \mathbb{1}_M(x,y)dxdy = \int_X \mathbb{1}_Q(u,v) \cdot \tfrac{1}{3}dudv = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{b}\right)\left(\tfrac{1}{c} - \tfrac{1}{d}\right).$$

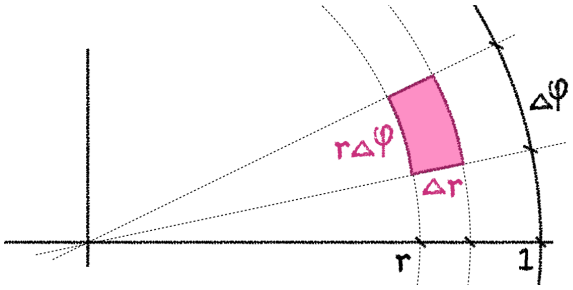
Beispiel 13.59. — Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Wir können Satz 13.55 wie folgt anwenden:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_U f(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr.$$

mit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ oder } x < 0\}$. Dabei haben wir in der ersten Gleichung nter Verwendung von Proposition 13.40 auf die Integration über die Jordan-Nullmenge $\{(x,y) \,|\, y = 0,\ x \geq 0\}$ verzichtet, und in der zweiten Gleichung Satz 13.55 auf die da die in Abschnitt 12.1.3 diskutierte Polarkoordinatenabbildung

$$\Phi : (0,R) \times (0,2\pi) \to U \qquad \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

angewandt. Der Faktor r im Integral rechts ist die Jacobi-Determinante der Polarkoordinaten-Abbildung Φ.



Figur 13.3: Der Faktor r als Jacobi-Determinante hat eine geometrische Bedeutung. Ein Quader mit Seitenlängen $\triangle r$ und $\triangle\varphi$ entspricht einem fast rechteckigen Ausschnitts eines Kreisrings mit „Seitenlängen“ $\triangle r$ und etwa $r\triangle\varphi$, welche man oft auf Grund der erwünschten Grösse dieser Differenzen auch informell mit dr und $rd\varphi$ bezeichnet.

Beispiel 13.60. — Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt mit ähnlichen Argumenten wie in Beispiel 13.59

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr,$$

wobei die Jacobi-Determinante $r^2 \sin\theta$ wiederum die geometrisch interpretiert werden kann.

Übung 13.61. — Berechnen Sie für vorgegebene Konstanten $0 < a < b$ und $0 < c < d$ den Flächeninhalt der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y\exp(-x) \leq b,\ c \leq y\exp(x) \leq d\}$.

Übung 13.62. — Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int_V x^2yzdxdydz \qquad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_{>0} \mid x^2+y^2 \leq 1,\ \tfrac{1}{\sqrt{3}} \leq \tfrac{y}{x} \leq \sqrt{3},\ z \leq 1\}$$

13.3.2 Lineare Substitution

Wir betrachten zuerst den wichtigen Spezialfall eines linearen Koordinatenwechsels, der im Beweis des allgemeinen Falles von Bedeutung sein wird.

Lemma 13.63. — *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung, die durch eine obere Dreiecksmatrix gegeben ist, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))dx$$

Beweis. Da T invertierbar ist, hat die Funktion $f \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakten Träger, nämlich $\operatorname{supp}(f \circ T) = T^{-1}(\operatorname{supp} f)$, und ist damit insbesondere Riemann-integrierbar. Wir schreiben das Integral $\int f(T(x))dx$ unter Verwendung des Satzes von Fubini als mehrfaches Parameterintegral

$$\iiint \cdots \int f\big(t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n, t_{22}x_2 + t_{23}x_3 + \cdots + t_{2n}x_n, \ldots, t_{nn}x_n\big)dx_1dx_2 \cdots dx_n$$

wobei t_{ij} die Koeffizienten der zu T gehörigen Matrix sind. Jedes dieser Parameterintegrale erstreckt sich von $-\infty$ nach ∞ oder alternativ von $-R$ nach R für ein gross genug gewähltes $R > 0$, da f kompakten Träger hat. Für das Integral bezüglich der Variablen x_k, angefangen mit $k = 1$, dann für $k = 2$ und so fort bis $k = n$, führen wir die eindimensionale lineare Substitution $y_k = |t_{kk}|x_k + t_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + t_{k,n}x_n$ aus. In Leibnitz-Notation gilt dann $dy_k = |t_{kk}|dx_k$, beziehungsweise $dx_k = |t_k k^{-1}|dy_k$. Das mehrfache Integral wird zu

$$|t_{11}t_{22} \cdots t_{nn}|^{-1} \iiint \cdots \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)dy_n \cdots dy_2dy_1$$

was, wiederum unter Verwendung des Satzes von Fubini, gerade das Integral $|\det T|^{-1} \int f(y)dy$ ist. □

Lemma 13.64. — *Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $f \circ L$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det(L)| \int_{\mathbb{R}^n} f(L(x))dx$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an die Funktion f sei stetig. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass L als Produkt invertierbarer Matrizen $L = PST$ geschrieben werden kann, wobei P eine Permutationsmatrix, S eine untere Dreiecksmatrix, und T eine obere Dreiscksmatrix ist. Die Aussage von Lemma 13.63 gilt genauso für untere Dreiecksmatrizen mit dem selben Beweis, und auch für Permutationsmatrizen. Es folgt durch dreimaliges Anwenden von Lemma 13.63

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(PST(x))dx = |\det(P)||\det(S)||\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det(L)| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

was die Aussage für stetige Funktionen beweist. Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Riemann-integrierbare Funktion, mit Träger in einem offenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Nach Proposition 13.30 existieren für jedes $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen f_- und f_+ auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger in Q, so, dass

$$f_- \leq f \leq f_+ \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (f_+ - f_-) < \varepsilon$$

gilt. Daraus ergibt sich, unter Verwendung des bereits behandelten Falles stetiger Funktionen

$$f_- \circ L \leq f \circ L \leq f_+ \circ L \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (f_+ \circ L - f_- \circ L) < |\det L|\varepsilon$$

woraus nach Proposition 13.30 folgt, dass $f \circ L$ Riemann integrierbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned} -\varepsilon < \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)dx - |\det L| \int_{\mathbb{R}^n} f_+(L(x))dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx - |\det L| \int_{\mathbb{R}^n} f(L(x))dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)dx - |\det L| \int_{\mathbb{R}^n} f_-(L(x))dx < \varepsilon \end{aligned}$$

was das Lemma beweist, da $\varepsilon > 0$ beliebig war. □

Korollar 13.65. — *Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge. Dann ist $L(B)$ Jordan-messbar, und es gilt* $\operatorname{vol}(L(B)) = |\det L| \operatorname{vol}(B)$.

Beweis. Falls L nicht invertierbar ist, so ist $L(B)$ beschränkt und in einem echten linearen Teilraum von $\mathbb{R}^n$ enthalten, und damit eine Jordan-Nullmenge. Ist L invertierbar, so ist das Volumen $\operatorname{vol}(L(B))$ nach Lemma 13.64 durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{L(B)}(x)dx = |\det L| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{L(B)}(L(x))dx = |\det L| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(x)dx = |\det L| \operatorname{vol}(B)$$

gegeben, was zu zeigen war. □

Übung 13.66. — Berechnen Sie für eine symmetrische positiv definite Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ das Volumen des **Ellipsoids** $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1\}$, wobei Sie das Volumen der Einheitskugel als bekannt vorraussetzen.

Korollar 13.67. — *Sei $L \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit Spalten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Parallelotop*

$$P = L([0,1]^n) = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \;\middle|\; 0 \leq s_i \leq 1 \right\}$$

Jordan-messbar und es gilt $\operatorname{vol}(P) = |\det(L)| = \sqrt{\operatorname{gram}(v_1, \ldots, v_n)}$.

Beweis. Das folgt aus Korollar 13.65, angewandt auf die Jordan-messbare Menge $[0,1]^n$ mit Volumen 1. Mit $\operatorname{gram}(v_1, \ldots, v_n)$ bezeichnen wir hier die **Gramsche Determinante**, das ist die Determinante der Matrix A mit Koeffizienten $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Es gilt $A = L^t L$, und deshalb $|\det L|^2 = \det A$. □

13.3.3 Beweis der Substitutionsregel

Wir beweisen in diesem Abschnitt die Substitutionsregel für Funktionen mit kompaktem Träger, Satz 13.55. Wir werden dabei mehrmals von der folgenden Tatsache Gebrauch machen.

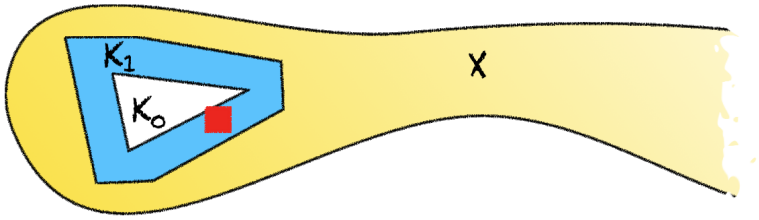
13.68. — Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $K_0 \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert $\delta_0 > 0$, so dass die kompakte Menge

$$K_1 = K_0 + \overline{B_\infty(0, 2\delta_0)} = \{x + y \mid x \in X, \|y\|_\infty \leq 2\delta_0\}$$

in X enthalten ist. Dass K_1 kompakt ist folgt aus dem Satz von Hein-Borel. Dass K_1 in X enthalten ist hat zur Folge, dass jeder abgeschlossene Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit maximaler Kantenlänge kleiner als δ_0 und mit $Q \cap K_0 \neq \varnothing$ in X enthalten ist. Um dies einzusehen können wir die nach Übung 10.32 stetige Funktion

$$h : K_0 \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \sup\{\delta > 0 \mid B_\infty(x, 2\delta) \subseteq X\}$$

betrachten. Da X offen ist gilt $h(x) > 0$ für alle $x \in K_0$, und nach Satz 10.47 nimmt diese Funktion ihr Minimum auf K_0 an. Dann erfüllt $\delta_0 = \frac{1}{3}\min\{h(x) \mid x \in K_0\}$ das Verlangte.



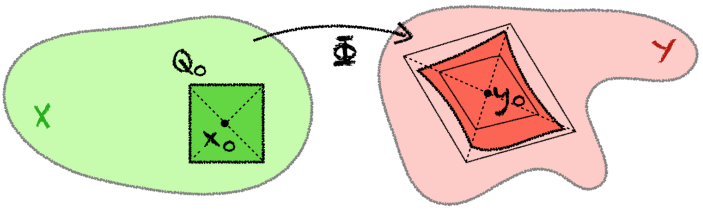
Figur 13.4: Die Menge K_1 entspricht einer leicht aufgeblähten Version von K_0 innerhalb von X, und ist so definiert, dass genügend kleine Quader die K_0 schneiden vollständig in K_1 enthalten sind.

Lemma 13.69. — *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $Q_0 \subseteq X$ ein achsenparalleler abgeschlossener Würfel mit Kantenlänge $2r > 0$ und Mittelpunkt $x_0 \in X$. Wir setzen $y_0 = \Phi(x_0)$, $L = D\Phi(x_0)$ und*

$$\sigma = \max\left\{\|D\Phi(x) - L\|_{\mathrm{op}} \mid x \in Q_0\right\}. \tag{13.13}$$

Für jede reelle Zahl s mit $\sigma\|L^{-1}\|_{\mathrm{op}}\sqrt{n} \leq s < 1$ gilt

$$y_0 + (1-s)L(Q_0 - x_0) \subseteq \Phi(Q_0) \subseteq y_0 + (1+s)L(Q_0 - x_0). \tag{13.14}$$



Beweis. Wir können Φ durch $\Phi(x - x_0) - y_0$ ersetzen, und damit ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 = 0$ und $y_0 = \Phi(x_0) = 0$ gilt. Die Inklusionen (13.14) sind in dem Fall $(1-s)Q_0 \subseteq L^{-1}\Phi(Q_0) \subseteq (1+s)Q_0$, was zu Abschätzungen

$$\|x\|_\infty \leq r(1-s) \quad \Longrightarrow \quad x \in L^{-1}\Phi(Q_0) \tag{13.15}$$

$$\|x\|_\infty \leq r \quad \Longrightarrow \quad \|L^{-1}\Phi(x)\|_\infty \leq (1+s)r \tag{13.16}$$

äquivalent ist. Für alle $x_1, x_2 \in Q_0$ gilt

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) - L(x_2) + L(x_1) = \int_0^1 \big(D\Phi(x_1 + t(x_2 - x_1)) - L\big)(x_2 - x_1)dt$$

woraus mit der Dreiecksungleichung für vektorwertige Integrale in (6.23) die Abschätzung

$$\|(\Phi(x_2) - L(x_2)) - (\Phi(x_1) - L(x_1))\| \leq \sigma\|x_2 - x_1\| \leq \sigma\sqrt{n}\|x_2 - x_1\|_\infty \tag{13.17}$$

folgt. Für $x_2 = x \in Q_0$ und $x_1 = 0$ folgt daraus $\|\Phi(x) - L(x)\| \leq \sigma\sqrt{n}r$, und also

$$\|L^{-1}\Phi(x) - x\|_\infty \leq \|L^{-1}\Phi(x) - x\| \leq \|L^{-1}\|_{\mathrm{op}}\sigma\sqrt{n}r \leq sr \tag{13.18}$$

und somit gilt die Abschätzung in (13.16) wie behauptet. Für die erste Inklusion wenden wir zu $x \in (1-s)Q_0$ den Banachschen Fixpunktsatz 10.33 auf die Abbildung

$$T_x : Q_0 \to Q_0, \qquad T_x(y) = x - (L^{-1}\Phi(y) - y)$$

an. Für $y \in Q_0$ und $x \in (1-s)Q_0$ gilt wegen (13.18)

$$\|T_x(y)\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|L^{-1}\Phi(y) - y\|_\infty \leq (1-s)r + sr = r.$$

also bildet T_x in der Tat jeden Punkt in Q_0 wieder nach Q_0 ab. Für $y_1, y_2 \in Q_0$ folgt aus (13.17)

$$\|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| = \|(L^{-1}\Phi(y_1) - y_1) - (L^{-1}\Phi(y_2) - y_2)\| \leq \|L^{-1}\|_{\mathrm{op}}\sigma\|y_1 - y_2\|.$$

was insbesondere $\|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| \leq s\|y_1 - y_2\|$ zeigt. Nach Voraussetzung gilt $s < 1$, und daher können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Es folgt, dass es für jedes $x \in (1-s)Q_0$ ein eindeutiges $y \in Q_0$ mit $T_x(y) = y$ oder äquivalenterweise $L^{-1}\Phi(y) = x$ gibt. Dies zeigt (13.16). □

Lemma 13.70. — *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus und sei $K_0 \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft. Für jeden Würfel Q_0 mit mit Mittelpunkt x_0, Kantenlänge kleiner als δ und $Q_0 \cap K_0 \neq \varnothing$ gilt*

$$\frac{\mathrm{vol}(\Phi(Q_0))}{1+\varepsilon} \leq |\det D\Phi(x_0)|\,\mathrm{vol}(Q_0) \leq \frac{\mathrm{vol}(\Phi(Q_0))}{1-\varepsilon}$$

Beweis. Wir werdenn Parallelotope P^+ und P^- konstruieren, die $P^- \subseteq \Phi(Q_0) \subseteq P^+$ sowie die Abschätzungen

$$\frac{\operatorname{vol}(P^+)}{1+\varepsilon} < |\det D\Phi(x_0)| \operatorname{vol}(Q_0) < \frac{\operatorname{vol}(P^-)}{1-\varepsilon}$$

erfüllen. Sei $s \in (0,1)$ klein genug, so, dass

$$(1-s)^n > 1-\varepsilon, \quad (1+s)^n < 1+\varepsilon$$

gilt, und sei $\delta_0 > 0$ klein genug, so, dass die Kompakte Menge $K_1 = K_0 + \overline{B_\infty(0, 2\delta_0)}$ in X enthalten ist. Nach Satz 10.47 ist die stetige Funktion $x \mapsto \|D\Phi(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}$ auf K_1 beschränkt, es gilt also

$$\|D\Phi(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} < M \qquad \text{für alle } x \in K_1$$

für ein geeignetes $M > 0$. Nach Proposition 10.51 ist $D\Phi$ ist gleichmässig stetig auf K_1, es existiert also ein $\delta \in (0, \delta_0)$ so, dass für alle $x_0, x \in K_1$

$$\|x_0 - x\|_\infty < \delta \implies M \cdot \|D\Phi(x) - D\Phi(x_0)\|_{\mathrm{op}} \cdot \sqrt{n} < s$$

gilt. Sei nun $x_0 \in K_0$ und Q_0 ein abgeschlossener Würfel mit Zentrum x_0 und Kantenlänge kleiner als δ. Schreibe $y_0 = \Phi(x_0)$ und $L = D\Phi(x_0)$. Aus Lemma 13.69 folgt, dass

$$y_0 + (1-s)L(Q_0 - x_0) \subseteq \Phi(Q_0) \subseteq y_0 + (1+s)L(Q_0 - x_0)$$

gilt. Wir setzen $P^+ = y_0 + (1+s)L(Q_0 - x_0)$ und $P^- = y_0 + (1-s)L(Q_0 - x_0)$. Daher gilt $P^- \subseteq \Phi(\overline{Q_0}) \subseteq P^+$. Nach Korollar 13.65 gilt

$$\operatorname{vol}(P^-) = (1-s)^n |\det L| \operatorname{vol}(Q_0) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{vol}(P^+) = (1+s)^n |\det L| \operatorname{vol}(Q_0)$$

was nach Wahl von s die Abschätzungen im Lemma impliziert. □

Beweis von Satz 13.55. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann integrierbare Funktion. In dem wir $f = f_+ - f_-$ für nichtnegative Funktionen f_+ und f_- wie in 5.25 schreiben und Linearität des Integrals verwenden können wir ohne Beschränkung des Allgemeinheit $f \geq 0$ annehmen. Schreibe $g : f \circ \Phi$. Dann ist nach Proposition 13.57 auch $g : X \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und der Träger $K_0 = \operatorname{supp}(g) \subseteq X$ ist kompakt. Wir wählen $\delta_0 > 0$ klein genug, so, dass die Kompakte Menge

$$K_1 := K_0 + \overline{B_\infty(0, \delta_0)}$$

in X enthalten ist, und wählen einen angeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der K_1 enthält. Wir schreiben $g_!$ für die Fortsetzung durch 0 von g auf Q.

Sei $\varepsilon > 0$, und sei $\delta \in (0, \delta_0)$ so klein, dass dass δ die Aussage zu $\varepsilon > 0$ in Lemma 13.70 für $K_0 \subseteq X$ erfüllt. Da die Funktion $x \mapsto \det D\Phi(x)$ stetig auf X, und also gleichmässig stetig

auf K_1 ist, können wir δ zusätzlich so klein wählen, dass

$$\|x_0 - x\| \leq \delta \implies |\det D\Phi(x_0) - \det D\Phi(x)| < \varepsilon$$

für alle $x_0, x \in K_1$ gilt. Wir wählen nichtnegative Treppenfunktionen u und o auf Q bezüglich einer Zerlegung von Q mit Maschenweite kleiner als δ, so, dass

$$u \leq g_! \leq o \qquad \text{und} \qquad \int_Q (o-u)dx < \varepsilon$$

gilt. Wir schreiben $c_\alpha \geq 0$ für den konstanten Wert von u auf Q_α° und $d_\alpha \geq 0$ für den konstanten Wert von u auf Q_α°. Sei A die Menge jener Adressen α in dieser Zerlegung, für die $Q_\alpha \cap K_0 \neq \varnothing$ gilt. Für $\alpha \in A$ gilt dann auch $Q_\alpha \subseteq K_1$, und

$$\operatorname{supp}(g) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} Q_\alpha \subseteq X \qquad \text{und} \qquad \operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \Phi(Q_\alpha) \subseteq Y.$$

Für $\alpha \in A$ sind sowohl ∂Q_α als auch $\Phi(\partial Q_\alpha)$ Jordan-messbar mit Volumen Null. Wir können demnach das Integral von $g|\det D\Phi|$ über X als

$$\int_X g(x)|\det D\Phi(x)|dx = \sum_{\alpha \in A} \int_{Q_\alpha^\circ} g(x)|\det D\Phi(x)|dx$$

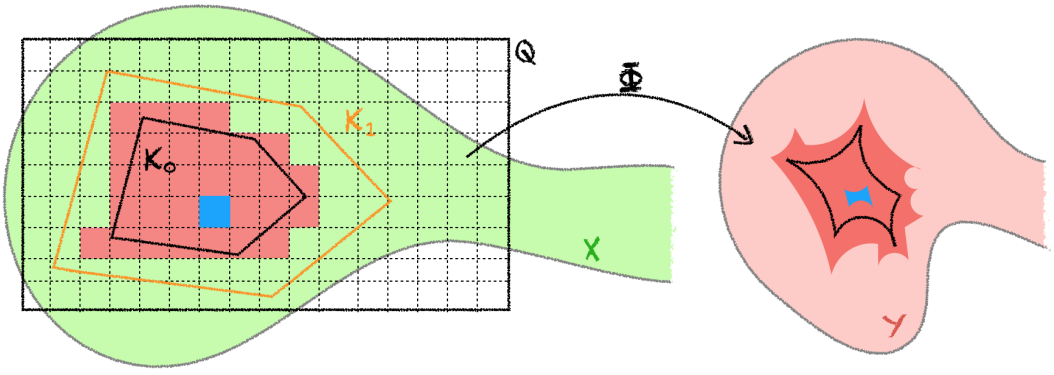
und das Integral f über Y als

$$\int_Y f(y)dy = \sum_{\alpha \in A} \int_{\Phi(Q_\alpha^\circ)} f(y)dy$$

berechnen. Wir schätzen nun in diesen Darstellungen die einzelnen Summanden ab. Dazu schreiben wir der Kürze halber $v_\alpha = \operatorname{vol}(Q_\alpha)$ und $v = \operatorname{vol}(Q)$, und wählen $M > 0$ so, dass

$$|\det D\Phi(x_\alpha)| \leq M, \qquad |c_\alpha| \leq M \qquad \text{und} \qquad |d_\alpha| \leq M$$

für alle $\alpha \in A$ gilt, wobei x_α das Zentrum von Q_α bezeichnet.



Figur 13.5: Geometrisches Setup im Beweis der Substitutionsregel. Die Quader Q_α mit $\alpha \in A$ sind hervorgehoben.

Dass die gegebene Zerlegung von Q Maschenweite kleiner als δ hat bedeutet, dass insbesondere für alle $\alpha \in A$ und $x \in Q_\alpha$ die Abschätzung $\|x_\alpha - x\| \leq \delta$ gilt. Nach Wahl von δ folgt daraus $|\det(D\Phi(x)) - \det(D\Phi(x_\alpha))| \leq \varepsilon$ für alle $\alpha \in A$ und $x \in Q_\alpha$. Daraus ergibt sich die Abschätzung von oben

$$\int_{Q_\alpha} g(x)|\det(D\Phi(x))|dx \leq v_\alpha d_\alpha(|\det(D\Phi(x_\alpha))| + \varepsilon) \leq v_\alpha d_\alpha|\det(D\Phi(x_\alpha))| + \varepsilon v_\alpha M.$$

und genauso können wir eine Abschätzung von unten, unter Verwendung der Treppenfunktion $u \leq g$ mit konstantem Wert c_α aud Q_α° herleiten. Summieren über $\alpha \in A$ ergibt

$$-\varepsilon vM + \sum_{\alpha\in A} v_\alpha c_\alpha|\det(D\Phi(x_\alpha))| \leq \int_X g(x)|\det(D\Phi(x))|dx \leq \varepsilon vM + \sum_{\alpha\in A} v_\alpha d_\alpha|\det(D\Phi(x_\alpha))| \tag{13.19}$$

Nach Wahl von δ und Lemma 13.70 gilt

$$\mathrm{vol}(\Phi(Q_\alpha^\circ))d_\alpha \leq (1+\varepsilon)\det(\Phi(x_\alpha))v_\alpha d_\alpha \leq \varepsilon M v_\alpha + \det(D\Phi(x_\alpha))v_\alpha d_\alpha$$

für alle $\alpha \in A$. Die Funktion $o \circ \Phi$ ist konstant mit Wert d_α auf $\Phi(Q_\alpha^\circ)$ und eine obere Schranke für $f = g \circ \Phi^{-1}$, woraus

$$\int_{\Phi(Q_\alpha^\circ)} f dy \leq \int_{\Phi(Q_\alpha^\circ)} (o \circ \Phi^{-1})dy \leq \varepsilon M v_\alpha + \det(D\Phi(x_\alpha))v_\alpha d_\alpha$$

folgt. Summieren über $\alpha \in A$ ergibt

$$\int_Y f dy \leq \sum_{\alpha\in A} \varepsilon M v_\alpha + \det(D\Phi(x_\alpha))v_\alpha d_\alpha \leq \varepsilon M v + \sum_{\alpha\in A} \det(D\Phi(x_\alpha))v_\alpha d_\alpha$$

Auf die gleiche Weise, unter Verwendung der Treppenfunktion $u \leq g$ mit konstantem Wert c_α aud Q_α° leiten wir eine untere Schranke für das Integral von f her, was schliesslich zu Abschätzungen

$$-\varepsilon M v + \sum_{\alpha\in A} \det(D\Phi(x_\alpha))v_\alpha c_\alpha \leq \int_Y f dy \leq \varepsilon M v + \sum_{\alpha\in A} \det(D\Phi(x_\alpha))v_\alpha d_\alpha \tag{13.20}$$

führt. □

13.4 Uneigentliche Mehrfachintegrale

13.4.1 Ausschöpfungen und uneigentliche Integrale

Uneigentliche Riemann-integrale in einer Variablen haben wir in 9.44 als eine Summe von Grenzwerten definiert. Im mehrdimensionalen Fall führen wir für die entsprechende Grenzwertbildung den Begriff der Ausschöpfung ein.

Definition 13.71. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine **Ausschöpfung** von B ist eine Folge Jordan-messbarer Teilmengen $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ mit

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m.$$

und wir nennen B **ausschöpfbar** falls solch eine Ausschöpfung existiert.

Übung 13.72. — Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ausschöpfbar ist, und genauer, dass es eine Ausschöpfung $(K_m)_{m=0}^{\infty}$ von U durch kompakte Jordan-messbarer Teilmengen gibt.

Definition 13.73. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ausschöpfbar, und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f auf B **uneigentlich Riemann-integrierbar** ist, falls für jede Ausschöpfung $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ von B mit der Eigenschaft, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|_{B_m}$ Riemann-integrierbar ist, der Grenzwert

$$\int_B f dx := \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx$$

existiert und von der Wahl solch einer Ausschöpfung unabhängig ist. Diesen Grenzwert nennen wir in dem Fall das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über B.

Proposition 13.74. — *Sei B eine Jordan-messbare Teilmenge, sei $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von B und sei $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt* $\mathrm{vol}(B) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m)$ *und*

$$\int_B f dx = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx.$$

Insbesondere ist f über B uneigentlich Riemann-integrierbar, und das uneigentliche Riemann-Integral ist das gewöhnliche Riemann-integral.

Beweis. Die Folge reeller Zahlen $(\mathrm{vol}(B_m))_{m=0}^{\infty}$ ist monoton wachsend und beschränkt durch $\mathrm{vol}(B)$. Also konvergiert sie, und es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m) \leq \mathrm{vol}(B).$$

Nach Korollar 13.32 sind die Mengen ∂B_m und ∂B Nullmengen. Diese Mengen sind abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und somit nach Übung 13.41 Jordan-messbar mit Volumen 0. Insbesondere gilt $\mathrm{vol}(B_m^\circ) = \mathrm{vol}(B_m)$ und $\mathrm{vol}(\overline{B}) = \mathrm{vol}(B)$. Die Menge

$$N = \partial B \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} \partial B_m$$

ist eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen, und also eine Nullmenge nach Lemma 13.15. Demnach existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von N durch offener Quader $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ mit Gesamtvolumen $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k) < \varepsilon$. Dann ist aber durch

$$\overline{B} = \partial B \cup B = N \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m^\circ \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m^\circ$$

eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\overline{B}$ gegeben. Diese Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Auf Grund der Inklusion $B_m^\circ \subset B_{m+1}^\circ$ gilt somit für geeignete $m, K \geq 1$

$$\overline{B} \subset B_m^\circ \cup \bigcup_{k=1}^{K} Q_k.$$

woraus sich

$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(\overline{B}) \leq \mathrm{vol}(B_m^\circ) + \sum_{k=0}^{K} \mathrm{vol}(O_k) < \mathrm{vol}(B_m^\circ) + \varepsilon = \mathrm{vol}(B_m) + \varepsilon$$

ergibt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $\mathrm{vol}(B) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m)$ wie behauptet. Für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ gilt dann auch

$$\left| \int_{B_m} f dx - \int_B f dx \right| \leq \int_{B \setminus B_m} |f| dx \leq \sup |f(B)| \cdot \mathrm{vol}(B \setminus B_m) \to 0$$

für $m \to \infty$ wie gewünscht. □

Übung 13.75. — Verwenden Sie Proposition 13.74, um das Volumen des Dreiecks

$$\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\}$$

mittels einer Ausschöpfung, die aus einer Folgen von endlichen Vereinigungen von Quadern besteht, zu berechnen.

Satz 13.76. — *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von B so dass $f|_{B_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist. Angenommen f sei nicht-negativ und der Grenzwert*

$$I = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx$$

existiert. Dann ist f uneigentlich Riemann integrierbar, und das uneigentliche Riemann-Integral ist gleich I.

Beweis. Sei $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ eine zweite Ausschöpfung von B, so, dass für jedes $k \geq 0$ die Einschränkung $f|_{A_k}$ integrierbar ist. Dann gilt auf Grund von $f \geq 0$ und wegen Proposition 13.74, dass

$$\int_{A_k} f dx = \lim_{m\to\infty} \int_{A_k \cap B_m} f dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx$$

für alle $k \geq 0$. Die Folge $(\int_{A_\ell} f dx)_{k=0}^{\infty}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergiert sie und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx.$$

Durch Vertauschen der beiden Ausschöpfungen folgt Gleichheit. □

13.77. — Mehrdimensionale uneigentliche Integral sind nicht in allen Fällen eine Verallgemeinerung des eindimensionalen uneigentlichen Integrals. Beispielsweise konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ im Sinne der Definitionen von Abschnitt 9.2.5, wobei man das Leibniz-Kriterium Proposition 7.23 für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

benutzt, um die Konvergenz nachzuweisen. Diese Reihe konvergiert aber nicht absolut, und mittels dem Riemannschen Umordnungssatz 7.21 könnten wir eine Ausschöpfung $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ von $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ finden, für die $\int_{B_m} \sin(x) x^{-1} dx$ gegen einen anderen Wert strebt oder divergiert.

Übung 13.78. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass auch $|f| : U \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

13.4.2 Substitution für uneigentliche Riemann-Integrale

Offene Teilmengen sind nach Übung 13.72 ausschöpfbar, und wir können somit von uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen auf diesen sprechen.

Satz 13.79. — *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist die Funktion $(f \circ \Phi)|\det(D\Phi)|$ uneigentlich Riemann-integrierbar auf X und es gilt*

$$\int_Y f dx = \int_X (f \circ \Phi)|\det(D\Phi)| dx$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass f nicht-negativ ist und wählen eine Ausschöpfung $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ von Y, so dass $f|_{B_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist. Sei $(K_m)_{m=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von Y durch kompakte Jordan-messbare Teilmengen wie sie nach Übung 13.72

existiert, und schreibe $Y_m = B_m \cap K_m$. Wir konstruieren so eine Ausschöpfung anschliessend. Dann ist $f|_{Y_m}$ Riemann-integrierbar, und $\mathbb{1}_{Y_m} f$ hat kompakten Träger, enthalten in K_m. Nun berechnet man mit der Substitutionsregel 13.55

$$\int_Y f dy = \lim_{m\to\infty} \int_{Y_m} f dy = \lim_{m\to\infty} \int_Y \mathbb{1}_{Y_m} f dy = \lim_{m\to\infty} \int_X (\mathbb{1}_{Y_m} f) \circ \Phi |\det(D\Phi)| dx$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{\Phi^{-1}(Y_m)} f \circ \Phi |\det(D\Phi)| dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\Phi^{-1}(Y_m)} f \circ \Phi |\det(D\Phi)| dx.$$

Da $(\Phi^{-1}(Y_m))_{m=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von X ist und der obige Grenzwert existiert, ist die nicht-negative Funktion $f \circ \Phi |\det(D\Phi)|$ uneigentlich Riemann-integrierbar nach Satz 13.76 und es gilt die aufgestellte Substitutionsformel. Für allgemeine Funktionen können wir obiges auf die nicht-negativen Funktionen $f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $f_- = \frac{1}{2}(f - |f|)$ anwenden, da nach Übung 13.78 auch $|f|$ Riemann integrierbar ist. Der Satz folgt dann durch Linearität des uneigentlichen Integrals und $f = f_+ - f_-$. □

Beispiel 13.80. — Die **Gauss'sche Glockenkurve** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nach Normalisierung des Flächeninhalts unter deren Graphen auch **Dichtefunktion** der Normalverteilung genannt wird, ist durch $f(x) = \exp(-x^2)$ definiert. Die normalisierte Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2) dt$$

heisst **Verteilungsfunktion** der Normalverteilung, und ist eine in der Statistik unentbehrliche Funktion. Wir berechnen das konvergierende Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx$$

in dem wir Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ benutzen, um I^2 zu berechnen. In der Tat gilt

$$I^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi$$
$$= \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2r dr = \pi$$

woraus $I = \sqrt{\pi}$ folgt. Wir haben den Satz von Fubini auf ganz $\mathbb{R}^2$ angewendet, was wir durch betrachten geeigneter Auschöpfungen begründen können, etwa $([-m, m]^2)_{m=0}^{\infty}$ für $\mathbb{R}^2$.

Übung 13.81. — Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle Ax, x\rangle) dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$$

Beispiel 13.82. — Wir möchten als Anwendung der Theorie dieses Kapitels die als **Basler Problem** bekannte Gleichung

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

zeigen. Die Herangehensweise die wir hier wählen ist von T. Apostol [Apo1983]. Wir werden dazu das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy \tag{13.21}$$

auf zwei verschiedene Weisen berechnen. Unter Verwendung der geometrischen Reihe beobachten wir zuerst, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^k y^k dxdy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \tfrac{1}{k+1} y^k dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \zeta(2) \end{aligned} \tag{13.22}$$

gilt. Wir überlassen es dem Leser als Übung zu zeigen, dass die Funktion $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$ auf $[0, 1)^2$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist und dass die Manipulationen in (13.22) tatsächlich sinnvoll sind. Nun möchten wir das Integral (13.21) mit einer linearen Substitution berechnen. Dazu betrachten wir neue Intergrationsvariablen u, v gegeben durch die Rotation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Damit ist der neue Integrationsbereich in den u, v-Koordinaten das Quadrat mit Ecken bei $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ und $(1, -1)$, wie man leicht durch Einsetzen überprüfen kann. Es gilt

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(u-v)(u+v)} = \frac{4}{4 - u^2 + v^2}$$

und mit Substitution und Fubini demnach

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy &= \int_0^1 \int_{-u}^{u} \frac{4}{4-u^2+v^2} \frac{1}{2} dvdu + \int_1^2 \int_{-(2-u)}^{2-u} \frac{4}{4-u^2+v^2} \frac{1}{2} dvdu \\ &= \underbrace{4 \int_0^1 \int_0^u \frac{1}{4-u^2+v^2} dvdu}_{=I_1} + \underbrace{4 \int_1^2 \int_0^{2-u} \frac{1}{4-u^2+v^2} dvdu}_{=I_2}\end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung (siehe (9.7)) zeigt

$$I_1 = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\right) du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2$$

wobei $u = 2\sin(\theta)$ gesetzt wurde. Ähnlich berechnet man

$$I_2 = 4\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \arctan\left(\frac{2-u}{\sqrt{4-u^2}}\right) \mathrm{d}u = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \phi \, \mathrm{d}\varphi = 4\left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2,$$

wobei $u = 2\cos(2\varphi)$ gesetzt wurde. Zusammengefasst erhalten wir nun

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = I_1 + I_2 = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

wie behauptet.

Übung 13.83. — Führen Sie obige Rechnungen im Detail durch, begründen Sie die alle Rechenschritte formal.

Übung 13.84. — Berechnen Sie den Wert der alternierenden Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Übung 13.85. — Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$ heisst n-dimensionaler **Standardsimplex**. Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(\Delta_n)$ sowie das Integral

$$\int_{\Delta_n} e^{x_1+\cdots+x_n} \, dx_1 \cdots dx_n.$$

Übung 13.86. — Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne ω_n das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

gilt. Berechnen Sie ω_{100} mit Computerhilfe auf 30 korrekte Nachkommastellen. Für welches n ist ω_n maximal?

Hinweis: Zeigen Sie oder benutzen Sie ohne Beweis, dass das eindimensionale Integral

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n(x) \, dx$$

die Gleichung $I_n I_{n-1} = \frac{1}{n} I_1 I_0 = \frac{2\pi}{n}$ erfüllt, und benutzen Sie dies, um eine Rekursionsformel für ω_n herzuleiten.

Übung 13.87. — Sei $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Seien $f, g : B \to \mathbb{R}$, so dass $|f| \leq g$ gilt und die Funktionen $f|_{B_m}$ und $g|_{B_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar sind. Angenommen g ist uneigentlich Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch f und $|f|$ auf B uneigentlich Riemann-integrierbar sind und dass

$$\left|\int_B f dx\right| \leq \int_B |f| dx \leq \int_B g dx$$

gilt.

Übung 13.88. — Für $x, y > 0$ ist die **Betafunktion** durch

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

gilt.

Kapitel 14

Globale Integralsätze

Wir behandeln in diesem Kapitel Integralsätze für Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$, welche mehrdimensionale Verallgemeinerungen des Fundamentalsatzes der Integral- und Differentialrechnung darstellen. Die Einschränkung der Dimension ist dabei aus mathematischer Sicht nicht notwendig, jedoch sind diese Fälle die geometrisch am anschaulichsten.

Der Satz von Stokes für allgemeine Mannigfaltigkeiten erfordert zusätzliche Methoden und Begriffe aus der Analysis, der Differentialgeometrie und der linearen Algebra, insbesondere „Differentialformen“, welche wir hier nur am Rande und nicht in der nötigen Tiefe besprechen können.

14.1 Der Divergenzsatz und der Satz von Green in der Ebene

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein stetig differenzierbares Vektorfeld F auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir können uns das Vektorfeld als Strömungsgeschwindigkeit eines Mediums vorstellen, zum Beispiel Wasserfluss auf einer Landkarte. Falls wir in so einer Situation messen wollen wieviel Wasser in m^3/s auf einem Gebiet $B \subseteq U$ durch Quellen hinzukommt oder im Boden versickert, so können wir dies auf zwei Arten tun. Entweder durchlaufen wir das gesamte Gebiet B, messen die lokale Quellenstärke in m/s, und addieren diese Messwerte auf. Das entspricht einem Integral über B. Die „lokale Quellenstärke“ ist dabei durch die sogenannte **Divergenz** des Vektorfeldes gegeben. Wir können aber auch nur die Grenze des Gebietes B durchlaufen, und an jeder Stelle den Durchfluss über die Grenze in m^2/s messen, was einem **Flussintegral** entlang ∂B entspricht. Dass die beiden Methoden das selbe Resultat liefern ist die Aussage des Divergenzsatzes.

14.1.1 Der Divergenzsatz für Bereiche unter einem Graphen

Definition 14.1. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld auf U. Die **Divergenz** von F ist durch

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{tr}(Df) = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \cdots + \partial_n F_n$$

gegebene Funktion $\operatorname{div}(F) : U \to \mathbb{R}$.

14.2. — Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad. Sei $t \in [a, b]$ so dass γ bei t differenzierbar ist. Wir schreiben

$$n_\gamma(t) = \big(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)\big)$$

und bezeichnen diesen Vektor als **Aussennormale** an γ im Punkt $\gamma(t)$. Der Vektor $n_\gamma(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$, um 90 Grad im Uhrzeigersinn gedreht. Er ist also an jeder Stelle orthogonal zu γ und zeigt bezüglich Laufrichtung nach rechts. Wir stellen uns dabei vor, dass γ ein Gebiet B im Gegenuhrzeigersinn umschliesst, sodass die Aussennormale tatsächlich nach „aussen“ und nicht ins Innere von B zeigt. Für $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ist das Skalarprodukt

$$\langle v, n_\gamma(t)\rangle = v_1\gamma_2'(t) - v_2\gamma_1'(t) = \det\begin{pmatrix} v_1 & \gamma_1'(t) \\ v_2 & \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$$

das auch das als $v \times \gamma'(t)$ oder $v \wedge \gamma'(t)$ geschriebene Vektorprodukt.

Definition 14.3. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad. Das **Flussintegral** von F entlang γ ist das Integral

$$\int_\gamma F dn_\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), n_\gamma(t)\rangle\, dt$$

14.4. — Interpretieren wir $F : U \to \mathbb{R}^2$ als Strömung eines Mediums, so misst das Skalarprodukt $\langle F(\gamma(t)), n_\gamma(t)\rangle$ den Durchfluss pro Lägeneinheit über die durch γ gezogene Grenzlinie im Punkt $\gamma(t)$, und das Flussintegral demnach den gesamten Fluss von F über $\gamma([a, b])$. Mit dieser Interpretation ist es intuitiv klar, dass das Flussintegral unter Reparametrisierung von γ unverändert bleibt. Um dies nachzuprüfen betrachten wir eine differenzierbare Funktion $\Phi : [c, d] \to [a, b]$ mit $\Phi(c) = a$ und $\Phi(d) = b$, und schreiben $\varphi = \gamma \circ \Phi$. Dann gilt nach der Kettenregel $n_\varphi(t) = n_\gamma(\Phi(t))\Phi'(t)$, und

$$\int_\varphi F dn_\varphi = \int_c^d \langle F(\gamma(\Phi(t))), n_\gamma(\Phi(t))\rangle \cdot \Phi'(t) dt = \int_a^b \langle F(\gamma(s)), n_\gamma(s)\rangle\, ds = \int_\gamma F dn_\gamma$$

durch Substitution $s = \Phi(t)$. Der Divergenzsatz 14.22 auf den wir hinarbeiten besagt dass, falls γ den Rand eines beschränkten Gebietes $B \subseteq U$ parametrisiert, die Gleichheit

$$\int_B \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial B} F dn = \int_\gamma F dn_\gamma$$

gilt. Der mittlere Ausdruck ist eine alternative und bis auf weiteres informelle Notation für das Flussintegral rechts, die wir im Folgenden benutzen falls klar ist wie ∂B durch einen Pfad parametrisiert werden kann - die formelle Definition ist in 14.17 gegeben. Wir beginnen mit

dem Fall eines achsenparallelen Rechtecks $B = [a,b] \times [c,d] \subseteq U$ in Proposition 14.5, und für Bereiche unter einem Graphen in Proposition 14.7.

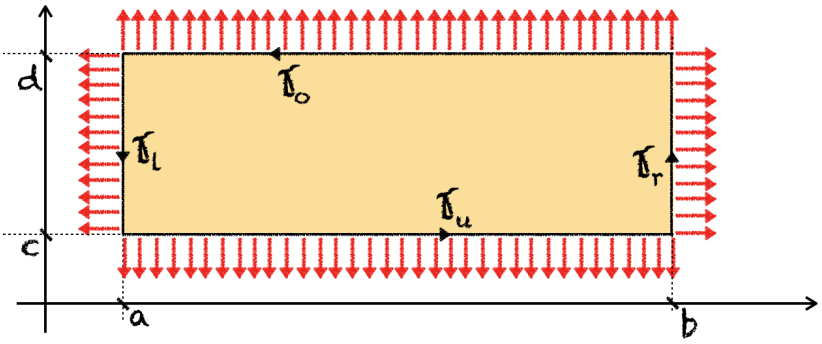
PROPOSITION 14.5. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial B} F dn \tag{14.1}$$

für jedes abgeschlossene, achsenparallele Rechteck $B \subseteq U$.

Beweis. Sei $B = [a,b] \times [c,d]$ für reelle Zahlen $a \leq b$ und $c \leq d$ ein in U enthaltenes Rechteck. Der Rand von B ist im Gegenuhrzeigersinn und Einheitsgeschwindigkeit durch die Verkettung der folgenden vier Pfade parametrisiert.

$$\begin{aligned}
\gamma_u &: [a,b] \to U, & \gamma_u(t) &= (t,c), & n_{\gamma_u}(t) &= (0,-1)\\
\gamma_r &: [c,d] \to U, & \gamma_r(t) &= (b,t), & n_{\gamma_r}(t) &= (1,0)\\
\gamma_o &: [a,b] \to U, & \gamma_o(t) &= (a+b-t,d), & n_{\gamma_o}(t) &= (0,1)\\
\gamma_l &: [c,d] \to U, & \gamma_l(t) &= (a,c+d-t), & n_{\gamma_l}(t) &= (-1,0)
\end{aligned}$$



Das Flussintegral $\int_{\partial B} F dn$ schreibt sich entsprechend als eine Summe von vier Integralen, nämlich

$$\int_{\partial B} F dn = -\underbrace{\int_a^b F_2(t,c)dt}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^d F_1(b,t)dt}_{\text{rechts}} + \underbrace{\int_a^b F_2(a+b-t,d)dt}_{\text{oben}} - \underbrace{\int_c^d F_1(a,c+d-t)dt}_{\text{links}}$$

Wir substituieren t für $a+b-t$ im dritten, und t für $c+d-t$ im vierten Integral. Nach dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung wie in Korollar 9.6 können wir dies als

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} F dn &= \int_a^b (F_2(t,d) - F_2(t,c))dt + \int_c^d (F_1(b,t) - F_1(a,t))dt\\
&= \int_a^b \int_c^d \partial_2 F_2(x,y)dsdt + \int_c^d \int_a^b \partial_1 F_1(x,y)dsdt
\end{aligned}$$

schreiben. Mit dem Satz von Fubini 13.45 folgt daraus die gewünschte Identität (14.1). □

Korollar 14.6. — *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \int_{\partial(x_0+[-h,h]^2)} F dn \tag{14.2}$$

für alle $x_0 \in U$.

Beweis. Die Funktion $\operatorname{div}(F)$ ist Stetig bei $x_0 \in U$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $h > 0$ so, dass $B_h = x_0 + [-h, h]^2$ in U enthalten ist, und dass

$$|\operatorname{div}(F)(x_0) - \operatorname{div}(F)(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in B_h$ gilt. Nach Proposition 14.5 gilt

$$\begin{aligned}\left|(\operatorname{div}(F)(x_0) - \frac{1}{4h^2}\int_{\partial B_h} F dn\right| &= \frac{1}{4h^2}\left|\int_{B_h} \operatorname{div}(F)(x_0) - \operatorname{div}(F)(x) dx\right| \\ &\leq \frac{1}{4h^2}\int_{B_h} |\operatorname{div}(F)(x_0) - \operatorname{div}(F)(x) dx| \leq \frac{\operatorname{vol}(B_h)}{4h^2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

was gerade (14.2) zeigt, da $\varepsilon > 0$ beliebig war. □

Proposition 14.7. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen so, dass das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ in U enthalten ist, und sei $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt*

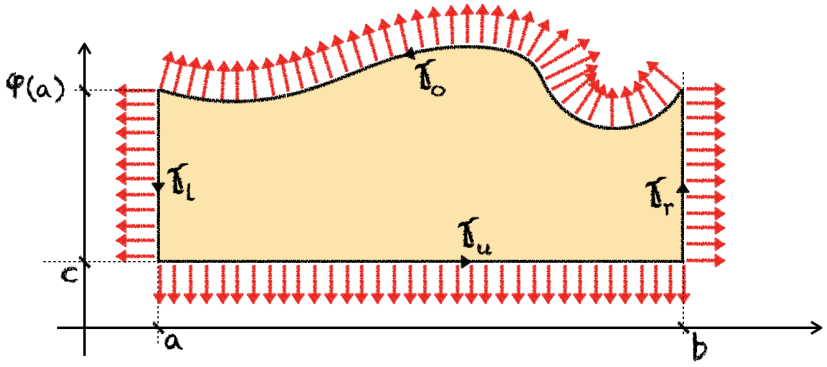
$$\int_B \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial B} F dn$$

für den Bereich $B = \{(x, y) \in U \mid x \in [a, b],\ c \leq y \leq \varphi(x)\}$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass φ auf ganz $[a, b]$ stetig differenzierbar ist. In der Tat, falls φ nur stückweise stetig differenzierbar ist, so zerteilen wir das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle, auf welchen φ stetig differenzierbar ist. Kennt man die Proposition für Graphen stetig differenzierbarer Funktionen, so ergibt sich durch Addition der entstehenden Gleichungen die gewünschte Formel.

Der Rand von B ist im Gegenuhrzeigersinn durch die Verkettung der folgenden vier Pfade parametrisiert.

$$\begin{array}{llllll}
\gamma_u : [a,b] \to U, & \gamma_u(t) & = (t, c), & n_{\gamma_u}(t) & = (0, -1) \\
\gamma_r : [c, \varphi(b)] \to U, & \gamma_r(t) & = (b, t), & n_{\gamma_r}(t) & = (1, 0) \\
\gamma_o : [a,b] \to U, & \gamma_o(t) & = (a + b - t, \varphi(a + b - t)), & n_{\gamma_o}(t) & = (-\varphi'(a + b - t), 1) \\
\gamma_l : [c, \varphi(a)] \to U, & \gamma_l(t) & = (a, c + \varphi(a) - t), & n_{\gamma_l}(t) & = (-1, 0)
\end{array}$$



Das Flussintegral schreibt sich entsprechend als Summe von vier Integralen

$$\int_{\partial B} F dn = \underbrace{-\int_a^b F_2(t,c)dt}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} F_1(b,t)dt}_{\text{rechts}} + \underbrace{\int_a^b \big\langle F(t,\varphi(t)), (-\varphi'(t),1)\big\rangle\, dt}_{\text{oben}} - \underbrace{\int_c^{\varphi(a)} F_1(a,t)dt}_{\text{links}}$$

wobei wir im dritten und vierten Integral bereits eine lineare Substitution ausgeführt haben.

Sei $\varepsilon > 0$. Das Rechteck $Q = [a,b] \times [c,d]$ und das Intervall $[a,b]$ sind kompakt, das Vektorfeld F ist stetig differenzierbar und φ suückweise stetig differenzierbar. Wir können damit $M \geq 1$ und $\eta \in (0,\varepsilon)$ wählen, so dass

$$\|F(x)\| \leq M, \quad |\operatorname{div}(F)(x)| \leq M, \qquad \text{und} \qquad |\varphi'(t)| \leq M$$

für alle $x \in Q$ und $t \in [a,b]$, sowie

$$\|x-y\|_\infty < \eta \implies \|F(x)-F(y)\|_\infty < \varepsilon \tag{14.3}$$

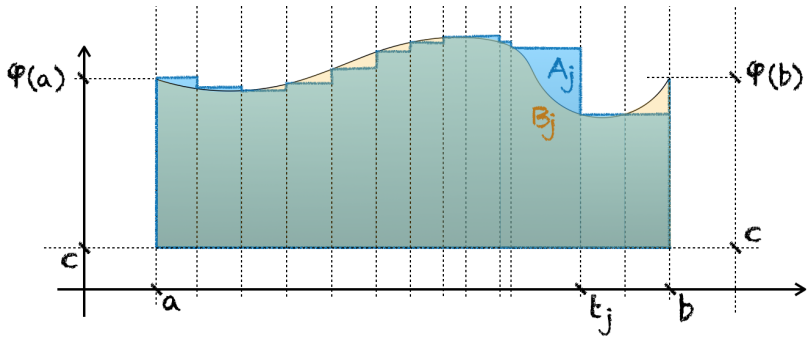
für alle $x, y \in Q$ gilt. Insbesondere ist φ Lipschitz-stetig auf $[a,b]$ mit Lipschitz-Konstante M. Schreiben wir $\delta = \eta M^{-1}$, so gilt

$$|s-t| < \delta \implies |\varphi(s)-\varphi(y)| < \eta \tag{14.4}$$

für alle $s, t \in [a,b]$. Sei $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Maschenweite kleiner als δ. Wir zerlegen B in Streifen $B_1, \ldots, B_N$, und nähern B durch eine Vereinigung von Rechtecken A an, in dem wir

$$\begin{aligned} B_j &= \{x = (x_1,x_2) \in U \mid x_1 \in [t_{j-1},t_j],\ c \leq x_2 \leq \varphi(x_1)\} \\ A_j &= [t_{j-1},t_j] \times [c, \varphi(t_{j-1})] \\ A &= \bigcup_{j=1}^N A_j \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, N$ definieren. Wir haben die Zerlegung so gewählt, dass diese Streifen höchstens Breite δ haben.



Die Abschätzung $\operatorname{vol}\big((B_j \setminus A_j) \cup (A_j \setminus B_j)\big) \leq \varepsilon(t_j - t_{j-1})$ folgt nach Wahl von δ und der Zerlegung, womit wir

$$\left| \int_B \operatorname{div}(F)dx - \int_A \operatorname{div}(F)dx \right| \leq \sum_{j=1}^{N} M\varepsilon(t_j - t_{j-1}) = M(b-a)\varepsilon \tag{14.5}$$

erhalten. Wir wenden Proposition 14.5 auf die Rechtecke A_j an und summieren über j. Dabei kürzen sich die Integrale über die gemeinsame Grenze von A_j und A_{j+1}, und wir können die Summe auch als Integral über den Rand ∂A von A auffassen. Es folgt

$$\int_A \operatorname{div}(F)dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} \operatorname{div}(F)dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial A_j} F dn = \int_{\partial A} F dn. \tag{14.6}$$

Das Integral über den Rand von A ist explizit

$$\int_{\partial A} F dn = -\underbrace{\int_a^b F_2(t,c)dt}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} F_1(b,t)dt}_{\text{rechts}} - \underbrace{\int_c^{\varphi(a)} F_1(a,t)dt}_{\text{links}}$$
$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_2(t,\varphi(t_{j-1})dt}_{\text{Treppe horizontal}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} F_1(t_j,t)dt}_{\text{Treppe vertikal}}$$

Die mit „links“, „unten“ und „rechts“ beschrifteten Integrale stimmen mit drei entsprechenden Integralen in der Definition von $\int_{\partial B} F dn$ überein. Es bleibt also die verbleibenden Ausdrücke mit der Beschriftung „Treppe“ mit dem Integral

$$\int_a^b \big\langle F(t,\varphi(t)), (-\varphi'(t),1) \big\rangle \, dt = \int_a^b F_2(t,\varphi(t))dt - \int_a^b F_1(t,\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

zu vergleichen. Wir vergleichen zuerst die Summe für die horizontalen Teile der Treppe mit dem horizontalen Teil des Integrals oben, und erhalten

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_2(t,\varphi(t_{j-1}))dt - \int_a^b F_2(t,\varphi(t))dt \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |F_2(t, \varphi(t_{j-1})) - F_2(t, \varphi(t))|\, dt \leq \varepsilon(b-a) \quad (14.7)$$

wegen $|t_{j-1} - t| < \delta$ für $t \in [t_{j-1}, t_j]$, Wahl von δ mit (14.4) und Wahl von η mit (14.3). Für die Summe zu den vertikalen Teilen der Treppe verwenden wir wiederum (14.3) und erhalten

$$\begin{aligned}\left| \int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} F_1(t_j, t)dt - F_1(t_j, \varphi(t_j))\big(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\big) \right| \\ = \left| \int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} \big(F_1(t_j, t) - F_1(t_j, \varphi(t_j))\big)dt \right| \\ \leq \varepsilon\, |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \leq \varepsilon M(t_j - t_{j-1}).\end{aligned}$$

Ebenso gilt auf Grund des Fundamentalsatzes der Differential und Integralrechnung in der Form von Korollar 9.6 und (14.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_1(t, \varphi(t))\varphi'(t)dt - F_1(t_j, \varphi(t_j))\big(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\big) \right| \\ = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(F_1(t, \varphi(t)) - F_1(t_j, \varphi(t_j)\big)\varphi'(t)dt \right| \leq \varepsilon M(t_j - t_{j-1})\end{aligned}$$

Kombinieren wir diese beiden Abschätzungen und summieren über j, so erhalten wir

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi(t_{j-1})}^{\varphi(t_j)} f_1(t_j, t)dt - \int_a^b f_1(t, \varphi(t))\varphi'(t)dt \right| \leq 2\varepsilon M(b-a).$$

Zusammen mit (14.7) folgt

$$\left| \int_{\partial B} F dn - \int_{\partial A} F dn \right| \leq 2\varepsilon M(b-a) + \varepsilon(b-a) \leq 3\varepsilon M(b-a)$$

Mit Gleichung (14.6) und der Abschätzung (14.5) folgt

$$\left| \int_{\partial B} F dn - \int_B \operatorname{div}(F)dx \right| \leq 4\varepsilon M(b-a)$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war ergibt sich die Aussage der Proposition. □

Übung 14.8. — Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $B = \overline{B(x_0, r)} \subseteq U$ ein abgeschlossener Ball mit $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_B \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial B} F dn$$

gilt. Schreiben Sie dafür das rechte Integral mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung γ des Kreises ∂B. Zeigen Sie dies anschliessend, dass die Divergenz von F bei $x_0 \in U$ durch

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B(x_0,r)} F dn$$

gegeben ist.

14.1.2 Glatt berandete Bereiche

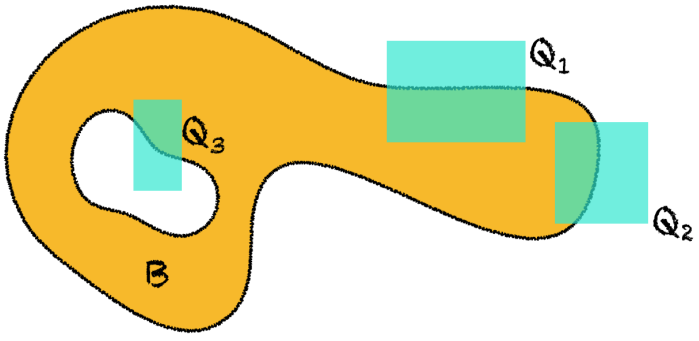
Um den Divergenzsatz auf allgemeineren Bereichen zu formulieren und zu beweisen, verwenden wir folgenden Begriff glatt berandeter Bereiche in $\mathbb{R}^n$. Die Definition ist analog zur Definition 12.16 von Teilmannigfaltigkeiten.

Definition 14.9. — Eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst ein **glatt berandeter Bereich**, falls es für jeden Punkt $p \in B$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p und ein glatter Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi_p(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\varphi_p(U_p \cap B) = \{y \in V_p \mid y_n \leq 0\}$$

gilt.

14.10. — Es folgt aus der Definition insbesondere, dass der Rand ∂B eines glatt berandeten Bereichs B eine $n-1$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Entsprechend Proposition 12.21 über die lokale Darstellbarkeit von Mannigfaltigkeiten durch Graphen von Funktionen ist ein Bereich B also glatt berandet, wenn B lokal um jeden Punkt aussieht wie das Gebiet unter dem Graphen einer glatten reellwertigen Funktion in $(n-1)$ Variablen, geeignet rotiert. Wir beschränken uns hier der Bequemlichkeit halber auf glatte Diffeomorphismen, obwohl in den es für die meisten Aussagen und Beweise genügt Diffeomorphismen der Klasse C^1 oder C^2 zu haben.



Figur 14.1: In der durch Q_1 definierten Umgebung lässt sich der Schnitt $B \cap Q_1$ als die Menge der Punkte in Q_1 unterhalb eines Graphen über der x-Achse auffassen. Genauso ist der Schnitt $B \cap Q_2$ die Menge der Punkte in Q_2 unterhalb eines Graphen über der y-Achse, und $B \cap Q_3$ die Menge der Punkte in Q_3 oberhalb eines Graphen über der x-Achse.

Übung 14.11. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein glatt berandeter Bereich. Zeigen Sie, dass wie behauptet der Rand ∂B eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit bildet.

Lemma 14.12. — *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit Null als regulären Wert. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \geq 0\}$$

glatt berandet und $\partial B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) = 0\}$.

Beweis. Wir imitieren zu grossen Teilen den Beweis vom Satz über den konstanten Rang 12.26. Sei $p \in \partial B$. Nach Annahme hat gilt $\operatorname{grad}(F)(p) \neq 0$. Wir können die Koordinaten umordnen und annehmen, dass $\partial_n F(p) \neq 0$ gilt. Wir nehmen an, dass $\partial_n F(p) < 0$ ist; das Argument ist im anderen Fall analog. Wir schreiben $p = (x_0, y_0)$ für $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Genau wie im Beweis von Satz12.26 erhalten wir offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von y_0, so dass der Schnitt von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid F(x, y) = 0\}$ mit $U_0 \times V_0$ durch den Graphen einer glatten Funktion $f : U_0 \to V_0$ gegeben ist. Wenn nötig können wir die Umgebungen U_0, V_0 verkleinern, so dass $\partial_n F(v) < 0$ für alle $v \in U_0 \times V_0$ ist und so dass $U_0 \times V_0$ ein Quader ist, womit insbesondere $V_0 = (c, d) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Wir behaupten, dass

$$B \cap (U_0 \times V_0) = \{(x, y) \in U_0 \times V_0 \mid F(x, y) \geq 0\} = \{(x, y) \in U_0 \times V_0 \mid y \leq f(x)\}$$

gilt. In der Tat ist zu $x \in U_0$ die Funktion $y \in (c, d) \mapsto F(x, y)$ strikt monoton fallend und verschwindet bei $y = f(x)$. Daher gilt $y \leq f(x)$ genau dann, wenn $F(x, y) \geq 0$. Insbesondere ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid F(x, y) = 0\} \subseteq \partial B$. Für $(x, y) \in B$ mit $F(x, y) > 0$ gilt auf Grund der Stetigkeit von F sogar $(x, y) \in B^\circ$ und das Lemma folgt aus obigem. □

14.1.3 Zerlegung der Eins

Ein nützliches technisches Hilfsmittel in der Analysis und der Topologie sind sogenannte „Zerlegungen der Eins“. Eine **Zerlegung der Eins** oder auch **Partition der Eins** auf einem Raum X ist in jedem Fall eine Kollektion stetiger Funktionen $\psi_0, \psi_1, \ldots$ auf X mit Werten in $[0, 1]$, so dass die Summe dieser Funktionen die konstante Funktion mit Wert Eins ergibt. Je nach Zusammenhang fordern wir von den Funktionen ψ_i bestimmte Eigenschaften, etwa dass der Träger von ψ_i in einer bestimmten Teilmenge von X enthalten ist, oder dass ψ_i differenzierbar oder glatt ist, wie zum Beispiel in Satz 14.16.

Um glatte Zerlegungen der Eins zu konstruieren, konstruieren wir zuerst eine geeignete stetige Zerlegung der Eins, und glätten diese anschliessend. Den Glättungsprozess durch Faltung haben wir bereits in Lemma 11.67 gesehen. Die im nachfolgenden Lemma 14.13 definierte Funktion $\psi * f$ nennt man **Faltung** von f mit ψ, und eine Funktion ψ mit den Eigenschaften in Lemma 14.14 nennt man **Glättungskern**.

Lemma 14.13. — *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist die durch*

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)f(y)dy$$

definierte Funktion $\psi * f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt, mit Träger in $\operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(f)$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und schreibe $B = x_0 + [-1,1]^n$. Da $\operatorname{supp}(\psi)$ und B beschränkt sind, gilt $\operatorname{supp}(\psi) + B \subseteq Q$ für einen genügend grossen Würfel $Q = [-R,R]^n$. Für alle $x \in B$ gilt dann

$$(\psi * f)(x) = \int_Q \psi(x-y)f(y)dy = \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \psi(x-y)f(y)dy_1 \cdots dy_n$$

da jedes $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\psi(x-y) \neq 0$ auch

$$y = x - (x-y) \in B + \operatorname{supp}(\psi) \subseteq Q$$

erfüllt. Stetigkeit und Glattheit von $\psi * h$ folgt nun aus dem Satz von Fubini 13.45 und dem Satz 11.36 über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen. Für die letzte Behauptung nehmen wir an, dass $x_0 \notin \operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(f)$ ist. Da $\operatorname{supp}(\psi)$ kompakt und $\operatorname{supp}(f)$ abgeschlossen ist, ist $\operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(f)$ ebenfalls abgechlossen, und es existiert also eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 die $\operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(f)$ nicht schneidet. Für $x \in U$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $y \notin \operatorname{supp}(f)$ oder $x - y \notin \operatorname{supp}(\psi)$, womit auf jeden Fall $\psi(x-y)f(y) = 0$ gilt. Dies impliziert $(\psi * f)(x) = 0$ für alle $x \in U$, und damit $x_0 \notin \operatorname{supp}(f * \psi)$. □

Lemma 14.14. — *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\delta \in (0,\varepsilon)$ und eine eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ so dass*

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \operatorname{supp}(\psi) \subseteq B(0,\delta), \quad \textit{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \psi dx = 1$$

für alle $x \in K$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Für jede solche Funktion ψ gilt $|(\psi * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Beweis. Die Menge $K_1 = K + \overline{B(0,2)}$ ist kompakt. Die Einschränkung von f auf K_1 ist gleichmässig stetig, und also existiert $\delta \in (0,1)$ mit

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in K_1$. Dies gilt insbesondere für alle $x \in K$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x-y| < \delta < 1$. Die Existenz einer glatten Funktion in einer Variablen

$$\eta : \mathbb{R} \to [0,\infty]$$

mit $\eta(0) = 1$ und $\operatorname{supp}\eta \subseteq [-1,1]$ folgt aus Übung 8.24. Die Funktion

$$\psi(x) = A\eta(\lambda x_1)\eta(\lambda x_2)\cdots\eta(\lambda x_n)$$

hat dann, für eine geeignete Wahl von Konstanten $A > 0$ und $\lambda > 0$ die geforderten Eigenschaften. Sei $x \in K$. Dann erhalten wir mittels der Substitution $z = x - y$, dass

$$\begin{aligned}|\psi * f(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)f(y)dy - f(x)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)f(x-z)dz - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)f(x)dz\right| \leq \int_{B(0,\delta)} \psi(z)\underbrace{|f(x-z)-f(x)|}_{\leq\varepsilon}dz \leq \varepsilon\end{aligned}$$

gilt, wie behauptet. □

Übung 14.15. — Zeigen Sie, dass der Unterraum $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ aller glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ eine dichte Untermenge des topologischen Vektorraums $C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz.

Satz 14.16. — *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $U_1,\ldots,U_N$ eine offene Überdeckung von K. Dann existieren glatte Funktionen $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_N : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit*

$$\operatorname{supp}(\eta_0)\cap K = \varnothing, \qquad \operatorname{supp}(\eta_i) \subset U_i \text{ für } i = 1,,2,\ldots,N, \qquad \sum_{i=0}^N \eta_i = 1.$$

Beweis. Wir konstruieren zuerst stetige Funktionen $h_0,h_1,\ldots,h_N$, die abgesehen von der Glattheit alle Eigenschaften im Satz erfüllen. Sei $R > 0$ so dass $K \subseteq B(0,R)$ gilt. Wir schreiben $U_0 = \mathbb{R}^n \setminus K$, und definieren für $i = 0,1,\ldots,N$ die stetigen Abstandsfunktionen

$$d_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad d_i(x) = \inf\{|x-y| \mid y \in \mathbb{R}^n \setminus U_i\}$$

und wählen eine Lebesgue-Zahl $\lambda \in (0,1)$ für die Überdeckung $U_0,U_1,\ldots,U_N$ der kompakten Menge $K_1 = K + \overline{B(0,2)}$, wie sie nach Satz 10.47 existiert. Nach Definition 10.46 heisst das, dass für jedes $x \in K_1$, und sogar jedes $x \in \mathbb{R}^n$, ein $i \in \{0,1,\ldots N\}$ mit $B(x,\lambda) \subseteq U_i$ existiert. Für den Träger der Funktion

$$\widetilde{h}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{h}_i = \max\{0, \widetilde{h}_i(x) = d_i(x) - \tfrac{\lambda}{2}\}$$

gilt dann $\operatorname{supp}(\widetilde{h}_i) + B(0,\frac{\lambda}{2}) \subseteq U_i$. Die Funktion $H = \widetilde{h}_0 + \widetilde{h}_1 + \cdots + \widetilde{h}_N$ ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ positiv. In dem wir $h_i(x) = H(x)^{-1}\widetilde{h}_i(x)$ definieren, erhalten wir eine stetige Zerlegung der Eins, so dass

$$\operatorname{supp}(h_i) + B(0,\tfrac{\lambda}{2}) \subseteq U_i$$

für alle $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ gilt. Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine glatte Funktion mit Träger $\operatorname{supp} \psi \subseteq B(0, \frac{\lambda}{4})$ und Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \psi dx = 1$, wie in Lemma 14.14. Dann sind die Funktionen

$$\eta_i = \psi * h_i$$

nach Lemma 14.13 glatt mit Träger $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$ und nehmen Werte in $[0, 1]$ an. Schliesslich gilt

$$\sum_{i=0}^{N} \eta_i = \sum_{i=0}^{N} \psi * h_i = \psi * \sum_{i=0}^{N} h_i = \psi * 1 = 1$$

auf Grund der Bilinearität der Faltung, was den Satz beweist. □

14.1.4 Der Divergenzsatz für Bereiche in der Ebene

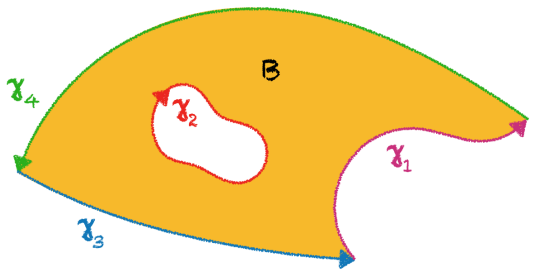
Definition 14.17. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Eine **Parametrisierung des Randes** von B ist eine endliche Kollektion stetig differenzierbarer Wege $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \partial B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. (Überdeckend) Es gilt $\partial B = \bigcup_{k=1}^{K} \gamma_k\big([a_k, b_k]\big)$.
2. (Keine Überschneidungen ausser an den Enden) Falls $\gamma_j(s) = \gamma_k(t)$ für $(j, s) \neq (k, t)$ gilt, so gilt $s \in \{a_j, b_j\}$ und $t \in \{a_k, b_k\}$.
3. (Aufeinanderfolgend) Für jedes $j \in \{1, \ldots, K\}$ existiert genau ein $k \in \{1, \ldots, K\}$ mit $\gamma_j(b_j) = \gamma_k(a_k)$.
4. (Regularität) Es gilt $\gamma_k'(t) \neq 0$ alle k und $t \in (a_k, b_k)$.

Die Parametrisierung $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$ heisst **positiv orientiert**, wenn für jedes k und jedes $t \in (a_k, b_k)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\gamma(t) + \lambda n_\gamma(t) \in B^\circ$ für alle $\lambda \in (0, \varepsilon)$. Dabei ist

$$n_\gamma(t) = (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$$

die Aussennormale an γ wie in 14.2, also der Geschwindigkeitsvektor von γ zur Zeit t um 90° im Uhrzeigersinn gedreht.



Figur 14.2: Eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂B. Das Innere von B liegt immer links in Laufrichtung der Wege.

Übung 14.18. — Zeigen Sie, dass kompakte glatt berandete Bereiche eine positiv orientierte Parametrisierung besitzen und geben Sie diese im ersten Fall explizit an.

Definition 14.19. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \partial B, \ldots, \gamma_K : [a_K, b_K] \to \partial B$ besitzt. Sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Umgebung U von B. Das **Wegintegral** von F entlang ∂B ist durch

$$\int_{\partial B} F dt = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \big\langle F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t) \big\rangle \, dt$$

definiert. Das **Flussintegral** von F durch den Rand ∂B ist durch

$$\int_{\partial B} F dn = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \langle F(\gamma_k(t)), n_\gamma(t) \rangle \, dt.$$

definiert.

Übung 14.20. — Zeigen Sie, dass die Definition des Flussintegral über den Rand eines Rechtecks am Anfang dieses Abschnitts und für Bereiche unter Graphen in Proposition 14.7 Spezialfälle obiger Definition sind.

14.21. — Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung besitzt, und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Umbebung U von B. Wir überprüfen dass das Wegintegral $\int_{\partial B} F dt$ nicht von der Wahl der positiv orientierten Parametrisierung des Randes ∂B abhängt. Die Unabhängigkeit des Flussintegrals von der Parametrisierung ergibt sich analog. Seien

$$\begin{aligned} \gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \to \partial B, \ \ldots \ , \gamma_K : I_K = [a_K, b_K] \to \partial B \\ \rho_1 : J_1 = [c_1, d_1] \to \partial B, \ \ldots \ , \rho_L : J_L = [c_L, d_L] \to \partial B \end{aligned}$$

zwei positiv orientierte Parametrisierungen von ∂B. Durch Zerlegen der Wege und Umummerierung kann man annehmen, dass $K = L$ und

$$\gamma_k(I_k) = \rho_k(J_k), \qquad \gamma_k(a_k) = \rho_k(c_k), \qquad \gamma_k(b_k) = \rho_k(d_k)$$

für alle k gilt, und dass sowohl γ_k als auch ρ_k injektiv sind. Es genügt als folgendes zu zeigen: sind $\gamma : [a, b] \to U$ und $\rho : [c, d] \to U$ reguläre, injektive Wege mit $\gamma([a, b]) = \rho([c, d])$ sowie $\gamma(a) = \rho(c)$ und $\gamma(b) = \rho(d)$, dann gilt

$$\int_a^b \big\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \, dt = \int_c^d \big\langle F(\rho(s)), \rho'(s) \big\rangle \, ds. \tag{14.8}$$

Wir behaupten, dass die Abbildung $\alpha = \rho^{-1} \circ \gamma : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und

streng monoton wachsend ist. Da stetige Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, reicht es diese für jedes $t_0 \in [a,b]$ in einer Umgebung von t_0 zu zeigen. Sei $s_0 = \alpha(t_0)$. Nun lässt sich mittels

$$\Phi : (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \times (-\delta, \delta) \to U \qquad \Phi(s,h) = \rho(s) + hn_\rho(s)$$

für ein geeignetes $\delta > 0$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarer Ableitung bei $(s_0, 0)$ definieren, welche ρ erweitert. Nach Satz 12.8 hat diese Abbildung auch eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Die stetige Differenzierbarkeit von $\alpha = \Phi^{-1} \circ \gamma$ in einer Umgebung von t_0 ergibt sich nun aus der Kettenregel. Da $\gamma'(t_0) \neq 0$ gilt und $D\Phi(s_0, 0)$ invertierbar ist, folgt ebenfalls aus der Kettenregel, dass $\alpha'(t_0) \neq 0$ gilt. Damit ist α insbesondere streng monoton, und da nach Voraussetzung $\alpha(a) = c$ und $\alpha(b) = d$ gilt, folt daraus strenge Monotonie von α. Lemma 11.48 zeigt nun, dass (14.8) gilt, was zu zeigen war.

Satz 14.22 (Divergenzsatz in der Ebene). — *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein glatt berandeter, kompakter Bereich und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supset B$. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial B} F dn$$

Beweis. Da B glatt berandet ist existiert für jedes $x \in B$ ein abgeschlossenes Rechteck $R_x \subseteq U$ mit $x \in R_x^\circ$, so, dass $B \cap R_x$ geeignet rotiert das Gebiet unter dem Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist. Die Familie offener Mengen $\{R_x^\circ \mid x \in B\}$ ist eine offene Überdeckung von B. Da B kompakt ist existieren also endlich viele Rechtecke $R_1, \ldots, R_N$ deren Inneres B überdeckt, und so, dass $B \cap R_i$ geeignet rotiert das Gebiet unter dem Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist. Wir wählen eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $R_1^\circ, \ldots, R_N^\circ$ von B entsprechend Satz 14.16, also glatte Funktionen $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{supp} \eta_0 \cap B = \varnothing, \qquad \operatorname{supp} \eta_i \subseteq R_i^\circ \text{ für } i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \sum_{i=0}^N \eta_i = 1.$$

Für $i = 1, 2, \ldots, N$ ist das Vektorfeld $\eta_i F$ Null ausserhalb und auf dem Rand von R_i. Es gilt deshalb aufgrund von Proposition 14.7

$$\int_B \operatorname{div}(\eta_i F)dx = \int_{R_i \cap B} \operatorname{div}(\eta_i F)dx = \int_{\partial(R_i \cap B)} \eta_i F dn = \int_{\partial B} \eta_i F dn$$

$i = 1, 2, \ldots, N$, aber auch für $i = 0$ da $\eta_0 F$ identisch Null auf B ist. Schliesslich folgern wir

$$\int_B \operatorname{div}(F)dx = \sum_{i=0}^N \int_B \operatorname{div}(\eta_i F)dx = \sum_{i=0}^N \int_{\partial B} \eta_i F dn = \int_{\partial B} F dn$$

aus Linearität der Integration. □

14.23. — Mit essentiell dem selben Beweis kann man nachweisen, dass die Aussage des Satzes für viele andere, nicht unbedingd glatt berandete Bereiche $B \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt. So genügt es

etwa, dass man B durch das Innere von Rechtecken R_i abdecken kann, so, dass $B \cap R_i$ geeignet rotiert das Gebiet unter dem Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist.

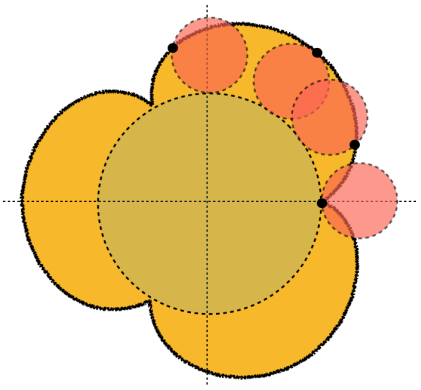
Beispiel 14.24. — Wir betrachten einen kompakten Bereich B in $\mathbb{R}^2$ und das glatte Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x) = x$. Dann gilt $\operatorname{div}(F) = 2$ und der Divergenzsatz ergibt

$$2\operatorname{vol}(B) = \int_B \operatorname{div}(F)dx = \int_{\partial B} F dn.$$

falls wir ihn auf das Gebiet B anwenden können. Ist also beispielsweise ∂B durch eine geeignete Kurve $\gamma : [a, b] \to \partial B$ parametrisiert, so gilt

$$\operatorname{vol}(B) = \tfrac{1}{2}\int_a^b \langle \gamma(t), n_\gamma(t)\rangle\, dt = \int_a^b \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)dt.$$

Als konkretes Beispiel berechnen wir den Flächeninhalt des Bereichs B im Inneren der Kurve die entsteht indem wir einen Kreis mit Radius $\frac{1}{m}$ auf einem Kreis mit Radius 1 abrollen für eine ganze Zahl $m \geq 1$, und dabei einen Punkt auf dem sich bewegenden Kreis verfolgen. Diese Kurve wird **Epizykloide** genannt, im Spezialfall $m = 1$ auch **Kardioide**. Die von der Epizykloide eingeschlossene Fläche B ist nicht glatt berandet, aber wie in 14.23 erklärt gilt der Divergenzsatz für die Fläche B.



Wir notieren Elemente von $\mathbb{R}^2$ als Spaltenvektoren. Die Epizykloide ist durch den positiv orientierten geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \frac{m+1}{m}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + \frac{1}{m}\begin{pmatrix}\cos((m+1)t)\\ \sin((m+1)t)\end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Aussennormale an γ ist durch

$$n_\gamma(t) = \frac{m+1}{m}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + \frac{m+1}{m}\begin{pmatrix}\cos((m+1)t)\\ \sin((m+1)t)\end{pmatrix}$$

gegeben. Das Skalarprodukt $\langle \gamma(t), n_\gamma(t)\rangle$ ist

$$\frac{(m+1)^2}{m^2} + \frac{m+1}{m^2} + a\cos(t)\cos((m+1)t) + a\sin(t)\sin((m+1)t)$$

für eine Konstante a die uns nicht weiter bekümmert. Wir erhalten

$$\mathrm{vol}(B) = \int_0^{2\pi} \langle \gamma(t), n_\gamma(t) \rangle \, dt = \pi \frac{(m+1)(m+2)}{m^2}$$

da das Integral über $[0, 2\pi]$ von $\cos(t)\cos((m+1)t)$ und auch $\sin(t)\sin((m+1)t)$ Null ist.

14.1.5 Rotation und der Satz von Green

Definition 14.25. — Sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Die **Wirbelstärke** oder **Rotation** von F ist die durch

$$\mathrm{rot}(F)(x) = \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)$$

definierte reellwertige Funktion auf U.

Satz 14.26 (Satz von Green). — *Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt für jeden glatt berandeten, kompakten Bereich $B \subseteq U$*

$$\int_B \mathrm{rot}(F) dx = \int_{\partial B} F dt.$$

Beweis. Wir definieren das Vektorfeld $G : U \to \mathbb{R}^2$ durch $G(x) = (F_2(x), -F_1(x))$. Dann gilt

$$\mathrm{div}(G) = \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \mathrm{rot}(F)$$

und für einen Pfad γ in U gilt

$$\langle G(\gamma(t)), n_\gamma(t) \rangle = \big\langle (F_2(\gamma(t)), -F_1(\gamma(t))), (\gamma_2'(t), -\gamma_1(t)) \big\rangle = \big\langle F(\gamma(t), \gamma'(t) \big\rangle .$$

Aus dem Divergenzsatz 14.22 angewandt auf G folgt also der Satz von Green für F. □

14.27. — Wir sagen, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^2$ **rotationsfrei** ist, falls $\mathrm{rot}(F) = 0$ gilt. Dass F rotationsfrei ist bedeutet in in anderen Worten gerade, dass F die Integrabilitätsbedingungen wie in Satz 11.60 erfüllt. In diesem Extremfall vereinfacht sich Satz 14.26 zu einer Gleichung zwischen Wegintegralen. Man kann dies gelegentlich ausnützen, um anstatt einem komplizierten Wegintegral ein deutlich einfacheres Wegintegral zu berechnen.

Übung 14.28. — Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das nicht einfach zusammenhängende Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0,1)}$, und sei F ein rotationsfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω. Zeigen sie

$$\int_{\partial B(0,2)} F dt = 0 \iff \exists f \in C^2(U, \mathbb{R}) \text{ mit } F = \mathrm{grad}\, f$$

Applet 14.29 (Divergenz und Rotation). *Dieses Applet illustriert die Begriffe „rotationsfrei“ und „divergenzfrei“ sowie die Sätze dieses Abschnitts.*

Als Anwendung des Divergenzsatzes in der Ebene diskutieren wir in den nachfolgenden Übungen den **Jordan'schen Kurvensatz**. Die Frage, die dieser Satz beantwortet, ist im Wesentlichen die folgende. Angenommen man hat eine „komplizierte“ geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidungen in der Ebene gezeichnet. Teilt diese Kurve dann die Ebene in ein „Inneres“ und ein „Äusseres“ auf? Wie definiert man überhaupt, ob ein Punkt im Inneren oder im Äusseren liegt? Dies ist zwar anschaulich klar, jedoch überraschend schwierig zu beweisen. Dass dies wirklich ein Problem ist wurde von Camille Jordan (1838-1922) erkannt. Jordan's ursprünglicher Beweis des Satzes (um 1882) benutzt eine Art Polygonale Approximation an die Kurve. Er ist an mehreren Stellen problematisch und wurde über mehrere Jahrzehnte angezweifelt, gilt heute aber als essentiell korrekt. Man kann das Problem auch in höheren Dimensionen formulieren. Zum Beispiel kann man fragen, ob eine kompliziert deformierte Sphäre in $\mathbb{R}^3$ den Raum $\mathbb{R}^3$ in ein wohldefiniertes Inneres und Äusseres aufteilt. Eine positive Antwort auf das allgemeine Problem wird durch den **Separationssatz von Jordan-Bouwer** gegeben. Einen modernen Beweis davon, der in beliebigen Dimensionen funktioniert und ohne Analysis auskommt findet man in [Hat02] Proposition 2B.1, oder in [Rot88], Theorem 6.35. Wir formulieren und beweisen den Satz hier im Fall glatter Kurven in $\mathbb{R}^2$.

Satz 14.30 (Jordanscher Kurvensatz). — *Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ein glatter, regulärer, einfacher, geschlossener Weg. Dann kann man das Komplement von $\Gamma = \gamma([0,1])$ eindeutig als disjunkte Vereinigung*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = \operatorname{Inn}(\Gamma) \cup \operatorname{Auss}(\Gamma), \qquad \operatorname{Inn}(\Gamma) \cap \operatorname{Auss}(\Gamma) = \varnothing$$

schreiben, wobei das Innere $\operatorname{Inn}(\Gamma)$ eine offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge und das Äussere $\operatorname{Auss}(\Gamma)$ eine offene, unbeschränkte, zusammenhängende Teilmenge ist. Des Weiteren gilt $\partial \operatorname{Inn}(\gamma) = \partial \operatorname{Auss}(\gamma) = \Gamma$.

14.31. — Ein Weg γ wie im Satz $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist bis auf die Gleichung $\gamma(0) = \gamma(1)$ injektiv und glatt, und es gilt $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Wir nehmen im Folgenden zusätzlich an, dass $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ gilt, das heisst das Bild $\Gamma = \gamma([0,1])$ hat keinen Knick an der Stelle $\gamma(0) = \gamma(1)$. Damit könnte man γ zu einer periodischen, stetig differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Wir definieren zu $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ die **Umlaufzahl** von γ um u als

$$I_\gamma(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\langle \gamma(t) - u, n_\gamma(t) \rangle}{\|\gamma(t) - u\|^2} dt.$$

Übung 14.32. — Wir betrachten zu $r > 0$ die geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$$

welche den Rand der Kreisscheibe $B(0,r)$ parametrisiert. Realisieren Sie $I_\gamma(u)$ für $u \notin \partial B(0,r)$

als Flussintegral eines Vektorfeldes über $\partial B(0,r)$, und zeigen Sie, dass für alle $u \notin \partial B(0,r)$ die Umlaufzahl durch

$$I_\gamma(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in B(0,r) \\ 0 & \text{falls } u \notin B(0,r) \end{cases}$$

gegeben ist. Für Kreise ist die Umlaufzahl also in der Lage zu entscheiden, ob ein Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt. Funktioniert das auch für ein Rechteck? Für eine Ellipse?

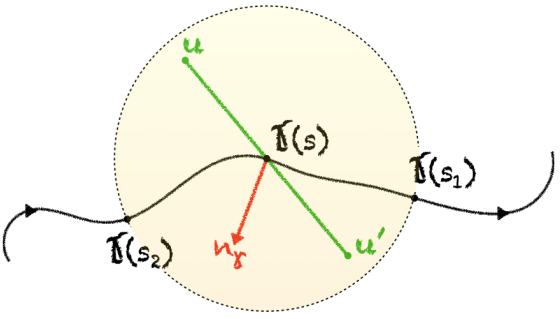
Übung 14.33. — Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein glatter, regulärer, einfacher, geschlossener Weg. Zeigen Sie, dass I_γ lokal konstant ist.

14.34. — Übung 14.33 zeigt insbesondere, dass I_γ ausserhalb eines genügend grossen Balles identisch verschwindet. In der Tat geht $I_\gamma(u)$ gegen Null für $\|u\| \to \infty$, da in der Definition von $I_\gamma(u)$ die Norm von u im Nenner zur Potenz 2 und im Zähler zur Potenz 1 vorkommt. Ist $B(0,r)$ ein Ball, der Γ enthält, so muss I_γ auf $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,r)$ konstant sein wegen Übung 14.33 und gleichzeitig für wachsende Radien gegen Null gehen, was die Behauptung zeigt. Die wesentliche Idee um den Jordan'schen Kurvensatz zu beweisen ist nun zu untersuchen, was mit der Umlaufzahl $I_\gamma(u)$ passiert, wenn u die Kurve Γ überquert. Mit Hilfe des Divergenzsatzes kann man zeigen, dass die sich Umlaufzahl bei Sprüngen über Γ um ± 1 ändert, wobei das Vorzeichen davon abhängt, in welche Richtung der Normalenvektor von γ zeigt.

Übung 14.35. — Seien $u, u' \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$, so dass das Geradensegment von u nach u' die Spur von γ in genau einem Punkt $\gamma(s)$ schneidet. Zeigen Sie, dass

$$I_\gamma(u') - I_\gamma(u) = \operatorname{sgn}(\langle u - u', n_\gamma(s)\rangle$$

gilt. Beobachten Sie dazu, dass die Spur von γ in genau einem Punkt geschnitten wird. Also lässt sich die Aussage auf folgendes Bild reduzieren:



Ersetzen Sie nun das Wegstück von γ zwischen den genügend nahe an s gewählten Zeiten s_1, s_2 durch das eine oder das andere Kreissegment wie im Bild.

Übung 14.36. — Zeigen Sie, dass es mindestens einen Punkt $u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ mit $I_\gamma(u_0) = 1$ oder $I_\gamma(u_0) = -1$ gibt.

Übung 14.37. — Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\mathrm{Inn}(\gamma) = \{u \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \mid I_\gamma(u) \neq 0\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Auss}(\gamma) = \{u \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \mid I_\gamma(u) = 0\}$$

offen und wegzusammenhängend sind.

Übung 14.38. — Beweisen Sie den Jordan'schen Kurvensatz 14.30.

14.2 Oberflächenintegrale

In Analogie zum Divergenzsatz 14.22 und dem Satz von Green 14.26 in der Ebene möchten wir zwei Integralsätze für dreidimensionale Bereiche formulieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Oberflächenintegrals.

14.2.1 Flächen und Karten

Eine **Fläche** $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit. Wir werden an zwei Arten von Flächen interessiert sein:

(1) Die Fläche S ist der Rand eines kompakten, glatt berandeten Bereiches $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Beispielsweise könnte S also eine Sphäre oder ein Torus sein. Wir sprechen informell von einer **geschlossenen Fläche**.

(2) Die Fläche S ist Teil einer gösseren Fläche M, so, dass der Abschluss von S in M kompakt ist, und der Rand von S in M eine glatte Kurve, das heisst, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 1. Ein Beispiel für so eine Fläche ist die obere Hemisphäre von $\mathbb{S}^2$ sein. Wir sprechen informell von einer **Fläche mit Rand**.

Um eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ lokal zu beschreiben, werden wir Karten und Parametrisierungen verwenden. Wir identifizieren im Folgenden $\mathbb{R}^2$ mit dem Unterraum $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^3$.

14.39. — Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Entsprechend Definition 12.16 existiert für jeden Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ auf eine weitere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ so dass

$$\varphi(U \cap S) = \{x \in V \mid x_3 = 0\} = V \cap \mathbb{R}^2$$

gilt. Den Diffeomorphismus φ_p bezeichnet man als **Karte** für die Teilmannigfaltigkeit S von $\mathbb{R}^3$ um p, den zu φ inversen Diffeomorphismus $\psi : V \to U$ als **Parametrisierung** von S um p. Die Diffeomorphismen φ und ψ schränken sich zu

$$\varphi : U \cap S \to V \cap \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad \psi : V \cap \mathbb{R}^2 \to U \cap S$$

ein. Sind $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ Karten für S, so bezeichnet man den Diffeomorphismus

$$\alpha_{12} : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\varphi_1} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

als **Kartenwechsel**, oder auch **Übergangsmorphismus**. Dieser Diffeomorphismus schränkt sich zu $\alpha_{12} : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^2 \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^2$ ein. Wir werden die Terminologie nun leicht adaptieren, und Kartenbereiche nicht als in $\mathbb{R}^3$ offene Mengen definieren, sondern als relativ offenen Mengen von S, mit Wertebereichen offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Dies führt uns auf den Begriff eines Atlas, der sowohl in der Differentialgeometrie als auch in der algebraischen Geometrie unverzichtbar ist, um abstrakte Mannigfaltigkeiten zu definieren, die nicht als Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ eingebettet sind.

Definition 14.40. — Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Wir nennen **Atlas** für S eine Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ von S durch relativ offene Teilmengen $U_i \subseteq S$, genannt **Kartenbereiche**, zusammen mit Homeomorphismen $\varphi_i : U_i \to V_i$ auf offene Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ genannt **Kartenabbildungen**, so dass die **Parametrisierungen** $\psi_i = \varphi_i^{-1}$

$$\psi_i : V_i \to U_i \ \subseteq \mathbb{R}^3$$

glatt sind, und so, dass die **Kartenwechsel**

$$\alpha_{ij} : \varphi(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_1} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \tag{14.9}$$

glatt sind.

14.41. — Jede Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ besitzt einen Atlas, das folgt direkt aus der Definition von Teilmannigfaltigkeiten. Es ist jedoch nicht wahr, dass eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die einen Atlas besitzt auch tatsächlich eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Im Kontext der Integralsätze im dreidimensionalen Raum wird der Begriff des Flussintegrals durch Oberflächen wichtig sein, das wir aber nur definieren können falls die gegebene Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Orientierung besitzt. Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche S zwei voneinander unterscheidbare „Seiten“ hat, die man vierschiedenfarbig einfärben kann. Technisch können wir Orientierbarkeit auf zwei äquivalente Arten charakterisieren: einerseits durch die Existenz eines orientierten Atlas, andererseits über die Existenz eines nichtverschwindenden Schnitt des Normalenbündels, siehe Übung 14.44. Der Rand $S = \partial B$ eines glatt berandeten Bereichs $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist orientierbar, und wir können von der normierten Aussennormalen sprechen, deren Existenz und Eindeutigkeit wir in Lemma 14.47 formell nachweisen.

Definition 14.42. — Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Wir sagen ein Atlas $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ sei **orientiert**, falls für alle Kartenwechsel α_{ij} wie in (14.9) gegeben die Jacobi-Determinante

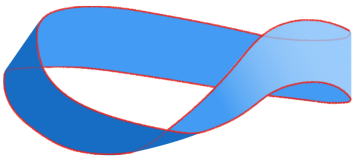
$$\det(D\alpha_{ij}) > 0$$

positiv ist. Wir sagen S sei **orientierbar**, falls S einen orientierten Atlas besitzt.

Übung 14.43. — Zeigen Sie, dass die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist.

Übung 14.44. — Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ein stetiges **normiertes Normalenfeld** ist ein stetiger Schnitt des Normalenbündels von S, also eine stetige Abbildung $n : S \to \mathbb{R}^3$ mit $n(p) \in (\mathrm{T}_p S)^\perp$, so dass $\|n(p)\| = 1$ für alle $p \in S$ gilt. Zeigen Sie, dass S genau dann orientierbar ist, falls ein stetiges normiertes Normalenfeld existiert.

Beispiel 14.45. — Ein **Möbius-Band** erhält man, indem man einen rechteckigen Streifen Papier nach einer Drehung um 180° an einer der kurzen Enden zusammenklebt.



Die so entstehende Fläche ist nicht orientierbar. Die Frage nach dem Fluss einer Strömung durch das Möbius-Band ist sinnlos.

Applet 14.46 (Nicht-Orientierbarkeit des Möbiusbandes).

LEMMA 14.47. — *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter glatt berandeter Bereich. Dann ist der Rand $S = \partial B$ orientierbar, und es gibt ein eindeutiges stetiges normiertes Normalenfeld $n : S \to \mathbb{R}^3$ so, dass $p + \varepsilon n(p) \notin B$ für alle $p \in S$ und alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ gilt.*

Beweis. Sei $Q = p + (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ ein offener Quader mit Zentrum $p \in \partial B$, genügend klein, so dass $B \cap Q$ der geeignet rotiert der Bereich unter dem Graphen einer glatten Funktion $f : (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \to (a_3, b_3)$ ist. Es gilt also

$$Q \cap B = \{(x, y, z) \in Q \mid g(x, y, z) < 0\}$$

mit $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. In diesem Fall definieren wir $U_p = \{(x, y, z) \in Q \mid z = f(x, y)\}$ und $V_p = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ und die Kartenabbildung

$$\varphi_p : U_p \to V_p, \qquad \varphi_p(x, y, z) = (x, y).$$

Die zu φ_p inverse Parametrisierung ist

$$\psi_p : V_p \to U_p, \qquad \psi_p(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Für jedes $(x_0, y_0, z_0) \in U_i$ steht der auf Länge 1 normierte Vektor

$$n_p(x_0, y_0, z_0) = \frac{\operatorname{grad}(g)(x_0, y_0, z_0)}{\|\operatorname{grad}(g)(x_0, y_0, z_0)\|} = \frac{(-\partial_x f(x_0, y_0), -\partial_y f(x_0, y_0), 1)}{\sqrt{\partial_x f(x_0, y_0)^2 + \partial_y f(x_0, y_0)^2 + 1}}$$

senkrecht auf S, und es gilt

$$g(x_0, y_0, f(x_0, y_0) + \varepsilon n_p(x_0, y_0)) > 0, \qquad g(x_0, y_0, f(x_0, y_0) + \varepsilon n_p(x_0, y_0)) < 0 \tag{14.10}$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Das so definierte Normalenfeld n_p auf U_p ist stetig. Wir definieren das Normalenfeld n auf S indem wir $n(x_0, y_0, z_0) = n_p(x_0, y_0, z_0)$ für einen beliebigen Punkt p mit $(x_0, y_0, z_0) \in U_p$ definieren. Dies ist wohldefiniert, das heisst, unabhängig von der Wahl von p. Gilt nämlich $(x_0, y_0, z_0) \in U_p$ und $(x_0, y_0, z_0) \in U_q$ so ist

$$n_p(x_0, y_0, z_0) = n_q(x_0, y_0, z_0)$$

der eindeutig durch die Normierung und (14.10) charakterisierte Normalenvektor. □

14.2.2 Oberflächenintegrale

14.48. — Wir benutzen folgende Konstruktion aus der linearen Algebra: Für Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$ schreiben wir $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ für die Linearform

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad w \mapsto \det(w, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}).$$

Nach der Cramer'schen Regel bildet diese Linearform den Basisvektor e_i auf $(-1)^{i+1}$-mal die Determinante der Matrix ab, die man erhält in dem man die i-te Zeile aus der Matrix $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ löscht. Im Fall $n = 3$ entspricht die Linearform $v_1 \wedge v_2$ dem Vektorprodukt oder Kreuzprodukt sobald man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit seinem Dualraum identifiziert, was wir im Folgenden systematisch tun. Ist A eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix und $VA = (v_1', \dots, v_{n-1}')$, so gilt

$$v_1' \wedge v_2' \wedge \cdots \wedge v_{n-1}' = \det(A) \cdot v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}. \tag{14.11}$$

14.49. — Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, und $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein endlicher Atlas von S mit Parametrisierungen $\psi_i : V_i \to U_i \subseteq S$, und seien $(\eta_i : S \to [0,1])_{i \in I}$ stetige Funktionen mit

$$\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i \in I} \eta_i = 1,$$

also eine stetige Zerlegung der Eins auf S. Schreibe $f_i = \eta_i f$. Wir definieren das **skalare Oberflächenintegral** von f auf S als

$$\int_S f dA = \sum_{i \in I} \int_{V_i} (f_i \circ \psi_i) \|\partial_1 \psi_i \wedge \partial_1 \psi_i\| dx$$

falls die zweidimensionalen Riemann-Integrale rechterhand existieren. Der **Flächeninhalt von** F ist durch

$$\operatorname{vol}(S) = \int_S dA = \sum_{i \in I} \int_{V_i} \|\partial_1 \psi_i \wedge \partial_1 \psi_i\| dx$$

definiert.

Beispiel 14.50. — Die Menge $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ ist eine Fläche. Wir können sie mit Hilfe einer einzigen Karte parametrisieren, nämlich ist S das Bild der glatten Abbildung $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$V = (0,2)^2, \qquad \psi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Es gilt $\partial_x \psi(x, y) = (1, 0, 2x)$ und $\partial_y \psi(x, y) = (0, 1, 2y)$, also

$$\partial_x \psi(x, y) \wedge \partial_y \psi(x, y) = \left(\det \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{smallmatrix}\right), -\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{smallmatrix}\right), \det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = (-2x, -2y, 1)$$

Das Oberflächenintegral einer Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ ist demnach konkret durch das zweidimensionale Riemann-integral

$$\int_S f dA = \int_V f \circ \psi \|\partial_x \psi \wedge \partial_y \psi\| dxdy = \int_0^2 \int_0^2 f(x, y, x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

gegeben.

Übung 14.51. — Zeigen Sie, dass das skalare Oberflächenintegral nicht von der Wahl eines Atlas und Zerlegung der Eins abhängt. Orientieren Sie sich dabei an 14.54.

Übung 14.52. — Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sphäre $\mathbb{S}^2$.

Definition 14.53. — Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche, und sei $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein endlicher orientierter Atlas von S mit Parametrisierungen $\psi_i = \varphi_i^{-1}$, und sei $(\eta_i)_{i \in I}$ eine stetige Zerlegung der Eins auf S mit $\mathrm{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge die S enthält, und sei F ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann definieren wir das **Flussintegral** von F über S durch

$$\int_S F dn = \sum_{i \in I} \int_{V_i} \langle \eta_i F \circ \psi_i, \partial_1 \psi_i \wedge \partial_2 \psi_i \rangle \, dx$$

14.54. — Schreibt man ψ_i und F in Spaltenform, so kann das Skalarprodukt in der Definition des Flussintegrals auch als Determinante

$$\langle F \circ \psi_i, \partial_1 \psi_i \wedge \partial_2 \psi_i \rangle = \det(F \circ \psi_i, \partial_1 \psi_i, \partial_2 \psi_i)$$

ausgedrückt werden. Das Flussintegral über eine orientierbare, zusammenhängende Fläche hängt, abgesehen vom Vorzeichen, nicht vom gewählten orientierten Atlas und Zerlegung der Eins ab. Für den Rand $S = \partial B$ eines kompakten glatt berandeten Bereiches können wir einen orientierten Atlas so wählen, dass $\partial_1 \psi_i \wedge \partial_2 \psi_i$ für jedes i eine Aussennormale an B ist. Dadurch ist dann auch das Vorzeichen des Flussintegrals festgelegt. Die Unabhängigkeit des Flussintegrals von Atlas und Zerlegung der Eins können wir wie folgt nachprüfen. Zunächst bemerken wir, dass für einen fixen orientierten Atlas $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ und eine fixe Zerlegung der Eins $(\eta_i)_{i \in I}$, die Abbildung

$$\{\text{stetige Vektorfelder auf } U\} \to \mathbb{R}, \qquad F \mapsto \int_S F dn$$

linear ist. Ist $(\kappa_i)_{i \in I}$ eine weitere stetige Zerlegung der Eins auf S, so gilt

$$F = \sum_{i \in I} \kappa_i F = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \kappa_i \eta_j F$$

woraus folgt, dass das Flussintegral $\int_S F dn$ zumindest unabhängig von der gewählten Zerlegung des Eins ist. Ist $(\lambda_j : W_j \to X_j)_{j \in J}$ ein weiterer endlicher Atlas so können wir auch

Karten

$$\varphi : U \xrightarrow{\varphi_i} V = \varphi(U) \qquad \text{und} \qquad \lambda : U \xrightarrow{\lambda_j} X = \lambda(U)$$

betrachten, für Zusammenhangskomponenten $U \subseteq V_i \cap W_j$. Damit sind $\psi = \varphi^{-1}$ und $\mu = \lambda^{-1}$ zwei Parametrisierungen des offenen, zusammenhängenden Kartenbereichs $U \subseteq S$. In dem wir wiederum die Linearität des Flussintegrals ausnutzen genügt es zu zeigen, dass für ein noch zu bestimmendes Vorzeichen die Gleichheit

$$\int_V \langle \eta F(\psi(x)), \partial_1\psi(x) \wedge \partial_2\psi(x)\rangle \, dx = \pm \int_X \langle \eta F(\mu(x)), \partial_1\mu(x) \wedge \partial_2\mu(x)\rangle \, dx$$

gilt, für ein stetiges $\eta : U \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}\eta \subseteq U$. Dazu können wir die Substitutionsformel für den Diffeomorphismus $\alpha = \lambda \circ \varphi^{-1} = \mu^{-1} \circ \psi$ von V nach X benutzen. Es gilt nach Satz 13.55

$$\int_X \langle \eta F(\mu(x)), \partial_1\mu(x) \wedge \partial_2\mu(x)\rangle \, dx = \int_V \langle \eta F(\psi(x)), \partial_1\mu(\alpha(x)) \wedge \partial_2\mu(\alpha(x))\rangle \, |\det D\alpha(x)| dx.$$

Aus der Kettenregel, angewandt auf $\psi = \mu \circ \alpha$ erhalten wir $D\psi(x) = D\mu(\alpha(x))D\alpha(x)$, oder äquivalent dazu, $D\psi(x)D\alpha(x)^{-1} = D\mu(\alpha(x))$. Aus der Gleichung (14.11) folgt damit

$$\det(D\alpha(x))^{-1}\partial_1\psi(x) \wedge \partial_1\psi(x) = \partial_1\mu(\alpha(x)) \wedge \partial_2\mu(\alpha(x))$$

und also

$$\int_X \langle \eta F(\mu(x)), \partial_1\mu(x) \wedge \partial_2\mu(x)\rangle \, dx = \operatorname{sgn}(\det D\alpha) \int_V \langle \eta F(\psi(x)), \partial_1\psi(x) \wedge \partial_2\psi(x)\rangle \, dx.$$

was zu zeigen war. Wir merken an, dass U, und also auch V nach Voraussetzung zusammenhängend sind, und also hat $\det D\alpha(x) \neq 0$ auf ganz V das selbe Vorzeichen. Da wir von orientierten Atlanten und einer zusammenhängenden Fläche ausgegangen sind, ist dieses Vorzeichen für alle Karten $U \subseteq U_i \cap W_j$ das selbe.

Beispiel 14.55. — Wir betrachten die Fläche S und deren Parametrisierung ψ aus Beispiel 14.50, und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = (z, x^2, y)$. Das Flussintegral von F durch S ist

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^2 \langle F \circ \psi, \partial_1\psi \wedge \partial_2\psi\rangle \, dxdy &= \int_0^2 \int_0^2 \big\langle F(x,y,x^2+y^2), (-2x,-2y,1)\big\rangle \, dxdy \\ = \int_0^2 \int_0^2 \big\langle (x^2+y^2, x^2, y), (-2x,-2y,1)\big\rangle \, dxdy &= \int_0^2 \int_0^2 -2x^3 - 2xy^2 - 2x^2y + y \, dxdy\end{aligned}$$

welches wir in diesem Fall einfach berechnen können.

14.3 Der Divergenzsatz im dreidimensionalen Raum

14.3.1 Der Divergenzsatz für Bereiche unter Graphen

14.56. — Wir werden im Folgenden Flussintegrale über Oberflächen solider Bereiche $B \subseteq \mathbb{R}^3$ betrachten, die nicht unbedingt glatt berandet sind, deren Oberfläche ∂B jedoch als endliche Vereinigung von glatten Flächen, glatten Kurven und Punkten geschrieben werden kann. Ein Quader ist ein typisches Beispiel dafür. In so einer Situation definieren wir Integrale über ∂B als Summe der Integrale über die glatten Flächen in ∂B, entsprechend orientiert.

Proposition 14.57. — *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck, $z_0 \in \mathbb{R}$ und $\varphi : Q \to [z_0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass der abgeschlossene Bereich unter dem Graphen von φ*

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q,\ z_0 \leq z \leq \varphi(x, y)\}$$

in U liegt. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial B} F dn.$$

Beweis. Der Rand ∂B von B hat 6 Seiten: „links“ ($x = a$), „rechts“ ($x = b$), „vorne“ ($y = c$), „hinten“ ($y = d$), „unten“ ($z = z_0$) und „oben“. Der obere Teil des Randes ist durch $(x, y) \in Q$ parametrisiert, da er durch $\{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in Q\}$ gegeben ist. Der Normalenvektor an dem durch $(x, y) \in Q$ gegebenen Punkt ist somit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x \varphi(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y \varphi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x \varphi(x, y) \\ -\partial_y \varphi(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten den Spezialfall, in dem das Vektorfeld F von der Form $F = \left(\begin{smallmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{smallmatrix}\right)$ ist. In dem Fall verschwinden die Integrale „vorne“ und „hinten“ und jedes der verbleibenden vier Integrale enthält die Integration über $[c, d]$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} F dn = \int_c^d \Bigg(\int_a^b \left\langle \left(\begin{smallmatrix} F_1(x,y,\varphi(x,y)) \\ 0 \\ F_3(x,y,\varphi(x,y)) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\partial_x \varphi(x,y) \\ -\partial_y \varphi(x,y) \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle - \left\langle \left(\begin{smallmatrix} F_1(x,y,z_0) \\ 0 \\ F_3(x,y,z_0) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle dx \\ + \int_{z_0}^{\varphi(b,y)} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} F_1(b,y,z) \\ 0 \\ F_3(b,y,z) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle dz - \int_{z_0}^{\varphi(a,y)} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} F_1(a,y,z) \\ 0 \\ F_3(a,y,z) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle dz \Bigg) dy \end{aligned}$$

nach Definition des Flussintegrals über ∂B und dem Satz von Fubini 13.45. Wir löschen nun aus allen Vektoren die zweite Koordinate, da diese keinen Beitrag zu den Skalarprodukten Summe liefern, und interpretieren die inneren eindimensionalen Integrale als das Flussintegral

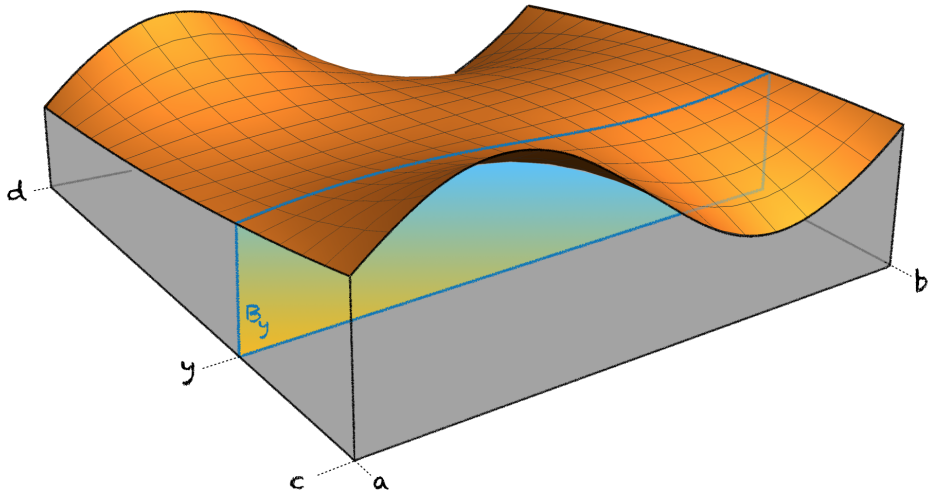
über den Rand von

$$B_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } z_0 \leq z \leq \varphi(x,y)\}$$

des Vektorfeldes $F_y : (x,z) \mapsto F(x,y,z)$. Also erhalten wir

$$\int_{\partial B} F dn = \int_c^d \left(\int_{\partial B_y} F_y dn \right) dy = \int_c^d \int_{B_y} (\partial_1 F_1 + \partial_3 F_3) dx dz dy = \int_B \operatorname{div} F dx dy dz$$

auf Grund des zweidimensionalen Divergenzsatzes 14.7 für Bereiche unter Graphen, und dem Satz von Fubini.



Dies zeigt die Proposition für Vektorfelder F mit $F_2 = 0$. Falls F ein Vektorfeld mit $F_1 = 0$ ist, so folgt die Aussage der Proposition analog, in dem man die Rollen der Komponenten vertauscht. Ein allgemeines Vektorfeld F können wir als Summe

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, und die Proposition ergibt sich mit Linearität der Integrale. □

14.3.2 Der Divergenzsatz auf glatt berandeten Bereichen

Satz 14.58 (Satz von Gauss). — *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Umgebung von B. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial B} F dn.$$

Beweis. Für jeden Punkt $x \in B$ existiert ein offener Quader $Q_x \subseteq U$ mit $x \in Q_x^\circ$, so, dass $B \cap Q_x$ geeignet rotiert das Gebiet unter dem Graphen einer glatten Funktion ist. Da B kompakt ist, überdecken endlich viele der offenen Mengen Q_x° den Bereich B. Es existieren als

endlich viele Quader $Q_1, \ldots, Q_N$ in U deren Inneres B überdeckt, und so dass $B \cap Q_i$ geeignet rotiert das Gebiet unter dem Graphen einer glatten Funktion ist. Sei $\eta_1, \ldots, \eta_N$ eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich dieser Überdeckung. Das skalierte Vektorfeld $\eta_i F$ ist identisch Null ausserhalb des Quaders Q_i, und es gilt daher

$$\int_B \operatorname{div}(\eta_i F) dx = \int_{B \cap Q_i} \operatorname{div}(\eta_i F) dx = \int_{\partial(B \cap Q_i)} \eta_i F dn = \int_{\partial B} \eta_i F dn$$

nach Proposition 14.57. Aus der Linearität von Divergenz und Integration folgt

$$\int_B \operatorname{div}(F) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_B \operatorname{div}(\eta_i F) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B} \eta_i F dn = \int_{\partial B} F dn$$

was zu zeigen war. □

14.59. — Der Divergenzsatz funktioniert ebenso für $\mathbb{R}^n$ und $n \geq 4$. Doch erfordert dieser eine Definition des Flussintegrals über den Rand eines n-dimensionalen glatt berandeten Bereichs. Hierzu ist der Begriff der Differentialformen nützlich, worauf wir später noch einmal kurz zu sprechen kommen werden.

14.4 Der Satz von Stokes im dreidimensionalen Raum

Der Satz von Stokes für glatt berandete orientierbare Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Green 14.26 für glatt berandete Bereiche in $\mathbb{R}^2$.

14.4.1 Glatt berandete Flächen

14.60. — Eine glatt berandete Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Teilmenge einer zweidimensionalen Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$, so, dass der relative Rand von S in M eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist. Man beachte, dass im allgemeinen S nicht eine Teilmannigfaltigkeit ist, sondern nur das relative Innere von S in M. Solch eine glatt berandete Fläche S kann durch einen Atlas mit Karten

$$U_i \subseteq S \qquad \varphi_i : U_i \to V_i \subseteq H$$

beschrieben werden, wobei $H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ die obere Halbebene bezeichnet, oder alternativ sonst einen glatt berandeten Bereich in der Ebene. Obwohl dies nicht notwendig ist, wollen wir hier zur Vereinfachung der Diskussion und vor allem der Notation davon ausgehen, dass wir nur eine Karte benötigen um die Fläche S zu parametrisieren. Genauer wollen wir annehmen, dass es einen glatt berandeten Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, eine offene Umgebung U von B und eine glatte, injektive Abbildung $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ mit vollem Rang, so dass $S = \psi(B)$ gilt.

14.61. — Eine wichtige Familie glatt berandeter Flächen sind Graphen glatter Funktionen. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so ist für jeden Glatt berandeten Bereich $B \subseteq U$ der Graph

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B \text{ und } z = f(x, y)\}$$

eine glatt berandete Fläche. Die Projektion von S auf B ist eine Karte für ganz S. Lokal kann jede glatt berandete Fläche als Graph beschrieben werden.

14.4.2 Der Satz von Stokes

Definition 14.62. — Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Die **Wirbelstärke** oder **Rotation** von F ist das durch

$$\operatorname{rot}(F(x)) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

definierte Vektorfeld auf U.

Satz 14.63 (Stokes). — *Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Sei $S \subseteq U$ eine glatt berandete, kompakte und orientierbare Fläche. Dann*

gilt

$$\int_S \operatorname{rot}(F) dn = \int_{\partial S} F dt.$$

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die glatt berandete Fläche S durch eine einzige Karte $\psi : B \to S$ parametrisiert werden kann, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich mit einer offenen Umgebung V ist, und $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche $M \subseteq U$ ohne Rand parametrisiert. Genau wie in den Beweisen der Divergenzsätze verwendet der Beweis im allgemeinen Fall dann eine Zerlegung der Eins. Wir definieren das zurückgezogene Vektorfeld $G = \psi^* F$ auf V durch

$$G(x) = \begin{pmatrix} \langle F \circ \psi(x), \partial_1 \psi(x) \rangle \\ \langle F \circ \psi(x), \partial_2 \psi(x) \rangle \end{pmatrix}$$

für $x \in V$. Um den Satz von Green 14.26 anzuwenden, müssen wir die Rotation von G auf V mittels der Rotation von F ausdrücken. Wir behaupten, dass

$$\operatorname{rot}(G) = \langle \operatorname{rot}(F) \circ \psi, \partial_1 \psi \wedge \partial_2 \psi \rangle$$

gilt. Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(G) &= \partial_1 G_2 - \partial_2 G_1 \\
&= \partial_1 \langle F \circ \psi, \partial_2 \psi \rangle - \partial_2 \langle F \circ \psi, \partial_1 \psi \rangle \\
&= \langle (DF \circ \psi) \partial_1 \psi, \partial_2 \psi \rangle + \langle F \circ \psi, \partial_1 \partial_2 \psi \rangle - \langle (DF \circ \psi) \partial_2 \psi, \partial_1 \psi \rangle - \langle F \circ \psi, \partial_1 \partial_2 \psi \rangle \\
&= \langle (DF \circ \psi) \partial_1 \psi, \partial_2 \psi \rangle - \langle (DF \circ \psi) \partial_2 \psi, \partial_1 \psi \rangle .
\end{aligned}$$

Wir schreiben die Rotation von F in der Form

$$\operatorname{rot}(F) = \sum_{\sigma \in A_3} \big(\partial_{\sigma(2)} F_{\sigma(3)} - \partial_{\sigma(3)} F_{\sigma(2)} \big) e_{\sigma(1)}$$

wobei $A_3 \subset S_3$ die Gruppe der zyklischen Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ bezeichnet. Damit gilt nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(G) &= \sum_{j,k=1}^{3} \underbrace{(\partial_j F_k) \circ \psi}_{=a_{jk}} \big(\underbrace{\partial_1 \psi_j}_{=u_j} \underbrace{\partial_2 \psi_k}_{=v_k} - \underbrace{\partial_2 \psi_j}_{=v_j} \underbrace{\partial_1 \psi_k}_{=u_k} \big) \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} a_{jk} \underbrace{(u_j v_k - v_j u_k)}_{=0 \text{ falls } j=k} \\
&= \sum_{\sigma \in A_3} \Big(a_{\sigma(2)\sigma(3)} \big(u_{\sigma(2)} v_{\sigma(3)} - u_{\sigma(3)} v_{\sigma(2)} \big) + a_{\sigma(3)\sigma(2)} \big(u_{\sigma(3)} v_{\sigma(2)} - u_{\sigma(2)} v_{\sigma(3)} \big) \Big) \\
&= \sum_{\sigma \in A_3} \big(a_{\sigma(2)\sigma(3)} - a_{\sigma(3)\sigma(2)} \big) \big(u_{\sigma(2)} v_{\sigma(3)} - u_{\sigma(3)} v_{\sigma(2)} \big) \\
&= \langle \operatorname{rot}(F) \circ \psi, \partial_1 \psi \wedge \partial_2 \psi \rangle
\end{aligned}$$

wie behauptet. Sei γ eine Parametrisierung des Randes von B. Aus dem Satz von Green 14.26, der Kettenregel für die Ableitung von $\psi \circ \gamma$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot}(F) dn &= \int_B \langle \operatorname{rot}(F) \circ \psi, \partial_1 \psi \wedge \partial_2 \psi \rangle \, dx = \int_B \operatorname{rot}(G) dx \\
&= \int_{\partial B} G dt = \int_\gamma \big\langle G \circ \gamma, \gamma' \big\rangle \, dt \\
&= \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} \langle F \circ \psi \circ \gamma, \partial_1 \psi \circ \gamma \rangle \\ \langle F \circ \psi \circ \gamma, \partial_2 \psi \circ \gamma \rangle \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_\gamma \sum_{j=1}^{3} (F_j \circ \psi \circ \gamma) \Big(\big(\partial_1 \psi_j \circ \gamma\big) \gamma_1' + \big(\partial_2 \psi_j \circ \gamma\big) \gamma_2' \Big) dt \\
&= \int_\gamma \big\langle F \circ \psi \circ \gamma, (\psi \circ \gamma)' \big\rangle \, dt = \int_{\partial S} F dt,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 14.64. — Sei γ die Verkettung der vier Pfade $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

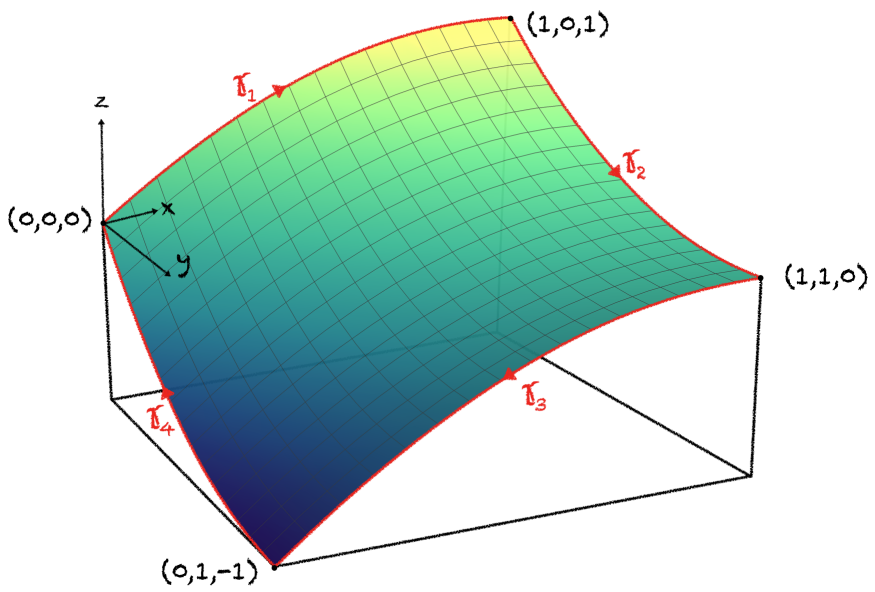
$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, 0, t^2), \\
\gamma_2(t) &= (1, t, 1 - t^2), \\
\gamma_3(t) &= (1 - t, 1, (1-t)^2 - 1), \\
\gamma_4(t) &= (0, 1 - t, -(1-t)^2)).
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Komponenten von γ beschreiben eine Parametrisierung des Einheitsquadrates $[0,1]^2$ und die dritte Komponente über einem Punkt (x, y) befindet auf der Höhe $z = x^2 - y^2$. Damit parametrisiert γ den Rand der Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y \leq 1, \ z = x^2 - y^2\}$$

die wir als Graphen der Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 - y^2$ verstehen können. Wir können S mit einer einzelnen Karte $\psi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $\psi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ parametrisieren. Man berechnet auf Vorrat:

$$\partial_x \psi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \partial_y \psi(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}, \quad \partial_x \psi \wedge \partial_y \psi = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Wir betrachten das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz + \cos(x) \\ xz + \sin(y) \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Man kann das Wegintegral $\int_\gamma F dt$ direkt aus der Definition berechnen, wozu man dieses also als Summe von vier Wegintegralen schreibt. Letztere sind in diesem Fall aber relativ kompliziert zu berechnen. Die Rotation des Vektorfelds F ist jedoch von einer einfachen Form. In der Tat gilt

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Nach dem Satz von Stokes 14.63 gilt somit

$$\int_\gamma F dt = \int_S \operatorname{rot}(F) dn = \int_0^1 \int_0^1 \langle \operatorname{rot}(F), \partial_x \psi \wedge \partial_y \psi \rangle \, dx dy$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 (-2x^2 - 2y^2) dx dy = -\tfrac{4}{3}.$$

Übung 14.65. — Berechnen Sie mittels dem Satz von Stokes das Wegintegral $\int_\gamma F dt$, wobei das Vektorfeld F aif $\mathbb{R}^3$ und der Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz\cos(x^2) \\ z \\ \sin(x^2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ (t)^2 - (t^2)^2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Als Hinweis bemerken wir, dass γ Werte in der Fläche $z = x^2 - y^2$ annimmt.

Übung 14.66. — Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und F ein ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie dass $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$$

gilt.

Übung 14.67. — Seien das glatte Vektorfeld $F(x, y, z) = (yz, x^2, 1)$ auf $\mathbb{R}^3$ und die Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$$

gegeben. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S \operatorname{rot} F dn$ direkt, und mit mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Übung 14.68. — Bestimmen Sie reelle Parameter α, β, γ, sodass das Vektorfeld

$$(x, y, z) = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

auf $\mathbb{R}^3$ rotationsfrei wird, das helisst $\operatorname{rot}(F) = 0$ gilt. Bestimmen Sie nach Wahl dieser Parameter ein Potential von F.

Übung 14.69. — Sei $0 < h < 1$ und sei S jener Teil der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, welcher $z > -h$ erfüllt. Sei $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_S \operatorname{rot}(F) dn$ nach aussen einmal direkt, einmal mit dem Satz von Stokes, und einmal mit dem Satz von Gauss.

Übung 14.70. — Betrachten Sie auf $U = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2(xz + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(yz - x)}{x^2 + y^2}, \log\left(x^2 + y^2\right) \right)$$

und die Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to U$ gegeben durch

$$\gamma_1(t)(\cos(t), \sin(t), 0), \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 2)$$

Berechnen Sie die Differenz $\int_{\gamma_1} F dt - \int_{\gamma_2} F dt$ mit Hilfe des Satzes von Stokes. Ist F konservativ?

Übung 14.71. — Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y) = e^{\frac{1}{2}(y^2 - x^2)}(\cos(xy), \sin(xy))$. Sei für eine Wahl von reellen Parametern a und $b > 0$ die Kurve $\gamma_{a,b} : [-b, b] \to IR^2$ durch $\gamma_{a,b}(t) = (t, a)$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_{a,b}} F dt = \int_{\gamma_{0,b}} F dt + o(1) \qquad \text{für } b \to \infty.$$

Übung 14.72. — Der **Laplace-Operator** auf $\mathbb{R}^3$ ist

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \qquad \Delta f(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x)$$

gegeben, oder alternativ durch $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$. Beweisen Sie die die Identität

$$\operatorname{rot}(\varphi f) = (\operatorname{grad} \varphi) \wedge F$$

für stetig differenzierbare Vektorfeldeq $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und C^2-Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Übung 14.73. — Sei $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren das Vektorfeld $F_A := A \circ F \circ A^{-1}$. Beweisen Sie dass $\operatorname{div}(F_A) = \operatorname{div}(F) \circ A^{-1}$ gilt, und beweisen Sie, dass

$$\operatorname{rot}(F_A) = \operatorname{rot}(F) \circ A^{-1}$$

gilt, falls $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Übung 14.74. — In dieser Übung möchten wir zeigen, dass einer Lösung u der Wellengleichung eine natürliche Energie $E(t)$ zugewiesen werden kann, welche dann in der Zeit konstant ist. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein glatt berandeter Bereich. Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion definiert auf einer offenen Umgebung U von B. Zeigen Sie die **Green'sche Formel**

$$\int_B \langle \operatorname{grad} f, \nabla g \rangle \, dx = \int_{\partial B} g \, (\operatorname{grad} f) dn - \int_B g \, (\Delta f) dx$$

Wir betrachten nun eine zweimal differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$, womit also u eine Funktion in drei „Ortsvariablen“ $p = (x, y, z)$ und einer „Zeitvariable“ t ist. Wir schreiben

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u$$

für den Laplace Operator angewandt auf u bezüglich den Ortsvariablen. Angenommen u genügt der Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,p) = \Delta u(t,p) & \text{für alle } (t,p) \in \mathbb{R} \times B \\ u(t,p) = 0 & \text{für alle } (t,p) \in \mathbb{R} \times \partial B \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Green'schen Formel, dass die Energiefunktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch

$$E(t) = \int_B \Big((\partial_t u(t,p))^2 + (\partial_x u(t,p))^2 + (\partial_y u(t,p))^2 + (\partial_z u(t,p))^2 \Big) dxdydz$$

für $t \in \mathbb{R}$ konstant ist.

Übung 14.75. — Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir definieren die Funktion $f_A := f \circ A^{-1}$. Beweisen Sie dass

$$(\Delta f_A)(x) = (\Delta f)(A^{-1}x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Matrizen A gilt. Bestimmen Sie anschliessend die Untergruppe $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

$$H = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \Delta f_A = (\Delta f) \circ A^{-1} \text{ für alle } f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Übung 14.76. — Erklären Sie soweit Sie können den Zusammenhang zwischen den Integrationssätzen dieses Kapitels und Satz 11.61 über Konservativität von Vektorfeldern auf einfach zusammenängenden Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für $n = 2, 3$.

14.5 *Differenzialformen und de Rham Kohomologie

Wir geben in diesem Abschnitt einen Ausblick auf die allgemeine Theorie glatter Differenzialformen auf Mannigfaltigkeiten, und erklären informell den allgemeinen Satz von Stokes. Als weiterführende Literatur zu diesem Thema empfehlen wir

1. Ib Madsen, Jørgen Tornehave *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes* Cambridge University Press; 1997

2. Raoul Bott, Loring W. Tu *Differential Forms in Algebraic Topology* Graduate Texts in Mathematics **82** Springer 1982

3. Joseph J. Rotman *An introduction to Algebraic Topology* Graduate Texts in Mathematics **119** Springer 1988

Kapitel 15

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen spielen eine zentrale Rolle in Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft. In der Mathematik ist das Studium von Differenzialgleichungen ein eigenes, sehr weitläufiges Fachgebiet. Teile davon sind etwa das numerische Lösen von Differentialgleichungen, geometrische Theorie von Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, oder das Studium spezieller Klassen nichtlinearer Gleichungen. Wir werden in diesem Kapitel einige elementare Begriffe und Fragestellungen von Differentialgleichungen wie in Abschnitt 8.4 zu gekoppelten Differentialgleichungssystemen erweitern, und die Existenz und Eindeutigkeit für entsprechende Anfangswertprobleme unter sehr schwachen und natürlichen Annahmen beweisen. Dazu verwenden wir mittels einer geeigneten Umformulierung des Anfangswertproblems nochmals den Banach'schen Fixpunktsatz.

15.1 Differentialgleichungsysteme

15.1.1 Lineare Differentialgleichungen

Wir fixieren ein offenes, nichtleeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Wir schreiben $C^\infty(I)$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller glatten Funktionen $I \to \mathbb{C}$. Die nachfolgenden Betrachtungen sind auch sinnvoll für reellwertige Funktionen, und unter offensichtlichen Einschränkungen auch für Funktionen der Klasse C^d.

15.1. — Wir schreiben $D : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ für die Ableitung $Df = f'$, aufgefasst als $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus des Vektorraums $C^\infty(I)$. Ein linearer **Differentialoperator** der Ordnung $d \geq 0$ ist eine lineare Abbildung

$$L : C^\infty(I) \to C^\infty(I), \qquad \sum_{i=0}^{d} L = a_i D^i \tag{15.1}$$

die sich als Linearkombination von $D^0 = \mathrm{id}, D^1 = D, D^2 = D \circ D, \ldots$ mit Koeffizienten $a_i \in C^\infty(I)$ schreibt. Als lineare, gewöhnliche **Differentialgleichung** der Ordnung d bezeichnen wir die Gleichung $Lu = g$ für einen vorgegebenen Differentialoperator L und eine

vorgegebene **Störfunktion** $g \in C^\infty(I)$. Als **Anfangswertproblem** bezeichnet man das lineare Gleichungssystem bestehend aus dieser Differentialgleichung und d Gleichungen

$$Lu = g \tag{15.2}$$

$$u(x_0) = w_0, \quad Du(x_0) = w_1, \quad \ldots, \quad D^{d-1}u(x_0) = w_{d-1} \tag{15.3}$$

für vorgegebene **Anfangswerte** $w_0, w_1, \ldots, w_{d-1} \in \mathbb{R}$.

15.2. — Zu jedem Anfangswertproblem gegeben durch (15.2) und (15.3) können wir das zugehörige homogene Anfangswertproblem gegeben durch

$$Lu = 0 \tag{15.4}$$

$$u(x_0) = 0, \quad Du(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad D^{d-1}u(x_0) = 0 \tag{15.5}$$

betrachten. Wie für alle inhomogenen linearen Gleichungssysteme lassen sich Lösungen des inhomogenen Anfangswertproblems als Summe $u_0 + u$ einer fixen Lösung u_0 und den Lösungen u des homogenen Anfangswertproblems darstellen. Insbesondere bilden Lösungen homogener Differenzialgleichungen oder Anfangswertprobleme einen Vektorraum.

15.3. — Wir betrachten im Folgenden einen Differentialoperator L gegeben wie in (15.1) mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass Lösungen der homogenen Gleichung $Lu = 0$ durch sogenannte „Exponentialpolynome“ gegebene sind, und zeigen in Proposition 15.10 dass die Lösungen für einen linearen Differentialoperator der Ordnung d einen Vektorraum der Dimension $\geq d$ bilden.

15.4. — Um die Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ zu finden, setzen wir $u(x) = \exp(\alpha x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ wie in Beispiel 8.83. Damit gilt $D^i u = \alpha^i u$ und

$$Lu = \sum_{i=0}^{d} a_i D^i u = \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha^i u$$

Daher ist $u(x) = \exp(\alpha x)$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $Lu = 0$ wenn $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des sogenannten **charakteristischen Polynoms** des Operators L

$$p(T) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$$

ist. Ist α eine reelle Nullstelle von $p(T)$, dann ist durch $u(x) = \exp(\alpha x)$ eine reellwertige Lösung gegeben. Bei reellen Koeffizienten und einer komplexen Nullstelle $\alpha = \beta + \gamma i \in \mathbb{C}$ mit $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist $\overline{\alpha} = \beta - \gamma i$ ebenso eine Nullstelle von $p(T)$. Damit sind alle Linearkombinationen $s\exp(\alpha x) + t\exp(\overline{\alpha} x)$, und insbesondere

$$\frac{\exp(\alpha x) + \exp(\overline{\alpha} x)}{2} = \exp(\beta x)\cos(\gamma x), \quad \frac{\exp(\alpha x) - \exp(\overline{\alpha} x)}{2i} = \exp(\beta x)\sin(\gamma x)$$

Lösungen von $Lu = 0$. Man beachte, dass $\exp(\alpha x)$ und $\exp(\overline{\alpha} x)$ gleichen $\mathbb{C}$-Unterraum von Lösungen zu $Lu = 0$ aufspannen wie $\exp(\beta x)\cos(\gamma x)$ und $\exp(\beta x)\sin(\gamma x)$. Wir werden in der folgenden allgemeinen Diskussion diesen Wechsel von den Exponentialfunktionen zu Produkten von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen nicht mehr durchführen, ausser in konkreten Beispielen mit physikalischem Hintergrund, in denen wir an reellwertigen Lösungen interessiert sind. Hat $p(T)$ genau d verschiedene Nullstellen über $\mathbb{C}$, dann ergibt obige Diskussion d linear unabhängige Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$.

Übung 15.5. — Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall. Zeigen Sie, dass die komplexwertigen Funktionen $u_k \in C^\infty(I)$

$$u_k(x) = \exp(\alpha_k x)$$

für $k = 1, \ldots, d$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind.

Übung 15.6. — Seien $p, q \in \mathbb{C}[T]$. Zeigen Sie, dass $p(D)q(D) = (pq)(D)$ gilt. Folgern Sie daraus, dass die Auswertungsabbildung $p \mapsto p(D)$ ein injektiver Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[T] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(I))$$

ist. Funktioniert das auch für Polynome mit Koeffizienten $a_i \in C^\infty(I)$? Warum nicht?

15.7. — Wir betrachten nun den Fall, in dem das charakteristische Polynoms des Differentialoperators L eine mehrfache Nullstelle hat. Dazu untersuchen wir Linearkombinationen von Funktionen des Typs $f(x) = x^n \exp(\alpha x)$, wie wir sie im letzten Fall von Beispiel 8.87 gesehen hatten. Wir bezeichnen den $\mathbb{C}$-Vektorraum der von diesen Funktionen aufgespannt wird, also

$$\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I) = \left\langle x^n \exp(\alpha x) \middle| n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \right\rangle,$$

als Raum der **Exponentialpolynome**. Zusammen mit der üblichen Multiplikation bilden Exponentialpolynome eine $\mathbb{C}$-Algebra. Die Ableitung definiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$D : \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I) \to \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I), \qquad D(x^n e^{\alpha x}) = n x^{n-1} e^{\alpha x} + \alpha x^n e^{\alpha x} \tag{15.6}$$

die die Leibnitz-Regel $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ erfüllt. Allgemein nennt man eine kommutative Algebra R über einem Körper k, zusammen mit einer k-linearen Abbildung $D : R \to R$ die die Leibnitz Regel erfüllt, eine **Differentialalgebra**. Solche Objekte benutzt man, um algebraische Aspekte linearer Differentialgleichungen zu studieren. Dabei darf der Grundkörper k durchaus auch zum Beispiel ein endlicher Körper sein.

Proposition 15.8. — *Die Funktionen* $\{x \mapsto x^n \exp(\alpha x) \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ *bilden eine Basis des* $\mathbb{C}$*-Vektorraums* $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$.

Beweis. Diese Funktionen spannen den Raum $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ auf, nach Definition. Um Lineare unabhängigkeit zu prüfen nehmen indirekt an, dass es paarweise verschiedene $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ und von Null verschiedene Polynome $q_1(T), \ldots, q_N(T) \in \mathbb{C}[T]$ gibt, so dass

$$\sum_{k=1}^{N} q_k(x) \exp(\alpha_k x) = 0 \tag{15.7}$$

für alle $x \in I$ gilt. Unter allen solchen Relationen nehmen betrachten wir eine, für die $N \geq 1$ minimal ist. Falls $N = 1$ gilt, multiplizieren wir (15.7) mit $\exp(-\alpha_1 x)$ und erhalten die Gleichung $q_1(x) = 0$ für alle $x \in I$, die $q_1(T) \neq 0$ widerspricht. Sei also $N > 1$. Wir multiplizieren (15.7) mit $\exp(-\alpha_N)$ und erhalten

$$\sum_{k=1}^{N-1} q_k(x) \exp((\alpha_k - \alpha_N)x) + q_N(x) = 0$$

für alle $x \in I$. Wir wenden nun die Ableitung D genau $\deg(q_N) + 1$-mal an. Der Term $q_N(x)$ verschwindet, und entsprechend (15.6) wird $q_k(x) \exp((\alpha_k - \alpha_N)x)$ für zu einem Ausdruck der Form $p_k(x) \exp((\alpha_k - \alpha_N)x)$, wobei $p_k(T) \in \mathbb{C}[T]$ den gleichen Grad wie q_k hat. Somit gilt

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k(x) \exp((\alpha_k - \alpha_N)x) = 0$$

für alle $x \in I$, was der minimalen Wahl von N widerspricht. □

Übung 15.9. — Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$ Zeigen Sie, dass sich D auf den $N+1$ dimensionalen Unterraum von $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ mit Basis

$$\exp(\alpha x),\ x \exp(\alpha x),\ \frac{x^2}{2!} \exp(\alpha x),\ \frac{x^3}{3!} \exp(\alpha x), \ldots,] : \frac{x^N}{N!} \exp(\alpha x),$$

einschränkt, und berechnen Sie die Matrix zu D bezüglich dieser Basis. Verallgemeinern Sie dies für mehrere Exponenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Erklären Sie wieso hier die Jordan-Normalform von Matrizen auftaucht.

Proposition 15.10. — *Sei $p \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom von Grad $d \geq 1$, das mittels*

$$p(T) = a \prod_{j=1}^{k} (T - \alpha_j)^{d_j}$$

in d Linearfaktoren zerfällt, wobei wir annehmen, dass $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$ gilt. Sei $L = p(D)$ der Differentialoperator mit charakteristischem Polynom p. Dann hat die zugehörige homogene Differentialgleichung $Lu = 0$ die d linear unabhängigen Lösungen $u(x) = x^n \exp(\alpha_j x)$ für $0 \leq n < n_j$ und $1 \leq j \leq k$.

Beweis. Nach Annahme hat das Polynom p Grad $d = \sum_{j=1}^{k} d_j$, womit wir in der Tat d

Funktionen angegeben haben, die nach Proposition 15.8 linear unabhängig sind. Für ein festes j und $n \geq 0$ gilt

$$(D - \alpha_j)(x^n e^{\alpha_j x}) = nx^{n-1}e^{\alpha_j x} + \alpha_j x^n e^{\alpha_k x} - \alpha_j x^n e^{\alpha_j x} = nx^{n-1}e^{\alpha_j x}.$$

Für $0 \leq n < n_j$ folgt aus dieser Rechnung und Induktion $(D - \alpha_j I)^{n_j} x^n e^{\alpha_j x} = 0$. Weil nach Übung 15.6 die Auswertungsabbildung $p \mapsto p(D)$ ein Ringhomomorphismus ist, folgt

$$p(D)(x^n e^{\alpha_j x}) = \left(\prod_{i \neq j}(D - \alpha_i)^{n_i}\right)(D - \alpha_j I)^{n_j}(x^n e^{\alpha_j x}) = 0,$$

was zu beweisen war. □

Übung 15.11. — Beschreiben Sie einen reellen Vektorraum $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I) \subset \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ von reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, so dass alle reellwertigen Lösungen in $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in $\mathrm{PESC}_{\mathbb{R}}(I)$ enthalten sind.

15.12. — Wir wenden uns nun dem inhomogenen Problem zu. Für ein Polynom $p(T) \in \mathbb{C}[T]$ und eine Störfunktion $g \in \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ gibt es ein einfaches Verfahren, mit dem man eine Lösung u_0 der inhomogenen Differentialgleichung $p(D)u = g$ finden kann.

1. Falls $g(t) = q(t)e^{\alpha t}$ für ein Polynom q vom Grad n und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha) \neq 0$, dann definiert man $u_0(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, wobei $Q(T)$ ein Polynom vom Grad n mit noch zu bestimmenden Koeffizienten ist. Nun berechnet man $p(D)u_0$ und bestimmt Koeffizienten so dass $p(D)u_0 = g$ gilt.

2. Falls $g(x) = q(x)e^{\alpha x}$ für ein Polynom $q(T)$ vom Grad n und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha) = 0$, dann wiederholt man obiges Verfahren, allerdings mit dem Ansatz $u_0(t) = Q(t)t^m e^{\alpha t}$, wobei m die Vielfachheit der Nullstelle α von $p(T)$ angibt.

3. Ein allgemeines $g \in \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ lässt sich als Linearkombination von Ausdrücken wie oben darstellen. Auf Grund der Linearität von $p(D)$ kann man also obiges Verfahren für Summanden der Form $q(x)e^{\alpha x}$ in g anwenden und dann die resultierenden Lösungsfunktionen addieren.

Übung 15.13. — Illustrieren Sie obiges Verfahren an einem Beispiel, uns zeigen Sie, dass es stets zu einer Lösung führt.

Übung 15.14. — Sei $p \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom von Grad d und seien Anfangswerte $w_0, \ldots, w_{d-1}$ und eine Störfunktion $g \in \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $L = p(D)$ das Anfangswertproblem gegeben durch (15.2) und (15.3) in $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Übung 15.15. — Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom von Grad $d \in \mathbb{N}$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie, dass jede Lösung y der Differentialgleichung $p(D)y = g$ eine glatte Funktion ist.

Übung 15.16. — 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung auf $I = \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $u'' - 4u' + 4u = \sin(x)$.

2. Bestimmen Sie die Lösungen auf $I = \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$u'' - u = x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 3.$$

3. Finden Sie eine Lösung auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ des Anfangswertproblems

$$u' - \left(\tfrac{4}{x} + 1\right)u = x^4, \quad u(1) = 1.$$

Übung 15.17. — Lösen Sie folgende Differentialgleichungen. Sie können Spezialfälle ignorieren, die durch das Verschwinden von gewissen Ausdrücken im Lösungsverfahren entstehen.

1. $(x^2 - x)y' = y^2 + y$,
2. $y' + e^y = 1$,
3. $xy' = 1 - y^2$,
4. $y'x^2 = y^2 + yx + x^2$.

15.1.2 Allgemeine Differentialgleichungsysteme erster Ordnung

Wir verallgemeinern den Begriff der Differentialgleichung auf vektorwertige Funktionen in einer reellen Variablen oder äquivalenterweise auf Differentialgleichungssysteme mit mehreren Unbekannten Funktionen in einer Variablen.

15.18. — Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subset I \times \mathbb{R}^d$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(t) = F(t, u(t)) \tag{15.8}$$

für eine unbekannte Funktion u bezeichnen wir als **d-dimensionales Differentialgleichungssystem erster Ordnung**. Dabei ist der Definitionsbereich einer Lösung u möglicherweise nur ein Teilintervall von I. Damit (15.8) überhaupt Sinn ergibt muss $(t, u(t)) \in U$ für alle t im Definitionsbereich von u gelten. Zu $(t_0, x_0) \in U$ nennen wir die Gleichungen

$$u'(t) = F(t, u(t)), \qquad u(t_0) = x_0$$

ein **Anfangswertproblem** zum **Anfangswert** x_0 bei $t_0 \in I$. Die Differentialgleichung (15.8) heisst **autonom**, falls F konstant bezüglich der Variablen t ist. Wir interpretieren t oft als Zeit, x als Position, und F als zeitabhängiges **Vektorfeld**. Das Vektorfeld gibt bei $(t, x) \in U$ die Richtung und die Geschwindigkeit des gesuchten Weges $t \mapsto u(t)$ an.

15.19. — Wir besprechen nur Differentialgleichungssysteme erster Ordnung. Auf Grund der folgendenden Konstruktion ist dies keine echte Einschränkung. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Wir können die Differentialgleichung der Ordnung d

$$v^{(d)}(t) = f\big(t, v(t), v'(t), \dots, v^{(d-1)}(t)\big) \tag{15.9}$$

in ein d-dimensionales Differentialgleichungssystem erster Ordnung umwandeln, indem wir zu einer Funktion $u = (u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ das System

$$\begin{cases} u_0'(t) & = u_1(t) \\ u_1'(t) & = u_2(t) \\ \vdots & \\ u_{d-1}'(t) & = f(t, u_0(t), \dots, u_{d-1}(t)) \end{cases} \tag{15.10}$$

betrachten. Definieren wir $F(t, x_1, \dots, x_d) = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, f(t, x))$, so können wir das System zu $u'(t) = F(t, u(t))$ zusammenfassen. Via $v(t) = u_0(t)$ sind die Gleichungen (15.9) und (15.10) äquivalent. Die Funktion $F : U \to \mathbb{R}^d$ „erbt“ die meisten Eigenschaften von f. Ist beispielsweise f differenzierbar, so ist auch F differenzierbar und selbiges gilt unter anderem für Lipschitz-Stetigkeit, was im Satz 15.31 von Picard-Lindelöf wichtig ist. Selbiges Verfahren, leicht angepasst, liefert zu einer Differentialgleichung höherer Ordnung in vektorwertigen Funktionen ebenfalls ein äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Die gleiche Diskussion trifft auf die Übertragung von Anfangswerten zu.

15.20. — Wir betrachten als einfaches Beispiel den Fall eines linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. So ein Gleichungssystem ist durch

$$u' = Au$$

gegeben, wobei u für eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^d$ steht, und A eine vorgegebene $d \times d$-Matrix mit komplexen Koeffizienten ist. Um die Lösungen so eines Systems zu beschreiben benutzen wir die **matrizielle Exponentialabbildung**. Die matrizielle Exponentialabbildung $\exp : \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

definiert. Für kommutierende Matrizen A und B gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$, und für invertierbare matrizen S gilt $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(A)S^{-1}$. Um ein Matrixexponential $\exp(A)$ auszurechnen bringt man A in Jordan-Normalform, $A = S(D + N)S^{-1}$, wobei D diagonal und N nilpotent ist und mit D kommutiert. Das Exponential der Diagonalmatrix D mit Diagonalkoeffizienten d_{ii} ist diagonal mit Koeffizienten $\exp(d_{ii})$, und das Exponential der

nilpotenten Matrix N berechnet sich als endliche Summe. Schliesslich gilt

$$\exp(A) = S\exp(D)\exp(N)S^{-1},$$

da D und N kommutieren.

Proposition 15.21. — *Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem für differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$*

$$u' = Au, \qquad u(t_0) = x_0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $u(t) = \exp(A(t - t_0))x_0$.

Beweis. Wir beginnen damit, die Ableitung der Abbildung $t \mapsto \exp(At)$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\big(\exp(At)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(A(t+h)) - \exp(At)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(Ah) - \exp(0)}{h}\exp(At) = \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n h^{n-1}\exp(At) = A\exp(At).\end{aligned}$$

Für die Funktion $u(t) = \exp(A(t - t_0))x_0$ gilt damit $u(t_0) = x_0$ und

$$u'(t) = A\exp(A(t - t_0))x_0 = Au(t)$$

wie behauptet. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ eine beliebige Lösung $v : I \to \mathbb{C}^d$ des Anfangswertproblems gegeben ist. Wir betrachten die Funktion $t \mapsto \exp(-A(t - t_0))v(t)$ auf I und berechnen die Ableitung mit der Produktregel. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\big(\exp(-A(t-t_0))v(t)\big) &= -A\exp(-A(t-t_0))v(t) + \exp(-A(t-t_0))v'(t) \\ &= -A\exp(-A(t-t_0))v(t) + \exp(-A(t-t_0))Av(t) = 0\end{aligned}$$

da A und $\exp(-A(t - t_0))$ kommutieren. Also ist die Abbildung $t \mapsto \exp(-A(t - t_0))v(t)$ konstant und damit gleich ihrem Wert $v(t_0) = x_0$ bei t_0. Dies beweist dass, wie behauptet, $v(t) = \exp(A(t - t_0))x_0$ für alle $t \in I$ gilt. □

15.22. — Auf Grund der Konstruktion aus Abschnitt 15.19 gibt Proposition 15.21 auch eine Lösungsmethode für lineare Differentialgleichungen d-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Transformiert man so eine Differentialgleichung $Lv = 0$, etwa

$$v^{(d)} + a_{d-1}v^{(d-1)} + \ldots + a_0 v^{(0)} = 0$$

für $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$ zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung, so ergibt sich die Gleichung $u' = Au$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{d-2} & -a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist die Begleitmatrix des charakteristischen Polynoms der obigen Differentialgleichung. Das charakteristische Polynom der obigen Matrix A ist gerade das charakteristische Polynom $T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots + a_1 T + a_0$ des Differentialoperators L.

Übung 15.23. — Zeigen Sie, dass die in Proposition 15.10 angegebenen Lösungen eine Basis des Lösungsraums $\ker(L : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ der Differentialgleichung $Lu = 0$ bilden.

Übung 15.24. — Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ und seien $A : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ und $B : \mathbb{R} \to\in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{C})$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass auch $AB : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{m,k}(\mathbb{C})$ definiert durch $AB(t) = A(t)B(t)$ differenzierbar ist mit Ableitung $(AB)' = A'B + AB'$. Wo wurde dies in obigem Beweis verwendet?

15.1.3 Trennung der Variablen

Wir zeigen ein Rezept, das in in gewissen Fällen zu einem Lösungsansatz für nichtlineare Differentialgleichungen führen kann. Man bezeichnet die Methode als **Trennung der Variablen** oder **Variablenseparation**. Eine verwandte, und unter dem gleichen Namen bekannte Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen wollen wir hier nicht besprechen.

15.25. — Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$u'(t) = f(t)g((u(t))$$

für Funktionen f und g. Solch eine Differentialgleichung bezeichnet man als **separierbar**, da auf der rechten Seite ein Produkt von zwei Funktionen steht, von denen eine nur von der Variablen t, und die andere nur von der „Variablen“ $u = u(t)$ abhängt. Wir teilen durch $g(u(t))$ und integrieren:

$$\int \frac{u'(t)}{g(u(t))} dt = \int f(t)dt + C$$

Im Integral rechterhand können wir die Substitution $s = u(t)$ vornehmen. Ist also G eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und F eine Stammfunktion von f, so erhalten wir $G(u(t)) = F(t) + C$

für eine Integrationskonstante C. Falls G invertierbar ist ergibt sich damit eine Lösung

$$u(t) = G^{-1}(F(t) + C)$$

der Differentialgleichung.

Übung 15.26. — Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

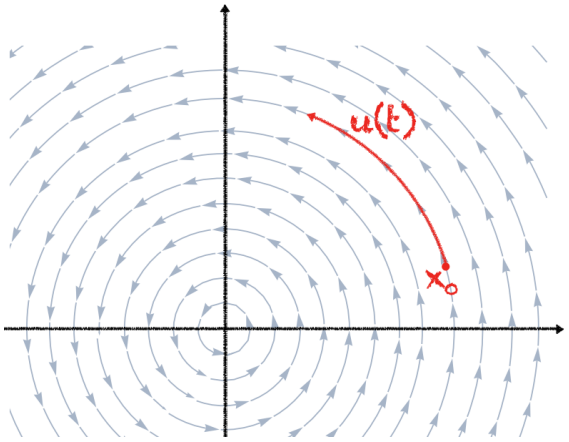
$$\sqrt{1-t^2}\, u'(t) - u(t)^2 = 1, \quad u(0) = 0.$$

15.1.4 Beispiele autonomer Differentialgleichungssysteme

Beispiel 15.27. — Wir betrachten das Differentialgleichungssystem in zwei ubekannten reellwertigen Funktionen u_1 und u_2 gegeben durch $u_1' = -u_2$ und $u_2' = u_1$. Dieses lässt sich auch als $u' = F(t, u(t))$ mit

$$F(t,x) = Ax = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)x \qquad u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$$

schreiben. Auf Grund der Zeitunabhängigkeit von F ist dieses Differentialgleichungssystem autonom. Fassen wir das Vektorfeld F als Fluss eines Mediums in der Ebene auf, so beschreibt F einen laminaren Fluss, der sich positiv und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Ursprung dreht. Eine Lösung u der Differentialgleichung $u' = Au$ beschreibt den Weg, den ein Teilchen in diesem Fluss zurücklegt. Um diesen Weg eindeutig bestimmen zu können müssen wir die Position des Teilchens zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ kennen, das heisst, wir müssen zur Differentialgleichung eine Anfangsbedingung $u(0) = x_0$ festlegen.



Die eindeutig bestimmte Lösung u zum Anfangswertproblem $u' = Au$ mit einem beliebigen Anfangswert $x_0 = u(0) \in \mathbb{R}^2$ ist durch

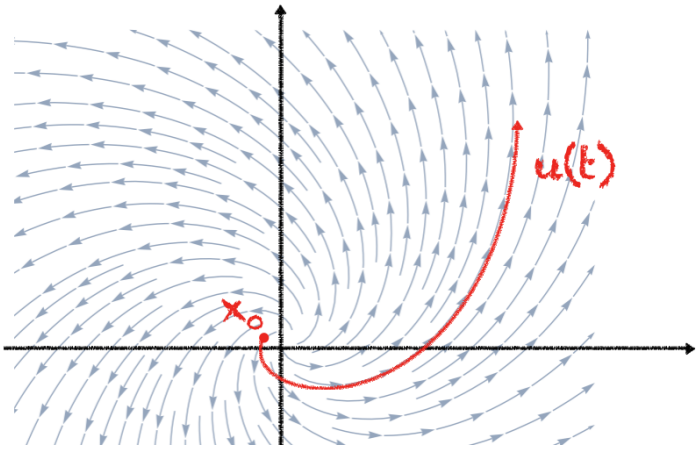
$$u(t) = \exp\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)t\right)x_0 = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{smallmatrix}\right)x_0$$

gegeben, was die physikalischen Überlegungen bestätigt.

Beispiel 15.28. — Wir betrachten das autonome Differentialgleichungssystem in zwei ubekannten reellwertigen Funktionen u_1 und u_2 gegeben durch $u_1' = u_1 - u_2$ und $u_2' = u_1 + u_2$, welches sich auch kurz als

$$u' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) u$$

schreiben lässt. Wir stellen das Vektorfeld oder dessen Fluss wieder in einer Grafik dar.



Die eindeutig bestimmte Lösung x zum Anfangswertproblem mit einem beliebigen Anfangswert $u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ ist durch den spiralförmigen Weg

$$u(t) = \exp\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)t\right)x_0 = \exp\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)t\right)\exp\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)t\right)x_0 = \exp(t)\left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{smallmatrix}\right)x_0$$

gegeben.

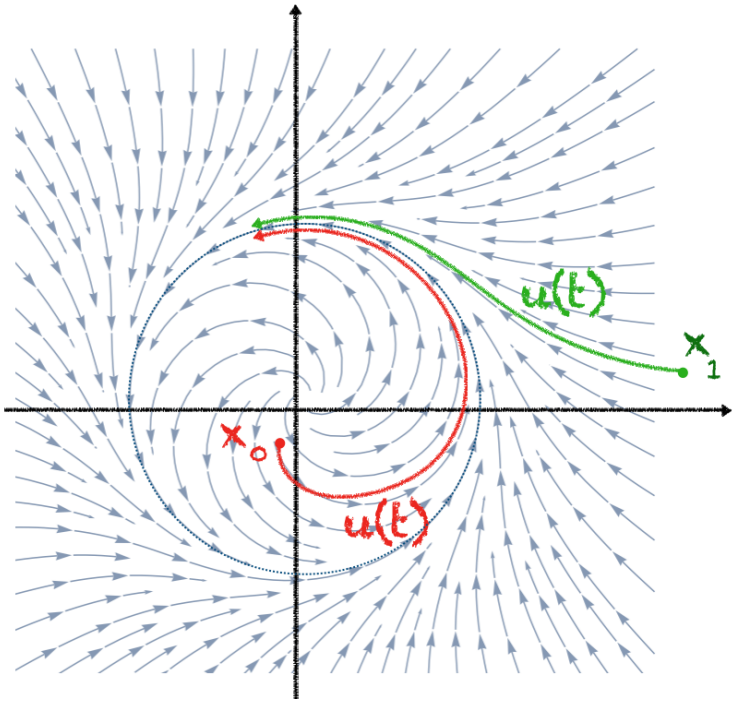
Beispiel 15.29. — Wir betrachten das nicht-lineare autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u' &= u - v - (u^2 + v^2)u \\ v' &= u + v - (u^2 + v^2)v \end{aligned} \tag{15.11}$$

das wir kurz als $(u', v') = F(u, v)$ schreiben können, zusammen mit einer Anfangsbedingung $(u(0), v(0)) = (x_0, y_0)$. Zum Anfangswert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ haben wir die konstante Lösung $(u, v) = (0, 0)$. Dass dies tatsächlich die einzige Lösung zum Anfangswert $(0, 0)$ ist können wir mit dem Satz von Picard-Lindelöf 15.31 begründen. Wir nehmen nun an, dass der Anfangswert (x_0, y_0) nicht $(0, 0)$ ist. Das entsprechende zeitunabhängige Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x - y - (x^2 + y^2)x \\ x + y - (x^2 + y^2)y \end{pmatrix}$$

lässt sich wie in folgendem Bild darstellen.



In der Hoffnung, dass sich das Problem dadurch vereinfacht führen wie Polarkoordinaten ein. Das heisst, wir schreiben $r(t)^2 = u(t)^2 + v(t)^2$ und

$$u(t) = r(t)\cos(\varphi(t)), \quad v(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$$

für eine geeignete Funktion φ. Man berechnet

$$\begin{aligned}(r^2)' = u^2 + v^2)' &= 2xx' + 2yy' \\ &= 2\big(u^2 - uv - (u^2+v^2)u^2\big) + 2\big(uv + v^2 - (u^2+v^2)v^2\big) = 2(r^2 - r^4)\end{aligned}$$

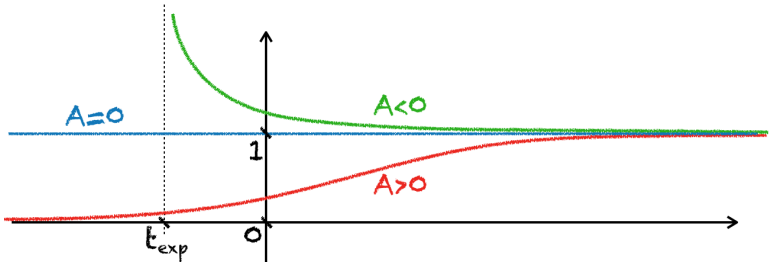
und somit, da $(r^2)' = 2rr'$, erhält man das Anfangswertproblem

$$r' = r - r^3, \qquad r(0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

für die reellwertige Funktion r. Eine Lösung davon lässt sich mit der Trennung der Variablen finden. Man erhält

$$r(t) = \frac{\exp(t)}{\sqrt{A + \exp(2t)}}, \qquad A = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} - 1$$

für die dem Anfangswert $r(0)$ angepasste Konstante $A \in (-1, \infty)$.



Die Funktion r ist also für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert, und auch für alle $t \leq 0$ falls $A \geq 0$ gilt, das heisst, falls der Anfangspunkt (x_0, y_0) auf oder innerhalb des Einheitskreises liegt. Für $A < 0$ gibt es einen Zeitpunkt $t_{\exp} = \frac{1}{2}\log(-A)$, an dem die Funktion r „explodiert“. Es gilt $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$ unabhängig vom Anfangswert, wie man es schon aus der Illustration des Vektorfelds erahnen konnte. Um den Winkel φ zu bestimmen berechnen wir mit der Kettenregel und der bereits bekannten Beziehung $r' = (1 - r^2)r$

$$u' = r'\cos(\varphi) - r\varphi'\sin(\varphi) = u - r^2 u - \varphi' v.$$

Andererseits gilt $u' = u - v - r^2 u$ nach (15.11), woraus sich $u\varphi' = u$ ergibt. Analog zeigt man $v\varphi' = v$. Es gilt also entweder $u = v = 0$, was der konstanten Lösung entspricht, oder $\varphi' = 1$ und somit $\varphi(t) = t + B$ für eine passend zum Anfangswert gewählte Konstante $B \in \mathbb{R}$. Zusammenfassend gilt

$$u(t) = \frac{\exp(t)\cos(B+t)}{\sqrt{A + \exp(2t)}}, \qquad \text{und} \qquad u(t) = \frac{\exp(t)\sin(B+t)}{\sqrt{A + \exp(2t)}}$$

für geeignete Konstanten $A > -1$ und B. Wie man also aus der Darstellung des Vektorfelds hätte vermuten können, bilden die Lösungen Spiralen, die sich dem Einheitskreis annähern.

Applet 15.30 (Diverse Differentialgleichungen und ihre Lösungen)**.** *Illustration der Lösungen einiger Differentialgleichungen mit jeweils unterschiedlichem Verhalten.*

15.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Selbst relativ einfache Anfangswertprobleme haben nicht immer eine eindeutig bestimmte Lösung. Wenn man hingegen zu einem Differentialgleichungssystem

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

eine schwache Annahme an das Vektorfeld F verlangt, so erhält man sowohl Existenz als auch Eindeutigkeit der Lösung nach einem fundamentalen Satz benannt nach Emile Picard und Ernst Leonard Lindelöf. Wir folgen essentiell Lindelöf's Arbeit [Lin1894].

15.2.1 Der Satz von Picard-Lindelöf

Satz 15.31 (Picard-Lindelöf). — *Sei $d \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $(t_0, x_0) \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^d$ stetig. Angenommen F ist „lokal Lipschitz-stetig im Ort", das heisst, für alle $(t_1, x_1) \in U$ existieren $\varepsilon > 0$ und $L \geq 0$, so dass für alle $(t, x_2), (t, x_3) \in B((t_1, x_1), \varepsilon) \cap U$ die Abschätzung*

$$\|F(t, x_2) - F(t, x_3)\| \leq L\|x_2 - x_3\|$$

gilt. Dann existiert ein (nicht unbedingt beschränktes) Intervall $I = I_{\max} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Es gilt $(t, u(t)) \in U$ für alle $t \in I$, und u ist eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) & \text{für alle } t \in I \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2. *Für jede weitere Lösung $v : J \to \mathbb{R}^d$ desselben Anfangswertproblems definiert auf einem offenen Intervall J mit $t_0 \in J$ gilt $J \subseteq I$ und $u|_J = v$.*

3. *Die Grenzwerte $\lim\limits_{t \to a} (t, u(t))$ und $\lim\limits_{t \to b} (t, u(t))$ existieren in U nicht.*

15.32. — Informell besagt der Satz von Picard-Lindelöf, dass jedes Anfangswertproblem für ein im Ort lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld eine eindeutige Lösung hat. Des Weiteren lässt sich diese entweder beliebig lange fortsetzen ($b = \infty$) oder solange, bis sie „explodiert", das heisst, in endlicher Zeit den Definitionsbereich U der Differentialgleichung verlässt. Siehe dazu Übung 15.37 für eine schärfere Formulierung dieser Behauptung. Die Hypothese dass F lokal im Ort lokal Lipschitz-stetig ist kann nicht weggelassen werden wie wir im Beispiel 15.38 zeigen, ist jedoch in der Praxis meist erfüllt. In Übung 15.34 prüfen wir, dass stetig differenzierbare Funktionen lokal Lipschitz-stetig sind. Insbesondere lässt sich der obige Satz auf stetig differenzierbare Vektorfelder F anwenden.

Der Beweis des Satzes läuft in zwei Schritten ab. Zuerst zeigen wir, unter Zuhilfenahme des Banach'schen Fixpunktsatzes, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems lokal, das heisst, in einer kleinen Umgebung von (t_0, x_0). Die präzise Aussage dazu

ist Proposition 15.33. In einem zweiten Schritt stückeln wir dann lokale Lösungen zu einer Lösung auf einem maximalen Intervall zusammen.

PROPOSITION 15.33. — *Seien $r > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und sei*

$$F : (t_0 - r, t_0 + r) \times B(x_0, r) \to \mathbb{R}^d$$

eine stetige Funktion. Angenommen es existieren Konstanten $C \geq 1$ und $L > 0$ so dass

$$\|F(t,x)\| \leq C \qquad \text{und} \qquad \|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

für alle $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$ und $x, x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ gilt. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ mit $\delta < \min\{\frac{r}{2C}, \frac{1}{2L}\}$ eine eindeutige differenzierbare Funktion $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to B(x_0, r)$ die

$$\begin{cases} u(t_0) = x_0, \\ u'(t) = F(t, u(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \end{cases} \tag{15.12}$$

erfüllt.

Beweis. Wähle $\delta > 0$ wie in der Proposition, und schreibe $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, angewandt auf jede Komponente von u, ist das Anfangwertproblem in (15.12) zur Integralgleichung

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds \tag{15.13}$$

für alle $t \in I$ äquivalent. Um diese Gleichung als Fixpunktgleichung zu interpretieren definieren wir einen geeigneten vollständigen metrischen Raum V und eine geeignete Lipschitz-Kontraktion $T : V \to V$.

Wähle $r_0 \in (\frac{r}{2}, r)$. Der Raum der stetigen Funktionen $C(I, \mathbb{R}^d)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist nach Proposition 10.68 vollständig. Die Teilmenge

$$V = \{u \in C(I, \mathbb{R}^d) \mid |u(t) - x_0| \leq r_0\}$$

ist der abgeschlossene Ball in $C(I, \mathbb{R}^d)$ mit Radius r_0 und Zentrum der konstanten Funktion mit Wert x_0. Insbesondere ist V als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums selbst vollständig. Die Abbildung $T : V \to C(I, \mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$(Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds$$

nennt sich **Picard-Abbildung**. Fixpunkte von T sind gerade Funktionen die (15.13) erfüllen. Um die Proposition zu beweisen genügt es, nach dem Banach'schen Fixpunktsatz 10.33, zu zeigen dass sich T zu einer eine Lipschitz-Kontraktion auf V einschränkt. Wir bemerken dazu, dass eine stetige Funktion $u : I \to B(x_0, r)$ ihre Extremwerte annimmt, und also Werte im

abgeschlossenen Ball $B(x_0, r_0)$ für ein geeignetes $r_0 \in (0, r)$ annimmt.

Für alle $u \in V$ und $t \in I$ gilt aufgrund der Dreiecksungleichung (6.23) für das Riemann-Integral

$$\|Tu(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, u(s))\| ds \right| \leq C|t - t_0| \leq C\delta \leq \frac{r}{2} \leq r_0$$

wobei der Absolutbetrag im dritten Ausdruck für den Fall $t < t_0$ notwendig ist. Dies zeigt, dass sich die Picard-Abbildung T wie behauptet zu $T : V \to V$ einschränkt. Seien $u_1, u_2 \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Tu_1(t) - Tu_2(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\|u_1(s) - u_2(s)\| ds \right| \leq L\delta \|u_1 - u_2\|_\infty < \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_\infty\end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Also ist T eine Lipschitz-Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $\frac{1}{2}$. □

Beweis von Satz 15.31. Wir beweisen zuerst die *Eindeutigkeit*. Seien also $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ und $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$u'(t) = F(t, u(t)), \qquad u(t_0) = x_0 \tag{15.14}$$

auf offenen Intervallen $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I := I_1 \cap I_2 = (\alpha, \beta)$. Wir behaupten, dass $u_1(t) = u_2(t)$ für alle $t \in I$ gilt. Um dies zu zeigen betrachten wir die Teilmenge

$$S = \{t \in I \mid u_1(t) = u_2(t)\}$$

von I. Diese Teilmenge ist abgeschlossen in I da u_1 und u_2 stetig sind, und nicht leer da $t_0 \in S$ gilt. Für jedes $t_1 \in S$ lösen sowohl u_1 als auch u_2 das Anfangwertproblem

$$u'(t) = F(t, u(t)), \qquad u(t_1) = x_1$$

für den gemeinsamen Wert $x_1 = u_1(t_1) = u_2(t_1)$. Somit existiert nach Proposition 15.33) ein $\delta > 0$ so dass $u_1(t) = u_2(t)$ für alle $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ gilt. Also ist $S \subseteq I$ auch offen, und es folgt $S = I$ wie behauptet.

Wir kommen nun zur *Existenz* einer maximalen Lösung. Dafür betrachten wir die Menge $\mathcal{J}$ aller Paare (J, v) bestehend aus einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$ und einer differenzierbaren Funktion $v : J \to \mathbb{R}^d$ die das Anfangswertproblem im Satz löst. Nach Poposition 15.33 ist $\mathcal{J}$ nicht leer. Wir setzen

$$I = \bigcup_{(J,v) \in \mathcal{J}} J$$

und definieren $u : I \to \mathbb{R}^n$ durch $u(t) = v(t)$ falls $t \in J$ für ein $(J, v) \in \mathcal{J}$ gilt. Aus der Eindeutigkeitseigenschaft im ersten Teil des Beweises ist dies wohldefiniert, die Menge I ist ein offenes Intervall, und u ist Lösung des Anfangswertproblems im Satz.

Es verbleibt den Beweis des behaupteten Verhaltens der maximalen Lösung (I, u) in der Nähe von a und b zu erbringen. Falls $b = \infty$ gilt, so gibt es nichts zeigen. Wir nehmen an, dass $b = \sup I < \infty$ gilt und der Grenzwert

$$\lim_{t \to b} (t, u(t)) = (b, x_b) \in U$$

existiert, und führen dies zu einem Widerspruch. Nach Proposition 15.33 existiert eine Lösung w des Anfangswertproblems

$$w(b) = x_b, \qquad w'(t) = F(t, v(t)),$$

definiert auf einem Intervall $J = (b - \delta, b + \delta)$ für ein $\delta > 0$. Wir verwenden diese Lösung, um eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems zu definieren. Sei $v : (a, b + \delta) \to \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{falls } t \in (a, b) \\ w(t) & \text{falls } t \in [b, b + \delta) \end{cases}$$

Wir behaupten, dass v ebenfalls das Anfangswertproblem (15.14) löst, was im Widerspruch zur Definition von b steht. Da u und w stetig sind und nach Definition

$$\lim_{t \to b} u(t) = x_b = v(b) = \lim_{t \to b} v(t)$$

gilt, ist v stetig. Es gilt $v(t) = F(t, v(t))$ für alle $t \in (a, b + \delta)$, ausser möglicherweise an der Stelle $t = b$. Es bleibt zu zeigen, dass v bei b differenzierbar ist und $v(b) = F(b, v(b))$ genügt. Die rechtsseitige Ableitung von v bei b erfüllt

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(b + h) - v(b)}{h} = w'(b) = F(b, w(b)) = F(b, v(b))$$

wie gewünscht. Die linksseitige Ableitung erfordert ein kleines Argument, welches auf der Stetigkeit von $t \mapsto f(t, u(t))$ beruht, siehe Übung 15.35 und verläuft dann analog. Wie erwähnt zeigt dieser Widerspruch zur Definition von b, dass u das behauptete Verhalten für $t \to b$ besitzt. Der Nachweis des Verhaltens für $t \to a$ erfolgt analog. □

Übung 15.34. — Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^d$ stetig, so dass die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k \in \{2, \ldots, d + 1\}$ auf U existieren und stetig sind. Zeigen Sie, dass F dann auch „lokal im Ort Lipschitz-stetig“ ist und somit die Voraussetzungen des Satzes 15.31 erfüllt.

Übung 15.35. — Seien $t_0 < b$ reelle Zahlen und $u : [t_0, b] \to \mathbb{R}^d$ auf $[t_0, b)$ differenzierbar,

so dass $u'(t) = f(t)$ für eine stetige Funktion $f : [t_0, b] \to \mathbb{R}^d$ und alle Punkte $t \in [t_0, b)$ gilt. Dann existiert die linksseitige Ableitung $u'(b) = f(b)$.

Übung 15.36. — Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $F : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ glatt. Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung $u'(t) = F(t, u(t))$ glatt ist.

Übung 15.37 (Challenge). — Seien U und F wie im Satz von Picard-Lindelöf und $u : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ die zugehörige maximale Lösung eines Anfangswertproblems für $(t_0, x_0) \in U$. Zeigen Sie als Verschärfung von Satz 15.31, dass es für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ Zeitpunkte $\alpha, \beta \in (a, b)$ gibt, so dass $(t, u(t)) \notin K$ für alle $t \in (a, b) \setminus (\alpha, \beta)$. In diesem Sinn verlässt die Lösung jede kompakte Teilmenge von U.

15.2.2 Beispiele

Beispiel 15.38. — Wir zeigen anhand eines einfachen Beispiels, dass die Hypothese an das Vektorfeld F im Satz von Picard-Lindelöf notwendig ist. Wir betrachten dazu das Anfangswertproblem

$$u' = 3u^{\frac{2}{3}}, \qquad y(0) = -1,$$

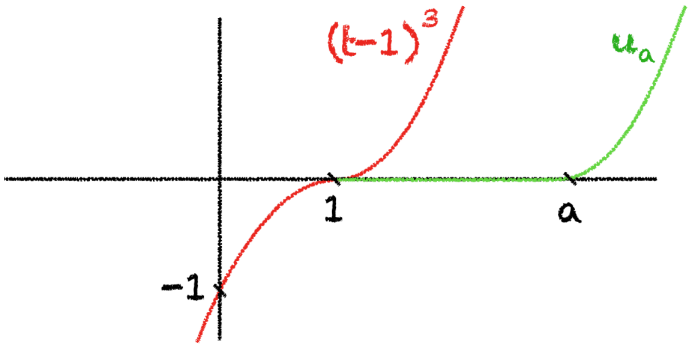
wobei wir die Definition $a^{\frac{2}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = |a|^{\frac{2}{3}}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ verwenden. Mit der Methode der Trennung der Variablen finden wir die Lösungen

$$u(t) = (t + C)^3$$

der Differentialgleichung. Richten wir $C = -1$ ein, so erhalten wir $u(t) = (t - 1)^3$ als auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. Das ist aber nicht die einzige Lösung. Zu jedem reellen Parameter $a \geq 1$ ist auch die stetig differenzierbare Funktion u_a gegeben durch

$$u_a(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{falls } t \leq 1 \\ 0 & \text{falls } 1 \leq t \leq a \\ (t-a)^3 & \text{falls } t \geq a \end{cases}$$

eine Lösung. Das gegebene Anfangswertproblem hat also überabzählbar viele Lösungen. Der Grund warum die Folgerung des Satzes von Picard-Lindelöf für dieses Anfangwertproblem nicht gilt ist, dass das die Funktion $F(t, x) = x^{3/2}$ auf $\mathbb{R}^2$ lokal im Ort um die Stelle $x = 0$ nicht Lipschitz-stetig ist.



Übung 15.39 (Schwarzes Loch). — Sei F ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$, mit $F(0) = 0$. Dann ist also die konstante Funktion mit Wert 0 eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $u'(t) = F(u(t))$ mit Anfangswert $u(0) = 0$. Wir interessieren uns für das Verhalten von Lösungen zu einem Anfangswert $u(0) = x_0$ nahe bei 0 in verschiedenen Situationen. Angenommen es gilt

$$F(x) = Ax + o(\|x\|) \qquad \text{für } x \to 0$$

für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es in den Fällen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

für negative $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ eine Umgebung U um den Nullpunkt gibt, so dass folgendes gilt: Ist u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = F(u(t)), \qquad u(0) = x_0$$

mit $x_0 \in U$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Verallgemeinern Sie dies auf höhere Dimensionen und alle Matrizen deren Eigenwerte negative Realteile haben.

Übung 15.40. — Seien $U = B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1^3 g(\|x\|^2) \\ x_1 + x_2^3 g(\|x\|^2) \end{pmatrix},$$

wobei $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist. Seien $\alpha < \beta$ in $[0,4)$ mit $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ und $g(r) > 0$ für alle $r \in (\alpha, \beta)$. Zeigen Sie, dass jede Lösung des Anfangwertproblems $u'(t) = F(u(t))$ mit Anfangswert $u(0) = x_0 \in U$ und $\|x_0\|^2 \in (\alpha, \beta)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und die Lösung im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung rotiert und sich „von innen“ der Lösung

$$u_\beta(t) = \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

annähert. Falls stattdessen $g(r) < 0$ für alle $r \in (\alpha, \beta)$, gilt dies analogerweise „von aussen“ und der Lösung $u_\alpha(t) = \sqrt{\alpha}\binom{\cos(t)}{\sin(t)}$.

Liste der Symbole

$\mathbb{1}_A$	charakteristische Funktion der Teilmenge A, Seite 21
$\aleph_0$	Kardinalität einer abzählbar unendlichen Menge, Seite 36
$\forall$	Allquantor, Seite 10
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen, Seite 51
$\mathfrak{c}$	Kardinalität des Kontinuums, Seite 36
∇f	Gradient von $f : U \to \mathbb{R}$., Seite 316
$\in$	ist Element von, Seite 14
$\notin$	ist nicht Element von, Seite 14
e	Euler'sche Zahl, Seite 141
$\exists$	Existenzquantor, Seite 10
$\mathcal{F}(D)$	Menge der reellwertigen Funktionen auf der Menge D, Seite 85
$\operatorname{grad}(f)$	Gradient von $f : U \to \mathbb{R}$., Seite 316
$\varnothing$	Leere Menge, Seite 14
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, Seite 6
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen, Seite 6
π	Die Zahl $\pi = 3.14159265359\ldots$, Seite 194
$K[T]$	Polynomring über einem Körper K in der Variablen T, Seite 79
$\mathcal{P}(X)$	Potenzmenge einer Menge X, Seite 16
$\mathcal{TF}([a,b])$	Treppenfunktionen auf $[a,b]$, Seite 102

Index

Äquivalenz
    Normen, 156
Äquivalenzklasse, 30
Äquivalenzrelation, 28
1-Norm, 156
2-Norm, 160

Abel-Summationsformel, 77
abgeschlossen, 50, 56, 276
abgeschlossene Kreisscheibe, 55
ableitbar, 310
Ableitung, 310
Abrundungsfunktion, 62
Absolutbetrag, 45, 54, 109
Abstand, 50, 119
Addition, 27
affin
    Funktion, 202, 258
    Polynom, 79
Airy-Gleichung, 230
algebraisch, 84
algebraisch abgeschlossen, 296
algebraischer Abschluss, 84
Allquantor, 10
angeordnete Gruppe, 71
Arcustangens, 224
Areakosinus Hyperbolicus, 227, 269
Areasinus Hyperbolicus, 226, 269
Argument, 196
Arkuskotangens, 224
Armstrong, Louis, 12
Assoziativität, 22
Atlas, 426
auschliessendes Oder, 9
Ausschöpfung, 399
Aussennormale, 407
Auswahlfunktion, 37
Auswertung, 79
autonome DGL, 447

Basis
    Logarithmus, 144
Basler Problem, 403
Bernoulli-Gleichung, 231
beschränkt, 57, 122
beschränkte Funktion, 85
Bessel-Gleichung, 230
Betafunktion, 405
Bijektion, 23
bijektiv, 23
Bild, 25
bilinear, 158

Cauchy-Folge, 124
Cauchy-Haupwert, 253
Cauchy-Schwarz Ungleichung, 55
Cesàro-Mittel, 139
charakteristische Funktion, 21

De Boer-Ludford-Gleichung, 231
De Morgan'sche Gesetze, 16
Dehn-Invariante, 388
Dezimalbruch, 63
dicht, 63
Diffeomorphismus, 352
Differential, 310
Differentialalgebra, 444
Differentialoperator, 442
differenzierbar, 310, 319
diskrete Metrik, 119
diskrete Topologie, 277
Distanz, 50, 119
divergent, 121

Divergenz, 406
Dreiecksungleichung, 46, 78

echter Dezimalbruch, 64
Einheitskreis, 196
Einheitssphäre, 356, 359, 361
Einschränkung, 22
    Topologie, 277
Ellipse, 327
Ellipsoid, 393
Endabschnitt, 133
endliche Menge, 36
Epizykloide, 420
erweiterte Zahlengerade, 59
Euklidische Geometrie, 73, 156
euklidsche Norm, 160
Eulersche Zahl, 141
Existenzquantor, 10
Exponentialfunktion, 141, 448
Exponentialpolynom, 444
Exponentialreihe, 190, 448
Extrema, 98
Extremwerte, 98
Exzentrizität, 327

Faktor, 77
fallend, 86
Faltung, 414
Fixpunkt, 285
Flächeninhalt, 105, 428
Flussintegral, 407
Folge, 17, 118
Folgenglied, 118
Folgenkompaktheit, 288
folgenstetig, 284
Folgenstetigkeit, 128
französische Eisenbahn, 120

ganze Zahlen, 6
Gauss'sche Glockenkurve, 402
gebrochener Anteil, 62
geometrische Folge, 139
geordnetes Paar, 17, 20
Gerade, 202
geschlossen, 305
gewöhnlich, 231
Glättungskern, 414
glatt, 319
glatte Funktion, 203
gleichmässig stetig, 98
gleichmässige Konvergenz, 182
grösser, 42
grösser gleich, 42
Grad eines Polynoms, 79
Gramsche Determinante, 393
Graph
    kombinatorisch, 120
Grenzwert, 121, 161, 279
Gross-O, 153

Häufungspunkt, 65, 123, 279
höhere Ableitung, 203
Hausdorff-Raum, 279
hebbare Unstetigkeitsstelle, 147
Heine-Borel, 162
Hesse-Matrix, 321
Hilbert Hotel, 24
Hilbert-Schmidt-Norm, 295
Homöomorphismus, 277
homogen, 230
Hyperboloid, 358

Identität, 21
imaginäre Einheit, 51
Imaginärteil, 51
Implikation, 8
Index, 76
Indexmenge, 17
indiskrete Topologie, 277
induktiv, 38
induzierte Topologie, 277
Infimum, 59
inhomogen, 230
Injektion, 22
injektiv, 22
Inklusionsabbildung, 21

inneres Produkt, 158
Integrabilitätsbedingung, 337
Integrand, 105
Integrationsgrenze, 105
Integrationskonstante, 229, 243
inverse Funktion, 23
Iteration einer Funktion, 22

Jacobi-Matrix, 312
Jensen'sche Ungleichung, 217

Körper, 42
Körpererweiterung, 297
Kardinalität, 36
Kardioide, 420
Kartenabbildung, 426
Kartenwechsel, 426
kartesisches Produkt, 17, 279
Kette, 38
Klasse C^n, 203
Klein-o, 154
kleiner, 42, 71
kleiner gleich, 42
Koeffizienten, 79, 185, 230
kommutatives Monoid, 27
kompakt, 287
komplexe Konjugation, 53
komplexe Zahlen, 51
komplexwertige Funktionen, 86
Komponenten, 164
Konjugation, 53
konservativ, 335
konstant (Polynom), 79
Kontinuum, 36
Kontraktion, 285
Kontraposition, 9
konvergent, 120
Konvergenzradius, 185
Konvexität, 215
Kraftfeld, 272
Kreisscheibe, 55

Lagrange Interpolation, 83
Laufvariable, 76
Lebesgue Integral, 106
Lebesgue-Zahl, 289, 416
Leitkoeffizient, 79
Liebespaar, 12
Limes, 121
Limes inferior, 133
Limes superior, 133
linear, 230
Lipschitz-Konstante, 284, 285
Lipschitz-stetig, 100, 284
logische Äquivalenz, 8

mächtiger, 33
Möbius-Band, 426
Manhattan-Metrik, 119
Masstheorie, 371, 384
maximales Element, 38
Maximum, 57, 98
Maximumsnorm, 156
Menge
    endlich, 36
Metrik, 119
metrischer Raum, 73, 119
Minimum, 98
monoton, 74, 86
    stückweise, 113
Multiindex, 321

Nachbarschaften, 50
natürliche Zahlen, 6
natürlichen Logarithmus, 144
Negation einer Aussage, 7
negativ, 42
Negativteil, 109
neutrales Element, 27
Newton-Cotes-Verfahren, 265
nicht-negativ, 85
nichtnegativ, 42
nichtpositiv, 42
Norm, 54, 156
    euklidisch, 160
    Hilbert-Schmidt, 295

induziert, 160
Operator, 295
Normalenbündel, 363
Normalverteilung, 402
Nullmenge, 372
Nullstelle, 81, 85

obere Schranke, 38, 57
Obersummen, 105, 370
Oder-Operation, 7
offen, 50, 56, 276
offene Überdeckung, 287
offene Kreisscheibe, 55
offene Teilmenge, 276
offene Umgebung, 277
Operatornorm, 295
Ordnung, 230
Ordnungsrelation, 28

Parameterintegral, 326
Parametrisierung, 417, 426
Partialbruchzerlegung, 248
Partition, 30, 101
Partition der Eins, 414
Pfad, 305
Picard-Abbildung, 456
Pol, 84
Polarkoordinaten, 196, 353
Polynom, 79
Polynomfunktion, 80
Polynomring, 79
positiv, 42
Positivkegel, 45
Positivteil, 109
Potenzmenge, 16
Potenzreihe, 185
Produkt, 18, 72, 77, 279
Produkttopologie, 279
Punkte, 118
punktweise Konvergenz, 180

quadratisch (Polynom), 79
Quadrupel, 17
Quantor, 10
Quotient, 30
Quotientenmenge, 30

Randbedingungen, 231
rationale Funktion, 83, 248
rationale Zahlen, 31
Raum, 118
Realteil, 51
rechtsseitiger Grenzwert, 149
reellwertig, 85
regulär
Weg, 270
Relation, 28
relativ abgeschlossen, 277
relativ offen, 277
Reparametrisierung, 270
Repräsentant, 30
Restglied, 259
Ricatti-Gleichung, 231
Riemann integrierbar, 164
Riemann-Integral, 370
Rotation, 421, 434
Russell-Paradox, 19

Schachtelungsprinzip, 287
Schlaufe, 305, 336
schliesslich konstant, 118
schmächtiger, 33
Schnitt, 37, 360
Schranke, 57
Schwarz, Satz von-, 319
Seminorm, 383
sesquilinear, 158
Signum, 46
Skalarprodukt, 158
Sprungstelle, 151
stückweise monoton, 113
standard
Skalarprodukt, 158
Standardmetrik, 119
Standardsimplex, 404
Standardtopologie, 277

stetig, 277, 284
    rechtsseitig, 151
stetig differenzierbar, 203
stetige Fortsetzung, 148
streng monoton, 86
strikt grösser, 42
strikt kleiner, 42
Substitution, 244
Summand, 76
Summe, 71, 76
Support, 389
Surjektion, 22
surjektiv, 22

Tangentialabbildung, 310
Tangentialbündel, 360
Tangentialraum, 360
Tautologie, 8
Teiler
    Polynom, 81
Teilfolge, 122
Teleskopprodukte, 77
Teleskopsumme, 77
Thomas–Fermi-Gleichung, 231
Topologie, 276
    induziert, 281
topologisch stetig, 284
Torus, 359
total beschränkt, 289
Träger, 389
transzendent, 84
Treppenfunktion, 369
Tripel, 17
triviale Topologie, 277
Tupel, 17

Umgebung, 50, 276
Umkehrfunktion, 23
Umlaufzahl, 422
unbestimmtes Integral, 229
Und-Operation, 7
uneigentliche Werte, 60
uneigentlicher Grenzwert, 137
uneigentliches Integral, 252
Unendlichnorm, 156
untere Schranke, 38
Unterraum
    Topologie, 277
Untersummen, 105, 370
Urbild, 25

Variable, 79, 85, 185
Variablenwechsel, 244
Vektorfeld, 272, 333, 360
Vektorprodukt, 407
Vervollständigung, 73, 124, 384
Vielfachheit, 82
vollständig, 124
Vollständigkeitsaxiom, 47
von oben beschränkt, 85

wachsend, 86
Wahrheitstabelle, 7
Weg, 305
Wegzusammenhang, 305
Winkel, 270
Wirbelstärke, 421, 434
wohldefiniert, 32
Wurzel, 95
Wurzelfunktion, 48

Zahlengerade, 47
    erweiterte, 59
Zerlegung, 101, 369
Zerlegung der Eins, 414
Zermelo-Fraenkel, 13, 37
zurückziehen, 435
zusammenhängend, 93, 304
Zusammenhangskomponente, 304
Zweipunktkompaktifizierung, 59
Zylinderkoordinaten, 354

Literaturverzeichnis

[ACa2003] N. A'Campo, *A natural construction for the real numbers* arXiv preprint 0301015, (2003)

[Apo1983] T. Apostol, *A proof that Euler missed: Evaluating* $\zeta(2)$ *the easy way* The Mathematical Intelligencer **5** no.3, p. 59–60 (1983)

[Aig2014] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise* Springer, (2014)

[Amm2006] H. Amann und J. Escher, *Analysis I*, 3. Auflage, Grundstudium Mathematik, Birkhäuser Basel, (2006)

[Bla2003] C. Blatter, *Analysis I* ETH Skript, https://people.math.ethz.ch/ blatter/dlp.html (2003)

[Bol1817] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Haase Verl. Prag (1817)

[Boo1847] G. Boole, *The mathematical analysis of logic* Philosophical library, (1847)

[Can1895] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* Mathematische Annalen **46** no.4, 481–512 (1895)

[Cau1821] A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique* L'Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi. Paris, (1821)

[Ded1872] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig (1872)

[Die1990] J. Dieudonné, *Elements d'analyse* Editions Jacques Gabay (1990)

[Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology* Cambridge University Press (2002)

[Hil1893] D. Hilbert, *Über die Transzendenz der Zahlen* e *und* π Mathematische Annalen **43**, 216-219 (1893)

[Hos1715] G.F.A. Marquis de l'Hôpital, *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* 2nde Edition, F. Montalant, Paris (1715)

[Lin1894] E. Lindelöf, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires* Journal de mathématiques pures et appliquées **10** no.4, 117–128 (1894)

[Rus1903] B. Russell, *The principles of mathematics* WW Norton & Company, (1903)

[Rot88] J. J. Rotman, *An introduction to Algebraic Topology* Graduate Texts in Mathematics **119** Springer 1988

[Smu1978] R. Smullyan, *What is the name of this book?* Prentice-Hall, (1978)

[Zag1990] D. Zagier, *A one-sentence proof that every prime* $p \equiv 1 \mod 4$ *is a sum of two squares.* Amer. Math. Monthly **97**, no.2, p. 144 (1990)