ETHZ, D-MATH
Prüfung
Numerische Methoden D-PHYS, FS 2017
Dr. V. Gradinaru

17.08.2017

1. *(12 Punkte) Zweikörper Problem*

Die Bewegungsgleichungen für das Zweikörper Problem lauten:

$$\ddot{\vec{x}}_1 = Gm_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} \qquad \ddot{\vec{x}}_2 = Gm_1 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}. \tag{1}$$

Hier ist $G = 1$, $m_1 = 10$ und $m_2 = 1$. Die Anfangsbedingungen sind

$$\vec{x}_1(0) = (0, 0) \quad \dot{\vec{x}}_1(0) = (0, -0.3) \tag{2}$$

$$\vec{x}_2(0) = (1, 0) \quad \dot{\vec{x}}_2(0) = (0, 3) \tag{3}$$

a) Schreiben Sie (**??**) als autonome Differenzialgleichung erster Ordnung.

b) Implementieren Sie das implizite Mittelpunktsverfahren.

c) Berechnen Sie die numerische Lösung von (**??**) und plotten Sie die Evolution der beiden Köper in der Ebene bis zur Zeit $t = 10$.

d) Berechnen Sie die Konvergenzordnung der numerischen Lösung zur Zeit $t = 10$ und plotten Sie den Fehler gegen die Anzahl Zeitschritte.
Hinweis: Verwenden Sie `ode45` um eine Referenzlösung zu berechnen.

Bitte wenden!

2. *(6 Punkte) Satellitenbahnen*

Die Bahn eines Satelliten um die Erde ist durch die Gleichung

$$R = C(1 + e\sin(\theta + \alpha))^{-1}$$

gegeben, wobei $(R(t), \theta(t))$ die Polarkoordinaten des Satelliten sind. Die Parameter C, e und α sind Konstanten.

Die Koordinaten des Satelliten wurden in drei verschiedenen Punkte seiner Umlaufbahn gemessen. In $\theta = -30°$, $0°$ and $30°$ war der Satellit $R = 6870\,\mathrm{km}$, $6728\,\mathrm{km}$ und $6615\,\mathrm{km}$ vom Zentrum der Erde entfernt.

a) Implementieren Sie das Newtonverfahren.
Hinweis: Lösen Sie lineare Gleichunssysteme mit `NumPy`.

b) Verwenden Sie Ihre Implementation des Newtonverfahrens um die Parameter C, e und α und den kürzesten Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt zu bestimmen.

3. *(6 Punkte) Monte-Carlo-Quadratur in mehreren Dimensionen*

Wir betrachten das Integral

$$I = \int_{\vec{x}\in[0,1]^d} |x_1 + \cdots + x_d|^2 \mathrm{d}\vec{x},$$

a) Implementieren Sie eine `Python`-Funktion `mcquad(f, d, N)`, die das obige Integral mit der Monte-Carlo-Methode mit $N = 10^k$ Zufallsvektoren numerisch berechnet.

b) Verwenden Sie `mcquad` mit $k = 6$ und $d = 10$ um $M = 100$ verschiedene Approximationen (z_i, σ_i) des Integrals I zuberechenen. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung σ_M von z_i.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Der exakte Wert I liegt immer in mindestens 68% der Vertrauensintervallen $[z_i - \sigma_i, z_i + \sigma_i]$.

(ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass $I \in [z_i - \sigma_i, z_i + \sigma_i]$ ist (ca.) 0.68.

(iii) I liegt mit Wahrscheinlichkeit 0.68 in $[23.932, 26.339]$.

(iv) Je nach dem welche Zufallsvektoren gezogen wurden, kann z_i auch negativ sein.

(v) Die MC-Methode ist exakt für lineare Integranden.

(vi) Wir erwarten dass die Länge des Vertrauensintervals proportional zu $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ist.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
wahr						
falsch						

Hinweis: Kreuzen Sie die jeweils korrekte Antwort an. Für jede richtige Antwort gibt es +0.25 Punkte, für jede falsche Antwort −0.25. Insgesamt gibt es für die Multiple-Choice Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte.

c) Bestimmen Sie das 99%-Vertrauensintervall für $d = 10$ und $k = 6$.

4. *(6 Punkte) Wetterprognose am Mythenquai*

Von 2007 bis 2017 wurde am Mythenquai täglich die Temperatur gemessen. Um die saisonale Schwankung der Temperatur zu untersuchen, soll die Funktion

$$T(t) = a \sin((t - b)/c) + d$$

an die Messwerte gefittet werden. Die Messwerte werden im Template automatisch aus der Datei `4_temperatures.txt` eingelesen.

In dieser Aufgabe sollen die Parameter a, b, c und d numerisch mittels Ausgleichsrechung bestimmt werden.

a) Schauen Sie sich das Problem genau an und bestimmen Sie Startwerte für die nicht lineare Ausgleichsrechnung. Begründen Sie Ihre Wahl.

b) Lösen Sie das Problem mittels Ausgleichsrechnung und bestimmen Sie die Parameter a, b, c und d. Plotten Sie die Messwerte T mit Ihrem Startwert als Parameter und T mit den gefitteten Parameter in einem Plot.

Hinweis: Verwenden Sie `numpy` und `scipy` Funktionen nach belieben.

5. *(12 Punkte) Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung*

Wir betrachten die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit Morse Potential V:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} & = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x)u, \\ u(x,0) & = g(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{4}$$

mit $\varepsilon = 0.01$. Das Morse Potential ist

$$V(x) = V_0 \left(1 + e^{-2\beta(x+1)} - 2e^{-\beta(x+1)}\right).$$

mit den Parametern $V_0 = 8$ und $\beta = \frac{1}{4}$.

Die Anfangsbedingung g ist durch

$$g(x) = \left(\frac{1}{\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(x+\frac{1}{2})^2} e^{-i\frac{x}{\varepsilon}}$$

gegeben.

a) Diskretisieren Sie (**??**) mittels Fourier Approximation im Ort und Strang-Splitting in der Zeit. Verwenden Sie ein uniformes Gitter mit N Punkten und n Zeitschritten.

Implementieren Sie das Verfahren in `Python`.

Hinweis: Das Template heisst `5_tdse.py`.

b) Plotten Sie die Evolution der L^2-Norm der Lösung und die kinetische, potentielle und totale Energie in zwei verschiedenen Plots bis zur Zeit $t = 50$. Nehmen Sie $N = 2^{11}$ und $n = 500$.